

Taková průměrná přednáška: od aritmetického průměru k Birkhoffově ergodické větě

Pavel Ludvík



Přírodovědecká
fakulta

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky, PŘF UP Olomouc

Vzpomínání před mou OSMOU přednáškou na OSMĚ



Rok 2013: Moje první přednáška na OSMA:

Hilbertovy patálie a zkrocení Hamelova monstra.



Katedra
aplikované
matematiky

a Jednota českých matematiků a fyziků
vás srdečně zvou na

OBČASNÝ SEMINÁŘ
Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

Mgr. Pavel Ludvík
KMDG VŠB TU Ostrava

**Hilbertovy patálie
a zkrocení Hamelova monstra**

VŠB-Technická univerzita Ostrava
17. listopadu 15, Ostrava-Poruba

Úterý 16. dubna 2013
12:30
K 304

Rok 2018: Organizace semináře SOVIČKA (Seminář O Výzkumné Iniciativě Členů KAtedry KMDG): Vítek Pískovský.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
vás zve na přednášku

Vít Pískovský: Algebraické struktury kolem nás.

V první části bych rád pohovořil o klasifikaci komutujících cyklů v grupě permutací a vyslovil hypotézu o jejich vztahu k životnímu cyklu cikád, v druhé části bych rád poukázal na využití algebraické struktury v kombinatorické úloze párování týmů na turnaji.

Přednášející je studentem Gymnázia Olgy Havlové v Ostravě-Porubě, účastníkem celostátních kol MO a FO. Svým výzkumem zaujal posluchače na letní škole matematiky v Brémách.

V současnosti se zajímá o studium na University of Cambridge.

Středa 28. března 2018 ve 12:30 v místnosti NK201



Rok 2018: Organizace semináře SOVIČKA (Seminář O Výzkumné Iniciativě Členů KAthedry KMDG): Vítek Pískovský.

▼ Employment (1)

☰ Sort

University of Oxford Mathematical Institute: Oxford, Oxfordshire, GB

2022-10-01 to 2026-10-01 | DPhil student (Mathematical Institute)
Employment

[Show more detail](#)

Source:  Vit Piskovsky

▼ Education and qualifications (2)

☰ Sort

University of Cambridge: Cambridge, GB

2021-10-01 to 2022-07-01 | MMath Mathematics (DAMTP)
Education

[Show more detail](#)

Source:  Vit Piskovsky

Rok 2018: Organizace semináře SOVIČKA (Seminář O Výzkumné Iniciativě Členů KA tedry KMDG): Vítek Pískovský.

nature communications



Article

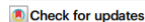
<https://doi.org/10.1038/s41467-023-41196-8>

Bacterial motility can govern the dynamics of antibiotic resistance evolution

Received: 7 November 2022

Accepted: 24 August 2023

Published online: 11 September 2023



Vit Piskovsky^{1,2} & Nuno M. Oliveira^{1,3} ✉

Spatial heterogeneity in antibiotic concentrations is thought to accelerate the evolution of antibiotic resistance, but current theory and experiments have overlooked the effect of cell motility on bacterial adaptation. Here, we study bacterial evolution in antibiotic landscapes with a quantitative model where bacteria evolve under the stochastic processes of proliferation, death, muta-

Rok 2025: Vynikajících mladých českých matematiků
je víc! Např. **Jan Grebík** a Václav Rozhoň.



Rok 2025: Vynikajících mladých českých matematiků je víc! Např. Jan Grebík a Václav Rozhoň.



Volume 2023, Issue 23
December 2023

[< Previous](#) [Next >](#)

JOURNAL ARTICLE

Measurable Tilings by Abelian Group Actions

[Get access >](#)

Jan Grebík, Rachel Greenfeld ✉, Václav Rozhoň, Terence Tao

International Mathematics Research Notices, Volume 2023, Issue 23, December 2023,
Pages 20211–20251, <https://doi.org/10.1093/imrn/rnad048>

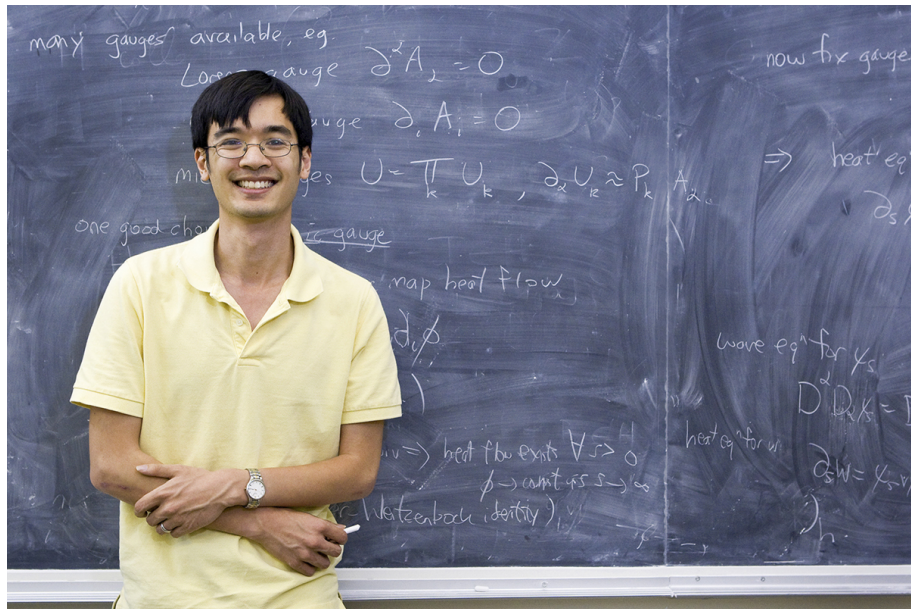
Published: 23 March 2023 **Article history** ▼

“ Cite 🔑 Permissions ➦ Share ▼

Abstract

Let X be a measure space with a measure-preserving action $(g, x) \mapsto g \cdot x$ of an abelian group G . We consider the problem of understanding the structure of measurable tilings $F \odot A = X$ of X by a measurable tile $A \subset X$ translated by a finite set $F \subset G$ of shifts, thus the translates $f \cdot A$, $f \in F$ partition X up to null sets. Adapting arguments from previous literature, we establish a “dilation lemma” that asserts, roughly speaking, that $F \odot A = X$ implies $F^r \odot A = X$ for a large family of integer dilations r , and use this to establish a structure theorem for such tilings analogous to that established recently by the second and fourth authors. As applications of this theorem, we completely classify those random tilings of finitely generated abelian groups that are “factors of iid”, and show that measurable tilings of a torus $\mathbb{T}^d$ can always be continuously (in fact linearly) deformed into a tiling with rational shifts, with particularly

Terence Tao (Fieldsova medaile za rok 2006)



Terence Tao (drbky)

Jeho otec tisku řekl, že při jedné rodinné sešlosti učil tehdy **dvouletý Tao** pětileté děti matematiku a angličtinu. Když se ho otec zeptal odkud že zná čísla a písmena, tak malý Tao odpověděl, že ze *Sesame Street* (pořad pro nejmenší děti).

Terence Tao (drbky)

Zázračné dítě Terence Tao **přeskočil 5 tříd**. Tao projevoval mimořádné matematické schopnosti již od útlého věku a v devíti letech navštěvoval matematické kurzy na univerzitní úrovni. Je jedním z pouhých tří dětí v historii programu Johns Hopkins Study of Exceptional Talent, které v osmi letech dosáhly v matematickém testu SAT skóre 700 bodů nebo více; Tao dosáhl skóre 760 bodů. Julian Stanley, ředitel Studie matematicky vyspělé mládeže, prohlásil, že Tao měl největší matematické schopnosti, které za léta intenzivního hledání našel.

Terence Tao (drbky)

Tao byl dosavadním nejmladším účastníkem Mezinárodní matematické olympiády, poprvé se jí zúčastnil v deseti letech; v letech 1986, 1987 a 1988 získal bronzovou, stříbrnou a zlatou medaili. Tao zůstává **nejmladším držitelem každé ze tří medailí v historii olympiády**, zlatou medaili získal v roce 1988 ve věku 13 let.

Terence Tao (drbky)

V roce 1991 získal v **16 letech bakalářský a magisterský titul** na Flindersově univerzitě pod vedením Gartha Gaudryho. V letech 1992 až 1996 byl Tao postgraduálním studentem na Princetonské univerzitě pod vedením Eliase Steina a ve svých **21 letech získal doktorát**. V roce 1996 nastoupil na fakultu Kalifornské univerzity v Los Angeles. V roce 1999, kdy mu bylo **24 let, byl na UCLA povýšen na řádného profesora** a zůstává nejmladší osobou, která kdy byla touto institucí jmenována do této hodnosti.

Aritmetický průměr

Dotaz: „Co mají společného aritmetický průměr a demokracie?“

Dotaz: „Co mají společného aritmetický průměr a demokracie?“

Odpověď: „Ani jeden nedává ideální výsledek, ale je těžké najít něco lepšího.“

Dotaz: „Co mají společného aritmetický průměr a demokracie?“

Odpověď: „Ani jeden nedává ideální výsledek, ale je těžké najít něco lepšího.“

Andrej N. Kolmogorov (1903–1987)

„Každý seriózní důkaz v matematice se nakonec redukuje na důkaz nerovnosti.“

Dotaz: „Co mají společného aritmetický průměr a demokracie?“

Odpověď: „Ani jeden nedává ideální výsledek, ale je těžké najít něco lepšího.“

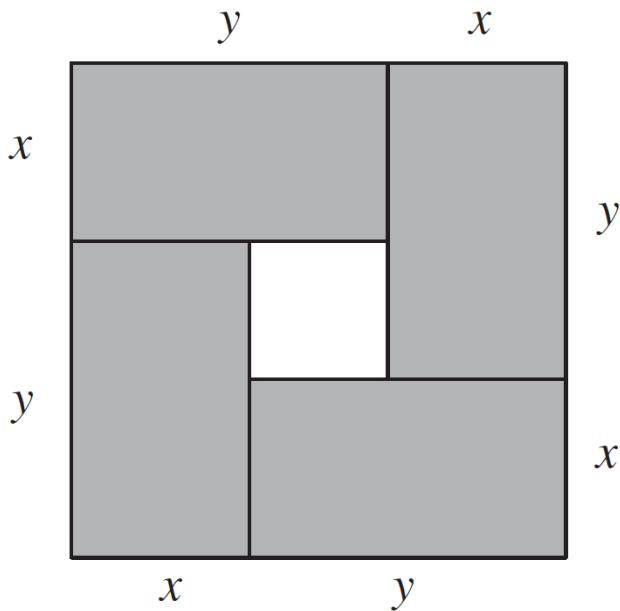
Andrej N. Kolmogorov (1903–1987)

„Každý seriózní důkaz v matematice se nakonec redukuje na důkaz nerovnosti.“

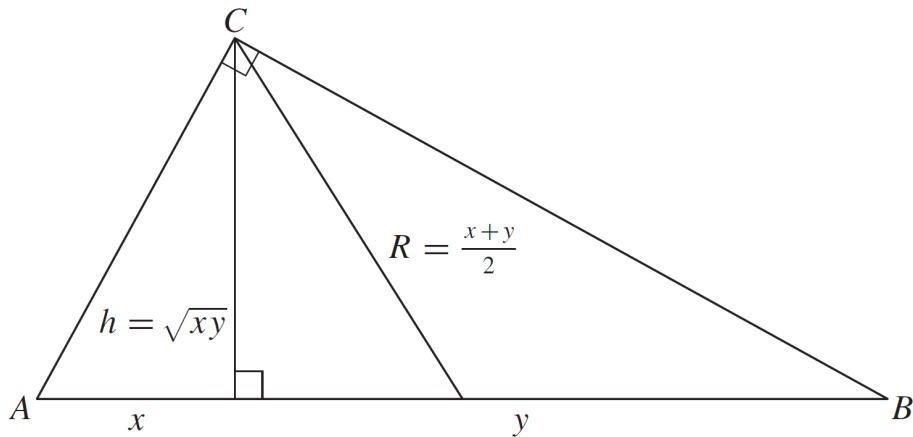
AG-nerovnost : nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$\sqrt[N]{x_1 \cdot \dots \cdot x_N} \leq \frac{x_1 + \dots + x_N}{N}$$

Obrázkové důkazy $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$



Obrázkové důkazy $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$



Grandiho řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 \dots$$

Grandiho řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 \dots$$

Analýza částečných součtů řady

❶ $S_{2k+1} = 1,$

Grandiho řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 \dots$$

Analýza částečných součtů řady

- 1 $S_{2k+1} = 1,$
- 2 $S_{2k} = 0,$

Grandiho řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 \dots$$

Analýza částečných součtů řady

- ❶ $S_{2k+1} = 1,$
- ❷ $S_{2k} = 0,$
- ❸ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ **neexistuje.**

Leonard Euler a Grandiho řada

INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS

CUM EIUS VSU
IN ANALYSI FINITORUM
AC
DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE
LEONHARDO EULERO
ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP. ET ACADEMIARUM
REGIARUM PARISINAE ET LONDINENSIS
SOCIO.



Leonard Euler a Grandiho řada

9. Vsum igitur huius vltimae transmutationis, qua summus $x = 1$, in aliquot exemplis ostendamus, ac primo quidem in eiusmodi, quibus vera summa finite exprimi potest. Tales sunt series diuergentes, quibus numeri a, b, c, d , &c. tandem ad differentias constantes deducant, quarum summae, cum recepto huius vocis significatu, proprie non exhiberi queant, vocem summae hic eo sensu, quem supra tribuimus, accipimus, ita vt denotet valorem expressionis finitae, ex cuius evolutione proposita series nascatur.

I. Sit igitur proposita haec series Leibnitzii :

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.$$

in qua cum omnes termini sint aequales, fient omnes differentiae $= 0$, ideoque ob $a = 1$, erit $S = \frac{1}{2}$.

II. Sit proposita ista series :

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \&c.$$

$$\text{Diff. } 1 = 1, 1, 1, 1, 1, \&c,$$

$$\text{Cum ergo sit } a = 1, \Delta a = 1, \text{ erit } S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

III. Sit proposita haec series :

Cesàrova sčítací metoda

Definice

$$(\text{Cesàrova suma řady}) - \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_N}{N},$$

Cesàrova sčítací metoda

Definice

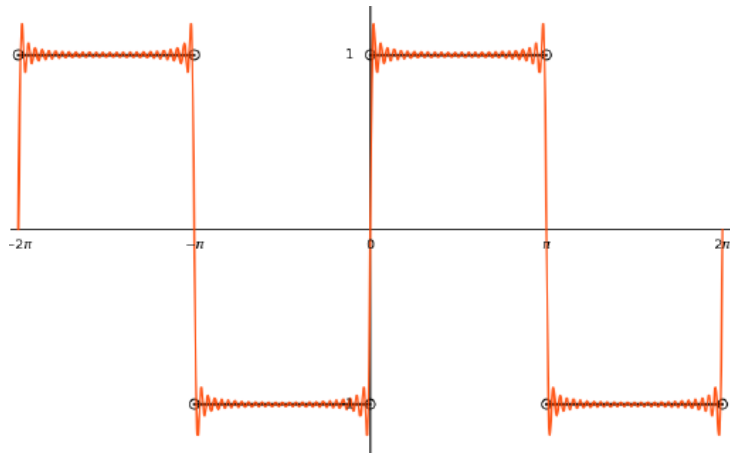
$$(\text{Cesàrova suma řady}) - \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_N}{N},$$

Sečtení Grandiho řady

$$\begin{aligned} (\text{Cesàrova suma řady}) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_N}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 + 0 + \cdots + (0 \text{ nebo } 1)}{N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{n}{2}}{N} \text{ nebo } \frac{\frac{N+1}{2}}{N} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

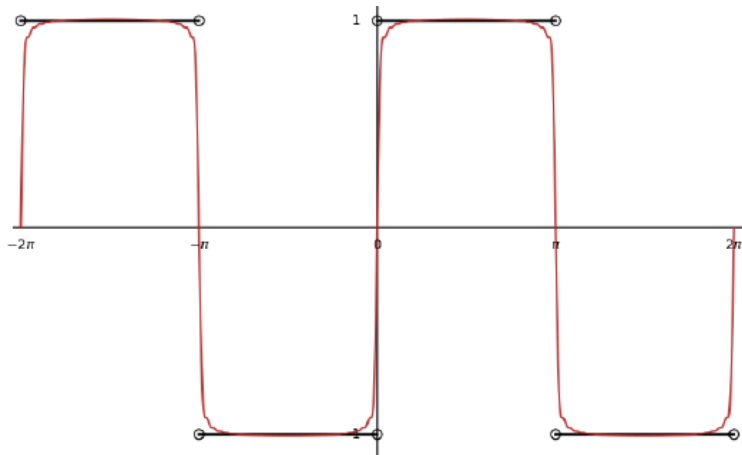
Cesàrova sčítací metoda a Fourirovy řady

(Obrázky vyrobil Ondřej Maša pro ilustraci **Gibbsova jevu**.)



Cesàrova sčítací metoda a Fourirovy řady

(Obrázky vyrobil Ondřej Maša pro ilustraci **Gibbsova jevu**.)



Slabý a silný zákon velkých čísel

Zákon velkých čísel je jedním z nejdůležitějších výsledků v teorii pravděpodobnosti, který popisuje chování průměrů náhodných veličin při velkém počtu pozorování. Tento zákon se dělí na dvě hlavní verze:

- 1 *slabý zákon velkých čísel* a
- 2 *silný zákon velkých čísel*.

Slabý zákon velkých čísel

Slabý zákon velkých čísel říká, že průměr náhodných veličin konverguje v pravděpodobnosti k jejich střední hodnotě, když počet pozorování roste do nekonečna. Formálně, pokud máme nezávislé a identicky rozdělené náhodné veličiny $X_1, X_2, X_3, \dots$, s očekávanou hodnotou $\mathbb{E}X$ a konečnou variancí $\text{Var}(X)$, potom průměr těchto veličin $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ konverguje k $\mathbb{E}X$ v pravděpodobnosti:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}X \quad \text{jak } n \rightarrow \infty$$

Tato konvergence znamená, že pro libovolně malé $\epsilon > 0$ máme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}X| \geq \epsilon) = 0.$$

Slabý zákon velkých čísel

Slabý zákon velkých čísel říká, že průměr náhodných veličin konverguje v pravděpodobnosti k jejich střední hodnotě, když počet pozorování roste do nekonečna. Formálně, pokud máme nezávislé a identicky rozdělené náhodné veličiny $X_1, X_2, X_3, \dots$, s očekávanou hodnotou $\mathbb{E}X$ a konečnou variancí $\text{Var}(X)$, potom průměr těchto veličin $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ konverguje k $\mathbb{E}X$ v pravděpodobnosti:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}X \quad \text{jak} \quad n \rightarrow \infty$$

Tato konvergence znamená, že pro libovolně malé $\epsilon > 0$ máme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mathbb{E}X| \geq \epsilon) = 0.$$

Důkaz pomocí Čebyševovy nerovnosti.

Silný zákon velkých čísel

Silný zákon velkých čísel je silnější verzí slabého zákona, která tvrdí, že průměr náhodných veličin konverguje k očekávané hodnotě *skoro jistě*, což znamená, že pravděpodobnost konvergence je rovna 1. Formálně:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}X \quad \text{jak } n \rightarrow \infty,$$

kde $\xrightarrow{a.s.}$ označuje konvergenci *skoro jistě* (anglicky almost surely), což znamená, že:

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X}_n = \mathbb{E}X \right) = 1.$$

Silný zákon velkých čísel

Silný zákon velkých čísel je silnější verzí slabého zákona, která tvrdí, že průměr náhodných veličin konverguje k očekávané hodnotě *skoro jistě*, což znamená, že pravděpodobnost konvergence je rovna 1. Formálně:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}X \quad \text{jak } n \rightarrow \infty,$$

kde $\xrightarrow{a.s.}$ označuje konvergenci *skoro jistě* (anglicky almost surely), což znamená, že:

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X}_n = \mathbb{E}X \right) = 1.$$

Důkaz je těžký.

Rozdíl mezi slabým a silným zákonem

Hlavní rozdíl mezi slabým a silným zákonem velkých čísel spočívá v **povaze konvergence**.

Příklad

Představme si náhodnou proměnnou X , která je výsledkem hodu spravedlivou mincí (hodnoty 1 pro hlavu a 0 pro orel). Očekávaná hodnota této náhodné veličiny je $\mathbb{E}X = 0.5$. Pokud provedeme velké množství hodů, průměr z těchto hodů bude podle slabého i silného zákona konvergovat k 0.5. Nicméně, slabý zákon říká, že průměr bude blízko 0.5 s vysokou pravděpodobností pro velká n , zatímco silný zákon zaručuje, že průměr se bude rovnat 0.5 téměř jistě, jak $n \rightarrow \infty$.

Dynamický systém

Dynamickým systémem myslíme dvojici:

- 1 Nezprázdný prostor X ,
- 2 transformace $T : X \rightarrow X$.

Dynamický systém

Dynamickým systémem myslíme dvojici:

- 1 Nezprázdný prostor X ,
- 2 transformace $T : X \rightarrow X$.

Abychom si mohli pokládat (a zodpovídat) všemožné otázky, je třeba uvažovat dodatečnou strukturu. Nejoblíbenější jsou:

Topologický dynamický systém $(X, \mathcal{F}, T)$, kde $(X, \mathcal{F})$ je kompaktní metrizovatelný topologický prostor a T je homeomorfismus.

Dynamický systém

Dynamickým systémem myslíme dvojici:

- 1 Nezprázdňý prostor X ,
- 2 transformace $T : X \rightarrow X$.

Abychom si mohli pokládat (a zodpovídat) všemožné otázky, je třeba uvažovat dodatečnou strukturu. Nejoblíbenější jsou:

Topologický dynamický systém $(X, \mathcal{F}, T)$, kde $(X, \mathcal{F})$ je kompaktní metrizovatelný topologický prostor a T je homeomorfismus.

Míru-zachovávající dynamický systém $(X, \mathcal{S}, \mu, T)$, kde $(X, \mathcal{S}, \mu)$ je pravděpodobnostní prostor a T, T^{-1} jsou měřitelné, přičemž $\mu(T(E)) = \mu(E)$ pro každou měřitelnou $E \in \mathcal{S}$.

Pak říkáme, že T zachovává μ (nebo že μ je T -invariantní).

Aritmetický průměr a míru-zachovávající dynamický systém

Krylovova–Bogolyubovova věta (1937)

Pokud je X kompaktní metrizovatelný topologický prostor, tak pro každou spojitou transformaci $T : X \rightarrow X$ existuje T -invariantní míra.

Aritmetický průměr a míru-zachovávající dynamický systém

Krylovova–Bogolyubovova věta (1937)

Pokud je X kompaktní metrizovatelný topologický prostor, tak pro každou spojitou transformaci $T : X \rightarrow X$ existuje T -invariantní míra.

Důkaz (postrčení).

Vezmi libovolný bod $x_0 \in X$ a uvaž posloupnost měr

$$\mu_N := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta_{T_{x_0}^n},$$

kde δ_x je Diracova míra v x .

Aritmetický průměr a míru-zachovávající dynamický systém

Krylovova–Bogolyubovova věta (1937)

Pokud je X kompaktní metrizovatelný topologický prostor, tak pro každou spojitou transformaci $T : X \rightarrow X$ existuje T -invariantní míra.

Důkaz (postrčení).

Vezmi libovolný bod $x_0 \in X$ a uvaž posloupnost měr

$$\mu_N := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta_{T^n x_0},$$

kde δ_x je Diracova míra v x .

Hromadný bod posloupnosti $\{\mu_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ je hledanou T -invariantní mírou.

Boltzmanova ergodická hypotéza

Vyslovena Ludwigem Boltzmanem v roce 1868

Ve fyzice a termodynamice říká **ergodická hypotéza**, že během dostatečně dlouhého časového období je doba, kterou systém stráví v určité oblasti fázového prostoru mikrostavů se stejnou energií, úměrná velikosti této části fázového prostoru.

Speciálně tedy, že **všechny přístupné mikrostavy jsou z dlouhodobého hlediska stejně pravděpodobné.**

Boltzmanova ergodická hypotéza

Vyslovena Ludwigem Boltzmanem v roce 1868

Ve fyzice a termodynamice říká **ergodická hypotéza**, že během dostatečně dlouhého časového období je doba, kterou systém stráví v určité oblasti fázového prostoru mikrostavů se stejnou energií, úměrná velikosti této části fázového prostoru.

Speciálně tedy, že **všechny přístupné mikrostavy jsou z dlouhodobého hlediska stejně pravděpodobné.**

Boltzman hypotézu použil k důkazu své *H*-věty, která byla jádrem jeho práce.

Poincarého věta o rekurenci

Volná formulace

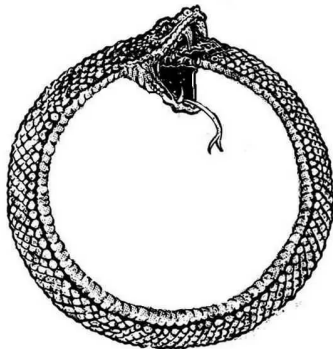
Určité dynamické systémy se v konečném čase vždy vrátí do počátečního stavu.

Poincarého věta o rekurenci

Volná formulace

Určité dynamické systémy se v konečném čase vždy vrátí do počátečního stavu.

HÉRAKLEITOS, NIETZSCHE: Myšlenka věčného návratu



Poincarého věta o rekurenci

Volná formulace

Určité dynamické systémy se v konečném čase vždy vrátí do počátečního stavu.

Poincarého věta o rekurenci

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu, T)$ je míru-zachovávající dynamický systém a $E \in \mathcal{S}$ such that $\mu(E) > 0$. Pak

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(E \cap T^n E) \geq \mu(E)^2.$$

Speciálně pak $E \cap T^n E$ má kladnou míru pro nekonečně mnoho n .

Chceme: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(E \cap T^n E) \geq \mu(E)^2$

DŮKAZ (T. Tao).

- Nahlédneme, že $\mu(T^n E) = \mu(E)$ a $\int_X \sum_{n=1}^N 1_{T^n E} d\mu = N\mu(E)$.

Chceme: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(E \cap T^n E) \geq \mu(E)^2$

DŮKAZ (T. Tao).

- Nahlédneme, že $\mu(T^n E) = \mu(E)$ a $\int_X \sum_{n=1}^N 1_{T^n E} d\mu = N\mu(E)$.
- Po snadné úpravě použijeme Cauchyho-Schwarzovu nerovnost

$$\begin{aligned} \int_X \left(\sum_{n=1}^N 1_{T^n E} \right)^2 d\mu &\geq \int_X \left(\sum_{n=1}^N 1_{T^n E} \right)^2 d\mu \cdot \mu\left(\bigcup_{n=1}^N T^n E \right) \\ &= \int_X \left(\sum_{n=1}^N 1_{T^n E} \right)^2 d\mu \cdot \int_X (1_{\bigcup_{n=1}^N T^n E})^2 d\mu \\ &\geq \left(\int_X \left(\sum_{n=1}^N 1_{T^n E} \right) \cdot 1_{\bigcup_{n=1}^N T^n E} d\mu \right)^2 = \left(\int_X \sum_{n=1}^N 1_{T^n E} d\mu \right)^2 \\ &= N^2 \mu(E)^2. \end{aligned}$$

Chceme: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(E \cap T^n E) \geq \mu(E)^2$

- Levou stranu upravíme

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \mu(T^n E \cap T^m E)$$



Chceme: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(E \cap T^n E) \geq \mu(E)^2$

- Levou stranu upravíme a díky $\mu(T^n E \cap T^m E) = \mu(E \cap T^{m-n})$ asymptoticky odhadneme

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \mu(T^n E \cap T^m E) \leq (\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(E \cap T^n E) + o(1)) N^2$$



Chceme: $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(E \cap T^n E) \geq \mu(E)^2$

- Levou stranu upravíme a díky $\mu(T^n E \cap T^m E) = \mu(E \cap T^{m-n} E)$ asymptoticky odhadneme

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \mu(T^n E \cap T^m E) \leq (\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(E \cap T^n E) + o(1)) N^2$$

- Dohromady, pošleme-li $N \rightarrow \infty$,

$$(\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(E \cap T^n E) + o(1)) N^2 \geq N^2 \mu(E)^2,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(E \cap T^n E) + o(1) \geq \mu(E)^2,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(E \cap T^n E) \geq \mu(E)^2.$$

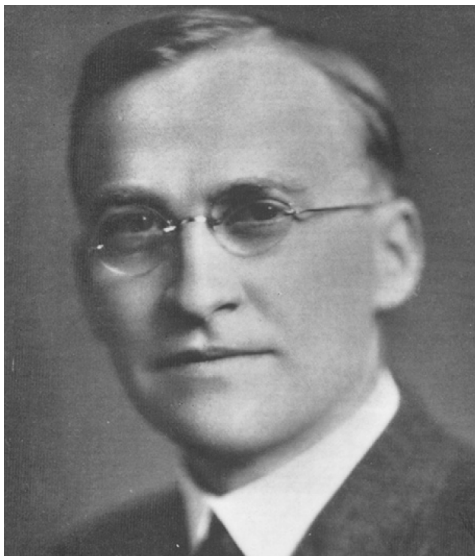


Poznámky

- ① Odhad pomocí $\mu(E)^2$ nelze obecně vylepšit.
- ② Místo Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti můžeme použít přihrádkový princip, ale dostaneme jen kvalitativní výsledek (nikoli kvalitativní odhad).

Ergodická kontroverze:

J. von Neumann versus G.D. Birkhoff



Ergodická kontroverze:

J. von Neumann versus G.D. Birkhoff



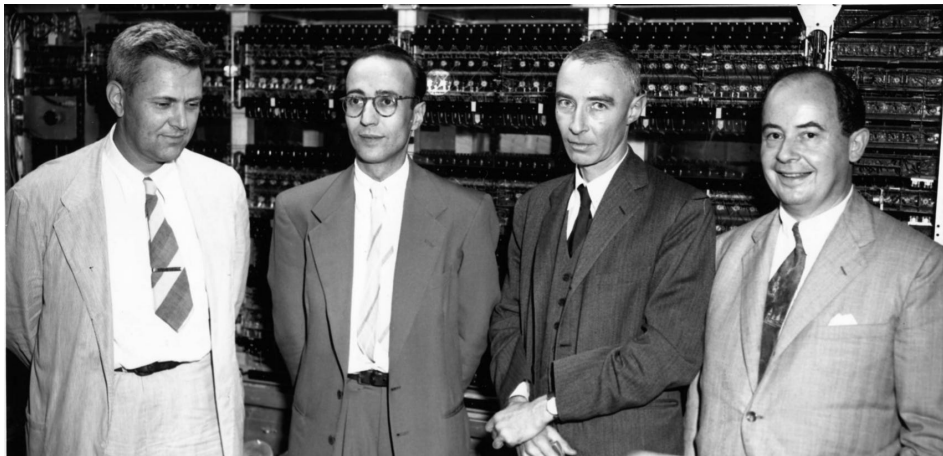
Ergodická kontroverze:

J. von Neumann versus G.D. Birkhoff



Ergodická kontroverze:

J. von Neumann versus G.D. Birkhoff



Ergodická kontroverze:

J. von Neumann versus G.D. Birkhoff



Ergodická kontroverze:

J. von Neumann versus G.D. Birkhoff

Historia Mathematica **29** (2002), 138–156

doi:10.1006/hmat.2001.2338, available online at <http://www.idealibrary.com> on 

George David Birkhoff and John von Neumann: A Question of Priority and the Ergodic Theorems, 1931–1932

Joseph D. Zund

New Mexico State University, Las Cruces, New Mexico 88003

Based on a recently discovered letter of John von Neumann to his friend Howard Percy Robertson, the present paper discusses in detail the priority of the discovery and publication of the ergodic theorems by George David Birkhoff and von Neumann in 1931/1932. © 2002 Elsevier Science (USA)

Kontroverze v kostce

- 1 Von Neumann dokázal ergodickou větu o střední hodnotě v srpnu/září roku 1931 (motivací mu byly také rozhovory s Koopmanem a Weilem).

Kontroverze v kostce

- 1 Von Neumann dokázal ergodickou větu o střední hodnotě v srpnu/září roku 1931 (motivací mu byly také rozhovory s Koopmanem a Weilem).
- 2 Von Neumann Birkhoffovi svůj důkaz ukázal a ten v listopadu/prosinci dokázal bodovou ergodickou větu (silnější větu a jinými prostředky).

Kontroverze v kostce

- 1 Von Neumann dokázal ergodickou větu o střední hodnotě v srpnu/září roku 1931 (motivací mu byly také rozhovory s Koopmanem a Weilem).
- 2 Von Neumann Birkhoffovi svůj důkaz ukázal a ten v listopadu/prosinci dokázal bodovou ergodickou větu (silnější větu a jinými prostředky).
- 3 Von Neumannův článek měl vyjít v lednu roku 1932 v časopise *Proc. Nat. Ac.*, kde měl Birkhoff velký vliv. Von Neumann požádal Birkhoffa, aby svůj článek vydal až po něm. To Birkhoff odmítl s tím, že nevidí důvod. Slíbil ale, že ve svém článku zdůrazní von Neumannovu prioritu.

Kontroverze v kostce

- 1 Von Neumann dokázal ergodickou větu o střední hodnotě v srpnu/září roku 1931 (motivací mu byly také rozhovory s Koopmanem a Weilem).
- 2 Von Neumann Birkhoffovi svůj důkaz ukázal a ten v listopadu/prosinci dokázal bodovou ergodickou větu (silnější větu a jinými prostředky).
- 3 Von Neumannův článek měl vyjít v lednu roku 1932 v časopise *Proc. Nat. Ac.*, kde měl Birkhoff velký vliv. Von Neumann požádal Birkhoffa, aby svůj článek vydal až po něm. To Birkhoff odmítl s tím, že nevidí důvod. Slíbil ale, že ve svém článku zdůrazní von Neumannovu prioritu.
- 4 Birkhoff svůj článek protlačil už do prosincového čísla 1931 *Proc. Nat. Ac.* a o von Neumannovi se nezmínil.

Kontroverze v kostce

- 1 Von Neumann dokázal ergodickou větu o střední hodnotě v srpnu/září roku 1931 (motivací mu byly také rozhovory s Koopmanem a Weilem).
- 2 Von Neumann Birkhoffovi svůj důkaz ukázal a ten v listopadu/prosinci dokázal bodovou ergodickou větu (silnější větu a jinými prostředky).
- 3 Von Neumannův článek měl vyjít v lednu roku 1932 v časopise *Proc. Nat. Ac.*, kde měl Birkhoff velký vliv. Von Neumann požádal Birkhoffa, aby svůj článek vydal až po něm. To Birkhoff odmítl s tím, že nevidí důvod. Slíbil ale, že ve svém článku zdůrazní von Neumannovu prioritu.
- 4 Birkhoff svůj článek protlačil už do prosincového čísla 1931 *Proc. Nat. Ac.* a o von Neumannovi se nezmínil.
- 5 Birkhoffovi bylo tehdy 47 let a byl na vrcholu sil. Von Neumann měl 28 a byl to jeho první anglicky psaný článek.

Střední ergodická věta

Von Neumannova Střední ergodická věta

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu, T)$ je míru-zachovávající dynamický systém a $f \in L^2(X)$.

Pak $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n$ konverguje v normě $L^2(X)$ k $\pi(f)$,

kde $\pi : L^2(X) \rightarrow L^2(X)^T$ je ortogonální projekce na prostor $\{g \in L^2(X) : g \circ T = g\}$ všech T -invariantních funkcí v $L^2(X)$.

Střední ergodická věta

Von Neumannova Střední ergodická věta

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu, T)$ je míru-zachovávající dynamický systém a $f \in L^2(X)$.

Pak $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n$ konverguje v normě $L^2(X)$ k $\pi(f)$,

kde $\pi : L^2(X) \rightarrow L^2(X)^T$ je ortogonální projekce na prostor $\{g \in L^2(X) : g \circ T = g\}$ všech T -invariantních funkcí v $L^2(X)$.

Pokud máme $(X, \mathcal{S}, \mu, T)$, kde X je konečná množina a μ je rovnoměrně rozdělená pravděpodobnost, pak T je permutace na X . Každou permutaci můžeme rozložit na disjunktní cykly a T -invariantní funkce jsou právě ty, které jsou na každém z těchto cyklů konstantní. Zobrazení $f \rightarrow \pi(f)$ vezme funkci $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ a nahradí ji průměrnou hodnotou v rámci příslušného cyklu.

Maximální ergodická věta

Maximální ergodická věta

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu, T)$ je míru-zachovávající dynamický systém. Pak pro každou funkci $f \in L^1(X)$ a $\lambda > 0$ platí

$$\mu(\{x \in X : \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f(T^n(x))| > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1(X)}.$$

Maximální ergodická věta

Maximální ergodická věta

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu, T)$ je míru-zachovávající dynamický systém. Pak pro každou funkci $f \in L^1(X)$ a $\lambda > 0$ platí

$$\mu(\{x \in X : \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f(T^n(x))| > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1(X)}.$$

Důsledek

Pro $T = id$ dostáváme Čebyševovu nerovnost:

$$\begin{aligned} & \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \\ &= \mu(\{x \in X : \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1(X)}. \end{aligned}$$

Bodová ergodická věta

Birkhoffova bodová ergodická věta

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu, T)$ je míru-zachovávající dynamický systém a $f \in L^1(X)$. Pak

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x)) \rightarrow \mathbb{E}(f|\mathcal{S}^T)(x)$$

pro μ -skoro všechna $x \in X$.

Birkhoffova bodová ergodická věta

Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu, T)$ je míru-zachovávající dynamický systém a $f \in L^1(X)$. Pak

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x)) \rightarrow \mathbb{E}(f|\mathcal{S}^T)(x)$$

pro μ -skoro všechna $x \in X$.

Objekt $\mathbb{E}(f|\mathcal{S}^T)$ je podmíněná střední hodnota f vzhledem k σ -algebře T invariantních množin $\mathcal{S}^T = \{E \in \mathcal{S} : TE = E \text{ s.v.}\}$, kde $\mathbb{E}(f|\mathcal{S}^T) \in L^1(X, \mathcal{S}^T, \mu)$ je jednoznačně určená funkce splňující

$$\int_E \mathbb{E}(f|\mathcal{S}^T) d\mu = \int_E f d\mu,$$

pro každou $E \in \mathcal{S}^T$.

Co je to vlastně (všude zmiňovaná) ergodicita?

Je to určitá vlastnost minimality a neredukovatelnosti systému.

Co je to vlastně (všude zmiňovaná) ergodicita?

Následující podmínky jsou ekvivalentní

- 1 Pokud je $E \in \mathcal{S}$ invariantní (tj. $TE = E$), pak je buď plné nebo nulové míry (tj. $\mu(E) = 1$, nebo $\mu(E) = 0$).

Co je to vlastně (všude zmiňovaná) ergodicita?

Následující podmínky jsou ekvivalentní

- 1 Pokud je $E \in \mathcal{S}$ invariantní (tj. $TE = E$), pak je buď plné nebo nulové míry (tj. $\mu(E) = 1$, nebo $\mu(E) = 0$).
- 2 Pro každé $1 < p < \infty$ a $f \in L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n \rightarrow \int_X f \, d\mu \text{ v normě } L^p.$$

Co je to vlastně (všude zmiňovaná) ergodicita?

Následující podmínky jsou ekvivalentní

- 1 Pokud je $E \in \mathcal{S}$ invariantní (tj. $TE = E$), pak je buď plné nebo nulové míry (tj. $\mu(E) = 1$, nebo $\mu(E) = 0$).
- 2 Pro každé $1 < p < \infty$ a $f \in L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n \rightarrow \int_X f \, d\mu \text{ v normě } L^p.$$

- 3 Pro každé $f \in L^1(X, \mathcal{S}, \mu)$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n \rightarrow \int_X f \, d\mu \text{ } \mu\text{-skoro všude.}$$

Co je to vlastně (všude zmiňovaná) ergodicita?

Následující podmínky jsou ekvivalentní

- 1 Pokud je $E \in \mathcal{S}$ invariantní (tj. $TE = E$), pak je buď plné nebo nulové míry (tj. $\mu(E) = 1$, nebo $\mu(E) = 0$).
- 2 Pro každé $1 < p < \infty$ a $f \in L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n \rightarrow \int_X f \, d\mu \text{ v normě } L^p.$$

- 3 Pro každé $f \in L^1(X, \mathcal{S}, \mu)$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n \rightarrow \int_X f \, d\mu \text{ } \mu\text{-skoro všude.}$$

Pro ergodický systém platí: $\mathbb{E}(f|\mathcal{S}^T) = \mathbb{E}(f|\{\emptyset, X\}) = \mathbb{E}f$.

Normální čísla

Definice

Číslo

$$x = \frac{a_1(x)}{m} + \frac{a_2(x)}{m^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{m^n} = [a_1, a_2, \dots] \in [0, 1],$$

kde $a_i(x) \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, je *normální* v bázi m , pokud pro každý řetězec $(b_1, b_2, \dots, b_k) \in \{0, 1, \dots, m-1\}^k$ platí

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Card}\{i \in \{1, \dots, n\} : (a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+k}) = (b_1, b_2, \dots, b_k)\} \\ &= \frac{1}{m^k}. \end{aligned}$$

Borelova věta o normálních číslech

Borelova věta o normálních číslech

(Borel 1909, Riesz 1945 pomocí ergodické věty)

Nechť $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Pak jsou skoro všechna čísla $z \in [0, 1]$ normální v bázi m .

Borelova věta o normálních číslech

Borelova věta o normálních číslech

(Borel 1909, Riesz 1945 pomocí ergodické věty)

Nechť $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Pak jsou skoro všechna čísla z $[0, 1]$ normální v bázi m .

DŮKAZ. Využije se toho, že zobrazení $T_m : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definované jako

$$T_m(x) := mx - [mx]$$

je ergodické.

Gelfandův problém

Věta

Nechť $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$, pak

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Card}\{n \in \{1, \dots, N\} : \text{první cifra } 2^n \text{ je } k\} = \log_{10} \left(\frac{k+1}{k} \right).$$

Gelfandův problém

Věta

Nechť $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$, pak

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Card}\{n \in \{1, \dots, N\} : \text{první cifra } 2^n \text{ je } k\} = \log_{10} \left(\frac{k+1}{k} \right).$$

DŮKAZ. Využije se toho, že rotace $R_\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definovaná jako

$$R_\alpha(x) = \alpha + x \bmod 1$$

je ergodická, pokud α je iracionální.

Gelfandův problém

Věta

Nechť $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$, pak

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Card}\{n \in \{1, \dots, N\} : \text{první cifra } 2^n \text{ je } k\} = \log_{10} \left(\frac{k+1}{k} \right).$$

DŮKAZ. Využije se toho, že rotace $R_\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definovaná jako

$$R_\alpha(x) = \alpha + x \bmod 1$$

je ergodická, pokud α je iracionální.

Poznámka

Výsledek samozřejmě neříká nic jiného, že mocniny dvojky splňují Benfordův zákon!

Silný zákon velkých čísel REVISED

- 1 Mějme příslušnou posloupnost náhodných veličin $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
- 2 Volíme $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a pomocné zobrazení $\pi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$\pi(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots).$$

- 3 Definujme pravděpodobnostní míru μ na X jako $\mu := \pi_*\mathbb{P}$.
- 4 Definujeme **transformaci** $T : X \rightarrow X$ jako

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

- 5 a **funkci** $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2, \dots) = x_1.$$

- 6 Pak (X, μ, T) je **ergodický systém** a pro $x = \pi(\omega) \in X$ platí

$$X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_N(\omega) = f(x) + f(T(x)) + \dots + f(T^{N-1}(x)).$$

Vrcholné číslo dnešního programu!

Vrcholné číslo dnešního programu!

DISINTEGRATION THEOREM & ERGODIC DECOMPOSITION

Pro každou T -invariantní míru μ existuje MÍRA NA MÍRÁCH(!)
pomocí níž se dá tato míra zapsat jako „součet“ (resp. integrál)
ergodických měr.

Vrcholné číslo dnešního programu!

DISINTEGRATION THEOREM & ERGODIC DECOMPOSITION

Pro každou T -invariantní míru μ existuje MÍRA NA MÍRÁCH(!)
pomocí níž se dá tato míra zapsat jako „součet“ (resp. integrál)
ergodických měr.

AUDIO KVÍZ: JAKÝ NÁZEV SKLADBY A INTERPRET?

Vrcholné číslo dnešního programu!

DISINTEGRATION THEOREM & ERGODIC DECOMPOSITION

Pro každou T -invariantní míru μ existuje MÍRA NA MÍRÁCH(!)
pomocí níž se dá tato míra zapsat jako „součet“ (resp. integrál)
ergodických měr.

AUDIO KVÍZ: JAKÝ NÁZEV SKLADBY A INTERPRET?

THE CURE: DISINTEGRATION

Děkuji za pozornost.