

Rényiho parkovací problém

Antonín Slavík
Matematicko-fyzikální fakulta UK

Občasný seminář z matematické analýzy
Ostrava, 26. března 2026

Rényiho parkovací problém (Alfréd Rényi, 1958)

- Uvažujme jednosměrnou ulici délky $x > 1$, kterou ztotožníme s intervalem $[0, x]$.
- Všechna auta mají jednotkovou délku.
- První auto zaparkuje náhodně, poloha levého konce je rovnoměrně náhodně vybrána z $[0, x - 1]$.
- Druhé auto se chová stejně, ale opustí ulici, pokud se vybraná pozice překrývá s pozicí prvního auta.
- Parkovací proces pokračuje tak dlouho, dokud existuje nenulová pravděpodobnost, že zaparkuje další auto.

Vypočítejte $m(x)$ = střední hodnotu počtu aut, která zvládnou zaparkovat.

<https://mathworld.wolfram.com/RenyisParkingConstants.html>

Původní motivace: Výpočet střední hustoty náhodně rozmístěných jednotkových koulí ve velké krychli (model plynu).

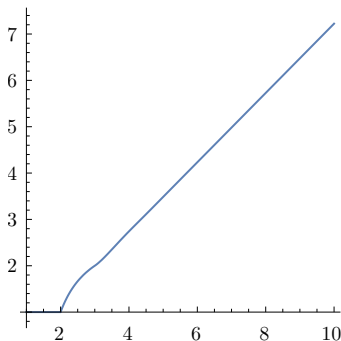
Odvodíme rovnici pro $m(x + 1)$.

Předpokládejme, že první auto zaparkovalo s levým koncem v bodě $t \in [0, x]$. Zbývající volná místa na obou stranách ulice mají délky t and $x - t$. Střední hodnoty aut, které zde zaparkují, jsou $m(t)$ a $m(x - t)$. Vezmeme průměr přes všechna možná t :

$$\begin{aligned}m(x + 1) &= \frac{1}{x} \int_0^x (1 + m(t) + m(x - t)) dt \\&= 1 + \frac{1}{x} \int_0^x m(t) dt + \frac{1}{x} \int_0^x m(x - t) dt \\&= 1 + \frac{2}{x} \int_0^x m(t) dt, \quad x \geq 1.\end{aligned}$$

Platí $m(x) = 1$ pro všechna $x \in [1, 2]$. Z integrální rovnice lze postupně počítat $m(x)$ na dalších intervalech délky 1.

Řešení integrální rovnice



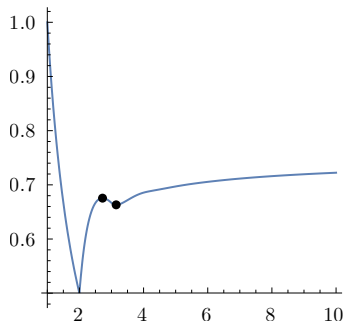
$$m(x) = \frac{3x - 5}{x - 1}, \quad x \in [2, 3],$$

$$m(x) = \frac{7x - 4 \log(x - 2) - 17}{x - 1}, \quad x \in [3, 4].$$

Dále již nelze integrovat pomocí elementárních funkcí.

Rényiho parkovací konstanta

Místo $m(x)$ můžeme studovat hodnoty $\frac{m(x)}{x}$, tj. střední hustotu aut.



Rényi dokázal, že platí

$$C = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m(x)}{x} = \int_0^\infty \exp \left(-2 \int_0^u \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \right) du \doteq 0.7475979.$$

Otevřený problém: Je C iracionální?

Rényiho diferenciální rovnice

Víme, že

$$m(x+1) = 1 + \frac{2}{x} \int_0^x m(t) dt.$$

Vynásobením x a derivováním obdržíme rovnici se zpožděním:

$$x \cdot m'(x+1) + m(x+1) = 1 + 2m(x), \quad x \geq 1.$$

Rényi použil Laplaceovu transformaci, variaci konstant a tauberovskou větu k výpočtu parkovací konstanty.

Představíme nové elementárnější odvození, které je inspirováno výzkumem N. G. de Bruijna v teorii čísel, a využívá duality mezi diferenciálními rovnicemi se zpožděným a zrychleným argumentem.

Krok 1: Substituce

Substitucí $n(x) = m(x) + 1$ získáme z nehomogenní rovnice

$$x \cdot m'(x+1) + m(x+1) = 1 + 2m(x), \quad x \geq 1,$$

homogenní rovnici

$$x \cdot n'(x+1) + n(x+1) = 2n(x), \quad x \geq 1,$$

kteřou lze přepsat ve tvaru

$$[x \cdot n(x+1)]' = 2n(x), \quad x \geq 1,$$

nebo ekvivalentně

$$[(x-1)n(x)]' = 2n(x-1), \quad x \geq 2.$$

Počáteční podmínka je nyní $n(x) = m(x) + 1 = 2$ pro všechna $x \in [1, 2]$ a stačí vypočítat $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(x)}{x}$.

Krok 2: Rovnice se zrychleným argumentem

Tvrzení. Pokud $n: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je libovolné řešení rovnice

$$[(x-1)n(x)]' = 2n(x-1), \quad x \geq 2,$$

a $h: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je libovolné řešení rovnice

$$\frac{1}{2}(x-1)h'(x-1) + h(x) = 0, \quad x \geq 2,$$

pak funkce $\langle n, h \rangle$ definovaná předpisem

$$\langle n, h \rangle(x) = 2 \int_{x-1}^x n(t)h(t) dt + (x-1)n(x)h(x-1)$$

je konstantní na $[2, \infty)$.

Důkaz. Stačí ukázat $\langle n, h \rangle'(x) = 0$ pro $x \geq 2$.

Definice $\langle n, h \rangle$:

$$\langle n, h \rangle(x) = 2 \int_{x-1}^x n(t)h(t) dt + (x-1)n(x)h(x-1)$$

Derivujeme:

$$\begin{aligned} \langle n, h \rangle'(x) &= 2n(x)h(x) - 2n(x-1)h(x-1) \\ &+ n(x)h(x-1) + (x-1)n'(x)h(x-1) + (x-1)n(x)h'(x-1) \end{aligned}$$

Platí $n(x-1) = \frac{1}{2}[(x-1)n(x)]' = \frac{1}{2}n(x) + \frac{1}{2}(x-1)n'(x)$, tedy:

$$\begin{aligned} \langle n, h \rangle'(x) &= 2n(x)h(x) + (x-1)n(x)h'(x-1) \\ &= n(x)(2h(x) + (x-1)h'(x-1)) = 0 \end{aligned}$$

Krok 3: Řešení rovnice se zrychleným argumentem

Modifikovaný exponenciální integrál:

$$\text{Ein } u = \int_0^u \frac{1 - e^{-t}}{t} dt, \quad u \in [0, \infty).$$

Poznámky:

- Rényiho konstanta je

$$C = \int_0^\infty \exp\left(-2 \int_0^u \frac{1 - e^{-t}}{t} dt\right) du = \int_0^\infty e^{-2 \text{Ein } u} du.$$

- Platí $\lim_{u \rightarrow \infty} \text{Ein } u = \infty$.

Tvrzení. Funkce

$$h(x) = \int_0^\infty u \cdot e^{-u \cdot x - 2 \text{Ein } u} du, \quad x \in [1, \infty),$$

je řešením rovnice se zrychleným argumentem. Navíc platí

$$h(x) \sim \frac{1}{x^2} \text{ pro } x \rightarrow \infty.$$

Důkaz – část 1

Definice h :

$$h(x) = \int_0^{\infty} u \cdot e^{-u \cdot x - 2 \operatorname{Ein} u} du, \quad x \in [1, \infty)$$

Derivace integrálu podle parametru:

$$h'(x) = - \int_0^{\infty} u^2 \cdot e^{-u \cdot x - 2 \operatorname{Ein} u} du, \quad x \geq 1$$

Tedy pro $x \geq 2$ platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x-1)h'(x-1) + h(x) &= \frac{1}{2}(1-x) \int_0^{\infty} u^2 \cdot e^{-u \cdot (x-1) - 2 \operatorname{Ein} u} du \\ &\quad + \int_0^{\infty} u \cdot e^{-u \cdot x - 2 \operatorname{Ein} u} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u \cdot (x-1) - 2 \operatorname{Ein} u} \left((1-x)u^2 + 2u \cdot e^{-u} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left[u^2 \cdot e^{-u \cdot (x-1) - 2 \operatorname{Ein} u} \right]_{u=0}^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Důkaz – část 2

Zbývá dokázat $h(x) \sim \frac{1}{x^2}$ pro $x \rightarrow \infty$.

Použijeme substituci $t = x \cdot u$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot h(x) \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} x^2 \cdot u \cdot e^{-u \cdot x - 2 \operatorname{Ein} u} du \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} t \cdot e^{-t} \cdot e^{-2 \operatorname{Ein}(t/x)} dt \\&= \int_0^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(t \cdot e^{-t} \cdot e^{-2 \operatorname{Ein}(t/x)} \right) dt \\&= \int_0^{\infty} t \cdot e^{-t} dt = 1.\end{aligned}$$

Záměnu pořadí limity a integrálu lze odůvodnit pomocí Lebesgueovy věty.

Krok 4: Výpočet Rényiho konstanty

Nechť n je řešení původní rovnice se zpožděným argumentem a h je nalezené řešení rovnice se zrychleným argumentem. Víme, že $\langle n, h \rangle$ je konstantní funkce:

$$\langle n, h \rangle(2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \langle n, h \rangle(x),$$

$$4 \int_1^2 h(t) dt + 2h(1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \int_{x-1}^x n(t)h(t) dt + (x-1)n(x)h(x-1) \right).$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{x-1}^x n(t)h(t) dt = 0$, protože $h(t) \sim \frac{1}{t^2}$ a $n(t) = m(t) + 1 \leq t + 1$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)n(x)h(x-1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(x)}{x}$, protože $h(x) \sim \frac{1}{x^2}$.

$$\text{Tudíž } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(x)}{x} = 4 \int_1^2 h(t) dt + 2h(1).$$

Výpočet dokončíme použitím definice h .

Dokončení výpočtu

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(x)}{x} &= 4 \int_1^2 \left(\int_0^\infty u \cdot e^{-u \cdot t - 2 \operatorname{Ein} u} du \right) dt + 2h(1) \\&= 4 \int_0^\infty u \cdot e^{-2 \operatorname{Ein} u} \cdot \left(\int_1^2 e^{-u \cdot t} dt \right) du + 2h(1) \\&= 4 \int_0^\infty e^{-2 \operatorname{Ein} u} \cdot (e^{-u} - e^{-2u}) du + 2 \int_0^\infty u \cdot e^{-u} \cdot e^{-2 \operatorname{Ein} u} du \\&= \int_0^\infty e^{-2 \operatorname{Ein} u} \cdot (4e^{-u} - 4e^{-2u} + 2u \cdot e^{-u} - 1) du + \int_0^\infty e^{-2 \operatorname{Ein} u} du.\end{aligned}$$

Zbývá ověřit, že první integrál je nulový. Lze jej vypočítat pomocí primitivní funkce

$$F(u) = e^{-2 \operatorname{Ein} u} \cdot (-2u \cdot e^{-u} + u).$$

Ekvivalentní vyjádření Rényiho konstanty

Modifikovaný exponenciální integrál Ein lze psát ve tvaru

$$\text{Ein } u = \Gamma(0, u) + \gamma + \log u,$$

kde $\Gamma(0, u) = \int_u^\infty \frac{e^{-t}}{t}$ je speciální případ neúplné funkce gama a $\gamma \doteq 0.577216$ je Eulerova konstanta.

Odtud plyne vyjádření Rényiho parkovací konstanty ve tvaru

$$C = e^{-2\gamma} \int_0^\infty \frac{e^{-2\Gamma(0,u)}}{u^2} du.$$

Bibliografické poznámky (1)

Předchozí důkaz je inspirován de Bruijnovým zkoumáním Buchstabovy funkce ω , která je řešením rovnice

$$[x \cdot \omega(x)]' = \omega(x-1), \quad x \geq 2,$$

a $\omega(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in [1, 2]$.

De Bruijna zajímalo asymptotické chování funkce ω a všiml si, že pokud h je libovolné řešení rovnice $x \cdot h'(x-1) + h(x) = 0$ se zrychleným argumentem, pak hodnota výrazu

$$\int_{x-1}^x \omega(t)h(t) dt + x \cdot \omega(x)h(x-1)$$

nezávisí na x .

Rovnici se zrychleným argumentem dokázal vyřešit.

Bibliografické poznámky (2)

De Bruijn si uvědomil, že jeho postup lze využít nejen ke zkoumání Buchstabovy funkce, ale i pro podobné úlohy. V článku z roku 1953 uvažoval rovnici

$$w(x)f'(x) + p(x)f(x) - q(x)f(x-1) = 0$$

se zpožděným argumentem a zavedl "adjungovanou" rovnici

$$-[w(x)g(x)]' + p(x)g(x) - q(x+1)g(x+1) = 0$$

se zrychleným argumentem spolu se "skalárním součinem"

$$\langle f, g \rangle = \int_{x-1}^x q(t+1)f(t)g(t+1) dt + w(x)f(x)g(x).$$

Parkovací problém není v de Bruijnových publikacích nikde zmíněn, musel však o něm vědět.

Bibliografické poznámky (3)

- A. Rényi (maďarsky 1958, anglický překlad 1963):

$$m(x) = C \cdot (x + 1) - 1 + O(x^{-n})$$

Poznámka pod čarou: *N. G. de Bruijn pointed out that using his method the estimation of the remainder term can be made still sharper.*

- A. Dvoretzky, H. Robbins (1964):

$$m(x) = C \cdot (x + 1) - 1 + O\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-3/2}\right)$$

- J. J. A. Beenakker (de Bruijnův doktorand, disertace obhájená 1966 obsahuje 4 strany věnované parkovacímu problému):

$$m(x) = C \cdot (x + 1) - 1 + O\left(\left(\frac{2e}{x \cdot \log x}\right)^x\right)$$

Bibliografické poznámky (4)

Dualitu mezi rovnicemi se zpožděným a zrychleným argumentem podrobněji popsali H. Iwaniec, J. van de Lune, H. J. J. te Riele (1980): Uvažovali rovnici

$$x \cdot G'(x) = -a \cdot G(x) - b \cdot G(x-1),$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Příslušná adjungovaná rovnice má tvar

$$(x \cdot g(x))' = a \cdot g(x) + b \cdot g(x+1)$$

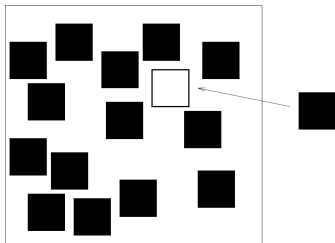
a vždy existuje řešení splňující $g(x) \sim x^{a+b-1}$ for $x \rightarrow \infty$. Pro $a+b < 1$ je toto řešení dáno vztahem

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-a-b)} \int_0^\infty \frac{e^{-x \cdot u + b \cdot \text{Ein } u}}{u^{a+b}} du.$$

V článcích M. Pituk & G. Röst (2014) a I. Győri & M. Pituk (2016) je dualita využita ke zkoumání asymptotického chování řešení rovnice

$$x'(t) = p(t)x(t - r).$$

Dvourozměrná varianta



Do čtverce o straně délky x náhodně umístíme jednotkové čtverce. Jaká je střední hustota $\frac{m(x)}{x^2}$? Ilona Palásti vyslovila domněnku (*Palásti conjecture*, 1960), že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m(x)}{x^2} = C^2 \doteq 0.5589.$$

Domněnka nebyla dodnes potvrzena ani vyvrácena, numerické experimenty však vedou k hodnotě

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m(x)}{x^2} \doteq 0.5620.$$

- A. Rényi, *On a one-dimensional problem concerning random space filling*, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 3 (1958), 109–127.
- H. Solomon, H. Weiner, *A review of the packing problem*, Commun. Stat., Theory Methods 15 (1986), 2571–2607.
- N. G. de Bruijn, *On the number of uncanceled elements in the sieve of Eratosthenes*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 53 (1950), 803–812.
- N. G. de Bruijn, *The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x + \beta} F(x - 1)$* , Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56 (1953), 449–458, 459–464.
- J. J. A. Beenakker, *The differential-difference equation $\alpha x f'(x) + f(x - 1) = 0$* , Ph.D. thesis, Technische Hogeschool Eindhoven, 1966.
- H. Iwaniec, J. van de Lune, H. J. J. te Riele, *The limits of Buchstab's iteration sieve*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 42 (1980), 409–417.
- M. Pituk, G. Röst, *Large time behavior of a linear delay differential equation with asymptotically small coefficient*, Bound. Value Probl. (2014), paper no. 114.
- I. Györi, M. Pituk, *Asymptotic formulas for a scalar linear delay differential equation*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. (2016), paper no. 72.
- A. Slavík, *De Bruijn's short route to Rényi's parking constant*, Amer. Math. Monthly 131 (2024), 831–841.