Klasické úlohy řecké matematiky
Česká matematická společnost

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

OSMA
Ostrava, 3.12. 2025

Česká matematická společnost

Pražská vědecká tradice

V Praze po celý život



Thaddaus Hagecius ab Hagez (1525–1600)

V Praze 1599–1601



Tycho Brahe (1546–1601)

V Praze 1600–1611



Johannes Kepler (1571–1630)

V Praze po celý život



Bernard Bolzano (1781–1848)

V Praze 1835–1847



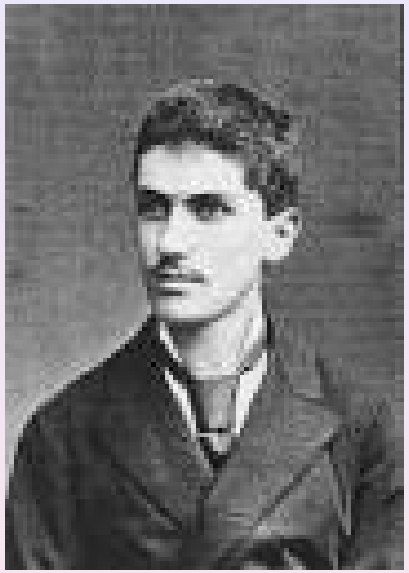
Christian Doppler (1803–1853)

V Praze 1867–1895



Ernst Mach (1838–1916)

V Praze 1880–1929

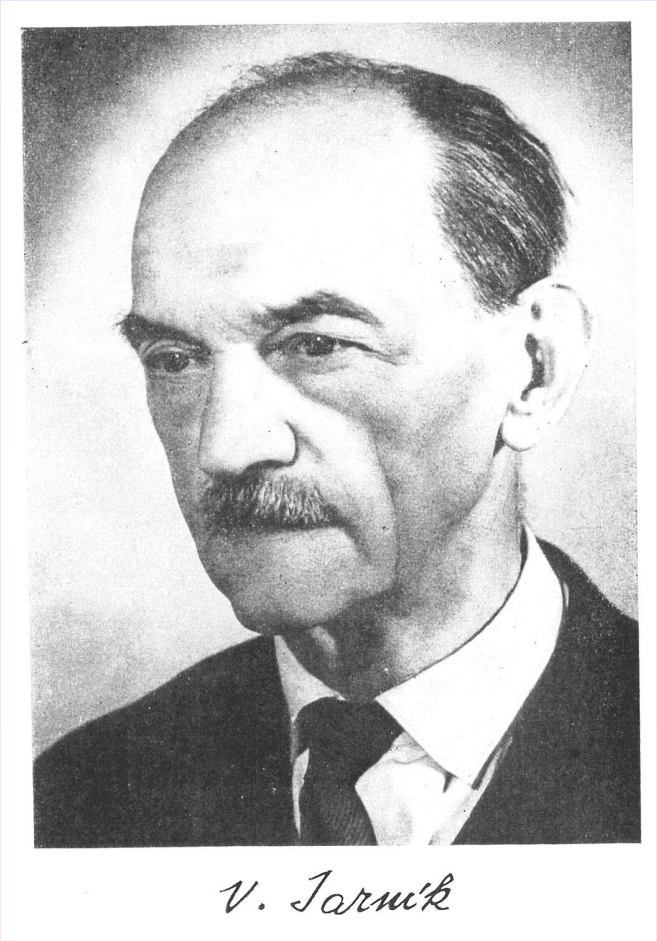


Georg Alexander Pick (1859–1942)

V Praze 1911–1912



Mileva Marić (1875–1948) a Albert Einstein (1879–1955)



Vojtěch Jarník (1897–1970)



Eduard Čech (1893–1960)

Spolek pro volné přednášky

Založení spolku

Oficiálně: *Verein für freie Vorträge aus der Mathematik und Physik*.

Založili: Gabriel Blažek, Josef Finger, Josef Laun and Josef Vaňaus (studenti Filosofické fakulty).

Rakouské úřady povolily *8. března 1862* (akademický charakter, přímý patronát Filosofické fakulty).

Členy se mohli stát pouze studenti matematiky či fyziky denního studia.

Volené funkce: předseda, místopředseda a tajemník.

První kroky

Ustavující schůze 28. března 1862.

Přijato devět nových členů (nutno správně vyřešit příklady).

Aktivity

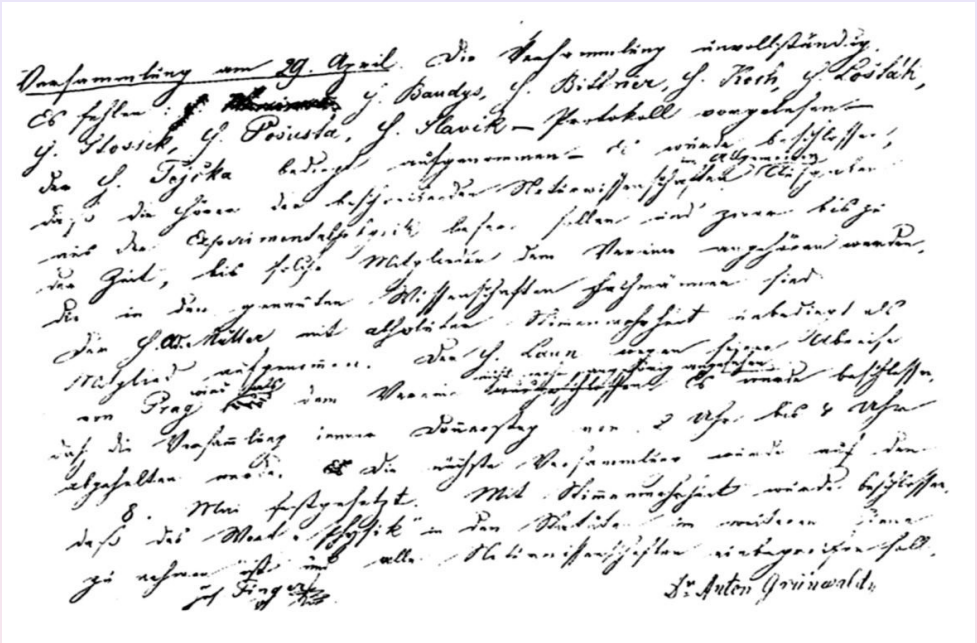
Pořádání přednášek, podpora vědecké činnosti, všestranné zlepšování vzdělanosti v oboru matematiky a fysiky, příprava mladých středoškolských učitelů.

Sídlo v Praze. Schůze 1× týdně.

Program schůzí: pravidelné přednášky, komentáře k proběhlým přednáškám, diskuse k návrhům na vědeckovýzkumné aktivity, přijímání nových členů a vyřazování pasivních členů.

Přednášky v němčině, od 1864 převážně v češtině.

Zápis



Zápis z první schůze Spolku pro volné přednášky z mathematiky a fysiky konané 29. dubna 1862.

Co dělali jinde v roce 1862

- USA: občanská válka, bitva u Shiloh,
- Polsko: povstání proti ruské nadvládě,
- Francie: vyšli Bídníci (Victor Hugo), intervence Mexiko
- Prusko: Otto von Bismarck se stal prvním ministrem,
- narození:
  - David Hilbert
  - Emil Kolben
  - Claude Debussy
  - Gustav Klimt

Porovnejte

- Royal Dutch Mathematical Society 1778
- *JČMF 1862*
- London Mathematical Society 1865
- Moscow Mathematical Society 1867
- French Mathematical Society 1872
- Danish Mathematical Society 1873
- American Mathematical Society 1888
- St. Petersburgh Mathematical Society 1890
- German Mathematical Society 1890
- János Bólyai Mathematical Society 1891
- Austrian Mathematical Society 1903
- Indian Mathematical Society 1907
- Polish Mathematical Society 1919
- Chinese Mathematical Society 1935
- Canadian Mathematical Society 1945

Diluviální věk

1863: *Jakub Filip Kulik* (1793–1863) věnoval část knihovny.

1868: *Ernst Mach* nabídl pracovnu a kabinet.

1869: 69 členů. Rakouské *c.k. policejní ředitelství* potvrdilo stanovy. Název změněn na *Jednotu českých mathematiků*.

6.-8. srpna 1870: první sjezd českých matematiků a fyziků v Praze.

1872: první číslo časopisu *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*.

Jednota českých mathematiků – počátky

Úředně ustanovena: 9. května 1869.

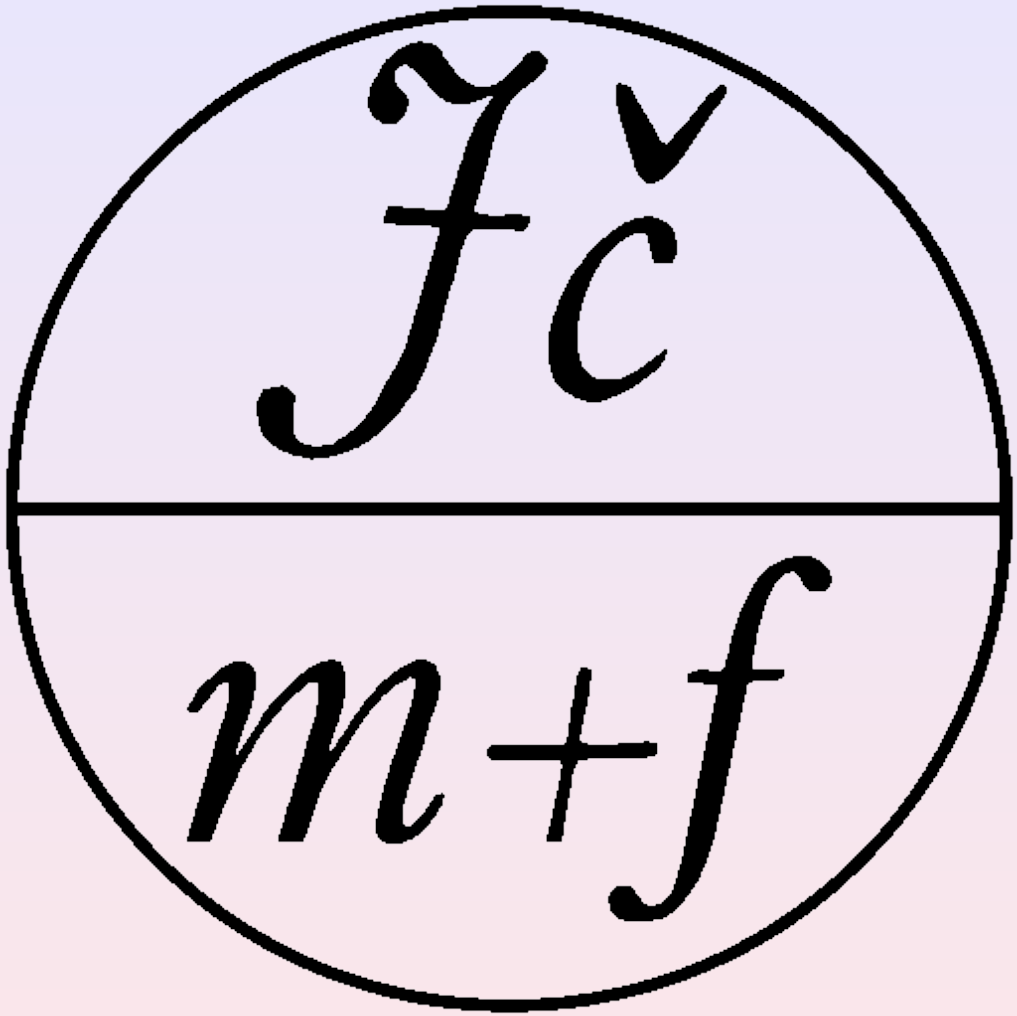
Oficiální cíle:

- zlepšovat kvalitu výuky,
- formulovat správnou českou terminologii,
- zlepšovat kontakty s vědeckou komunitou v zahraničí,
- publikovat vědecké monografie,
- překládat zásadní vědecké monografie do češtiny,
- všestranně podporovat výzkum.

Vývoj názvu

od 1912: dnešní název (JČM*F*)

JČ*S*MF: 1921–1939 a 1945–1993


Fč
m+f

Časopisy

V listopadu 1869, F. J. Studnička a K. Zahradník navrhli Jednotě, aby začala vydávat časopis.

Po dlouhé diskusi návrh zamítnut.

Počátkem 1870 však Jednota vydává tiskem první oficiální zprávu.

Únor 1872: rozhodnutí vydávat vlastní časopis pod názvem *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*. První číslo v březnu. Zakázán 1941.

1922 *Rozhledy matematicko-fyzikální*.

1956 *Pokroky matematiky, fysiky a astronomie*.

20. století

Počátek 20. století: Jednota centrem matematického a fyzikálního dění v českých zemích.

Debata o zásadní reformě školství.

Růst počtu členů, mimopražské pobočky (první v Brně v roce 1913).

1918–1939: Partner všech vlád, důležitá role pro rozvoj matematiky, fyziky a jejich výuky.

Vydavatel učebnic, monografií a časopisů v oborech matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie.

1919: licence na vydávání a prodej knih, vlastní vydavatelství.

1933: vydavatelství spojeno s firmou Prometheus (hornická literatura).

1938: dostavena vlastní budova v Žitné, přesídlení tamo.

Prometheus



Vydavatelství Prometheus (30. léta 20. století).

Budova v Žitné 25 jak ji neznáte



30. léta 20. století

2. světová válka

1939: české university zavřeny.

Počet českých středních škol zdecimován.

Jednota se podle možností snažila pomáhat studentům, kteří neměli přístup ke vzdělání.

Po 2. světové válce

Jednota se zasazovala o znovuzrození výzkumu a výuky.

V důsledku politických změn přišla Jednota o svou budovu, vydavatelství, knihovnu, knihkupectví a o nezávislost.

1952: ustanovena ČAV, Jednota učenou společností.

MO (od 1951), FO (od 1959), vědecké konference, setkání učitelů všech stupňů.

Jednota dnes

Předsedkyně: Alena Šolcová (od 2018).

- 4 pobočné spolky:
  - Česká matematická společnost (předseda Luboš Pick)
  - Česká fyzikální společnost (předseda Jana Brotánková)
  - SUMA - Spolek učitelů matematiky (předsedkyně Naďa Vondrová)
  - Fyzikální pedagogická sekce (předseda Zdeněk Drozd)
- 14 regionálních poboček
- asi 2500 členů, většinu tvoří učitelé
- 6 časopisů
- pořádání olympiád a dalších soutěží pro studenty

Aktivity

- výuka matematiky, debata o maturitách atd.,
- systém hodnocení a financování vědy v české republice,
- olympiády a další studentské soutěže
- časopisy *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, *Rozhledy matematicko-fyzikální*,
- tématické výbory (vzdělávání, terminologie, výuka matematiky na technických universitách, práce s nadanými studenty)



Známka ke století Jednoty (1962).



Známka ke 125tému výročí Jednoty (1987).



Známka ke 150tému výročí Jednoty (2012)

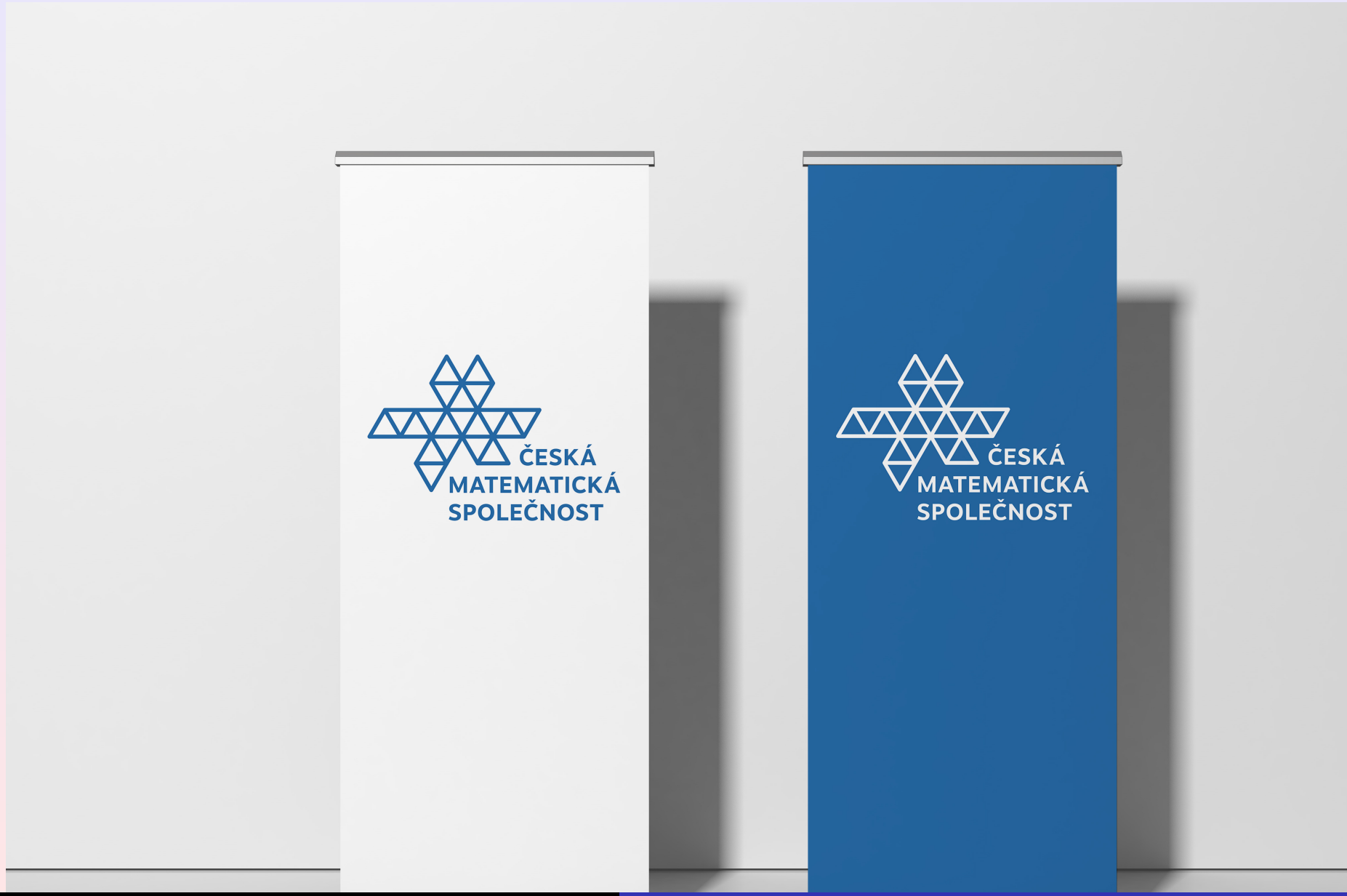




Pamětní medaile, vydaná k 125tému výročí založení Jednoty (1987).

Česká matematická společnost

Máme nové logo



nejsme tady sami, ale naše logo je nejhezčí













Česká matematická společnost dnes

- Máme
  - 440 členů
- zaštiťujeme odborné skupiny
  - EU-MATHS-IN.CZ - Česká síť pro průmyslovou matematiku
  - Česká společnost pro geometrii a grafiku
- jsme součástí
  - International Mathematical Union
  - The European Mathematical Society
- spolupracujeme s
  - Zentralblatt (zbMATH)- pražská redakce
  - DML - CZ: Czech Digital Mathematics Library
- zřizujeme
  - Český národní komitét pro matematiku

Účastníme se: setkání presidentů národních společností



Protaras, březen 2025

Pořádáme: Konference českých matematiků

- jednou za čtyři roky
- naposledy 2022 v Ostravě, chystáme 2026 v Ústí nad Labem
- volby výboru
- tři dny přednášek a společenských akcí


Optimální odhady v harmonické analyze
Lenka Slavíková
5. dubna 2022
30 LET



Udělujeme:





Oborová matematická medaile JČMF
průměr 80mm, průměrná tloušťka 9mm
autor: Zdeněk Kolářský

Oborová matematická medaile JČMF

- bývá udělována
  - českým a slovenským pracovníkům v oblasti matematiky a didaktiky matematiky, kteří se významně zasloužili o rozvoj těchto oborů u nás; zpravidla jsou udělovány při životních jubileích
  - významným zahraničním pracovníkům těchto oborů, kteří dlouhodobě spolupracují s našimi pracovišti
- uděluje výbor ČMS
- poprvé u příležitosti 15tého výročí založení ČMS

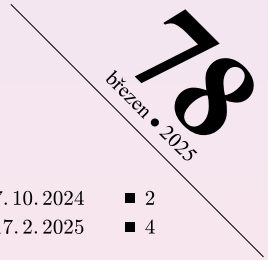
Informace ČMS

I*nformace*
Č*eské*
M*atematické*
S*polečnosti*

Vydává Česká matematická společnost JČMF jako členskou neprodejnou publikaci. Adresa redakce: Jiří Rákosník, MÚ AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, tel. 222 090 775, e-mail rakosnik@math.cas.cz. Obálka a grafická úprava Karel Horák, zpracováno programem TEX. Elektronická verze je vystavena na http://www.jcmf.cz/?q=cz/node/735.

Vydáváme: Informace ČMS

Obsah



ČMS ■ 2
Zápis z 209. (9.) schůze výboru ČMS dne 17. 10. 2024 ■ 2
Zápis z 210. (10.) schůze výboru ČMS dne 17. 2. 2025 ■ 4
Zpráva o činnosti ČMS za rok 2024 ■ 7
Vyhlášení 25. ročníku soutěže SVOČ ■ 10
Matematika pro život 2025 ■ 11
EMS ■ 13
Série online seminářů MOSS ■ 13
Mezinárodní den matematiky (nejen) v Českých Budějovicích (*Tomáš Roskovec*) ■ 14
Heidelberské fórum laureátů 2024 (*Martin Kudláč*) ■ 16
11th Heidelberg Laureate Forum 2024 (*Dalimil Peša*) ■ 17
Úlohy Jana z Palerma (*Dag Hrubý*) ■ 19

Pořádáme: "Matematika a . . . "

Série populárních přednášek pro veřejnost(od 2012):

- B. Riečan: Matematika a hudba
- P. Surynková: Matematika a architektura
- J. Kottas: Matematika a zločinci
- D. Hrubý: Matematika a maturita
- K. Oliva: Matematika a česká gramatika
- P. Kovář: Matematika a Simpsonovi
- M. Křížek: Matematika a staroměstský orloj
- V. Kolman: Matematika a filosofie
- J. Nešetřil: Matematika a umění
- L. Pick: Matematika a matematikové

Spolupracujeme: "Matematické problémy nematematiků"

- R. Levinský: Matematika a zapomětlivost
- L. Berec: Matematika a ekologie
- B. Zitová: Matematika a obrazy
- F. Soudský: Matematika a tajemství Enigmy
- Š. Guba: Matematika a dokumentace památek

Organisujeme: SVOČ

- Soutěž studentů vysokých škol ve vědecké činnosti v matematice a informatice
  - každoročně spolu s SMS
  - 12 sekcí (8 v matematice, 4 v informatice)
  - pořádána v ČR a na Slovensku
  - kolem 65 soutěžících ročně
  - spolupráce se sponsory (Qminers)

Oceňujeme: talentované mladé matemayiky



Ocenění.

SVOČka v dobrých časech





Mladí soutěžící v očekávání výsledků.

SVOČka v těžkých časech





Prázdnota a distančnost.

Cena ČMS pro mladé vědce (do 35 let)



Vítězové (2018).

Cena ČMS pro mladé vědce (do 35 let)



Vítězové (2022).

Soutěž pro mladé

Podporujeme akce pro mladé matematiky, například:

- Letní studentské soustředění TCN
- Logická hra Brloh
- Matematická soutěž MaSo
- Matematická soutěž Počítej, než tě zavřou
- Matematický korespondenční seminář MFF UK
- Příměstský matematický tábor PedF JČU
- Soustředění Gymnázia Teplice
- Soustředění k MO Janov
- Matematický korespondenční seminář Brkos
- Matematický korespondenční seminář KoMáR
- Online matematická týmová soutěž MathRace

Vysíláme naše mladé zástupce:

- do EMYA
- na Heidelberské fórum laureátů

Lákáme mládež





kam dál?

Občas využíváme mimomatematická prostředí



Mladí matematikové mizejí v pivovaru.

Klasické úlohy řecké matematiky

Literatura

U. Dudley: A budget of trisections, Springer, 1987

V. Kořínek: Základy algebry, Academia, 1956

F. Servít: Eukleidovy základy, JČM, 1907

M. Švecová: Klasické úlohy řecké matematiky, diplomová práce MFF UK, 2009

Klasické úlohy řecké matematiky - zadání

- *kvadratura kruhu*: sestrojit čtverec o stejném obsahu, jako má daný kruh
- *duplikace krychle* (též *délský problém*): k dané krychli sestrojit hranu krychle o dvojnásobném objemu
- *trisekce úhlu*: k danému úhlu sestrojit úhel třetinové velikosti
- *rektifikace kružnice*: sestrojit úsečku stejné délky, jako má daná kružnice
- *mnohoúhelník*: sestrojit pravidelný n-úhelník pro zadané $n \in \mathbb{N}$

Co smíme použít?

Konstrukce musí být *eukleidovská*, tedy úlohy musí být řešeny pouze za pomoci pravítka (*straightedge*) a kružítka (*compass*).

Eukleidovy postuláty (v překladu Františka Servíta z roku 1907):

1) Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.
2) A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.
3) A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovati kruh.
4) A že všecky pravé úhly sobě rovny jsou.
5) A když přímka protínajíc dvě přímky tvoří na téže straně vnitřní (přilehlé) úhly menší dvou pravých, ty dvě přímky prodlouženy jsouce do nekonečna že se sbíhají na té straně, kde jsou úhly menší dvou pravých.

Poznámky k nářadí

- pravítko je libovolně dlouhé
- kružítko má libovolnou rozteč
- chceme-li rýsovat kružnici, musíme znát střed a poloměr (3. postulát)
- poloměr je chápán ryze geometricky (nikoli jako číselná hodnota)
- na pravítku nesmí být žádné značky
- Dagovo pravítko (pozor na rovnoběžky!)
- konstrukce je *zcela přesná* - chyby rýsování zanedbáváme

Motivace pro úlohy

Tři krize matematiky

- první krize matematiky: objev *nesouměřitelnosti* (6.-5. století BC - Hipassus z Metapontu)
- druhá krize matematiky: *kalkulus* - nepřesně definované *nekonečně malé veličiny* (17.-19. století - Newton, Leibniz, Euler, Bernoulli, Fourier, d'Alembert, Dirichlet, Abel, Cauchy, Riemann, Weierstrass)
- třetí krize matematiky: nekonečné množny, paradoxy, ZFC, nerozhodnutelná tvrzení (od konce 19. století - Cantor, Russell, Gödel)

Reakce na krize matematiky

- první krize matematiky: přesun od aritmetiky ke geometrii, kde iracionalita nevadí
- veličiny nejsou chápány jako čísla, ale jako délky, obsahy a objemy
- jsou representovány úsečkami, čtverci, krychlemi, kružnicemi atd.
- operace: geometrická konstrukce pravítkem a kružítkem
- *řecká geometrická algebra*
- druhá krize matematiky: přehoupnutí kyvadla od geometrie zpět k aritmetice
- třetí krize matematiky: axiomatisace teorie množin

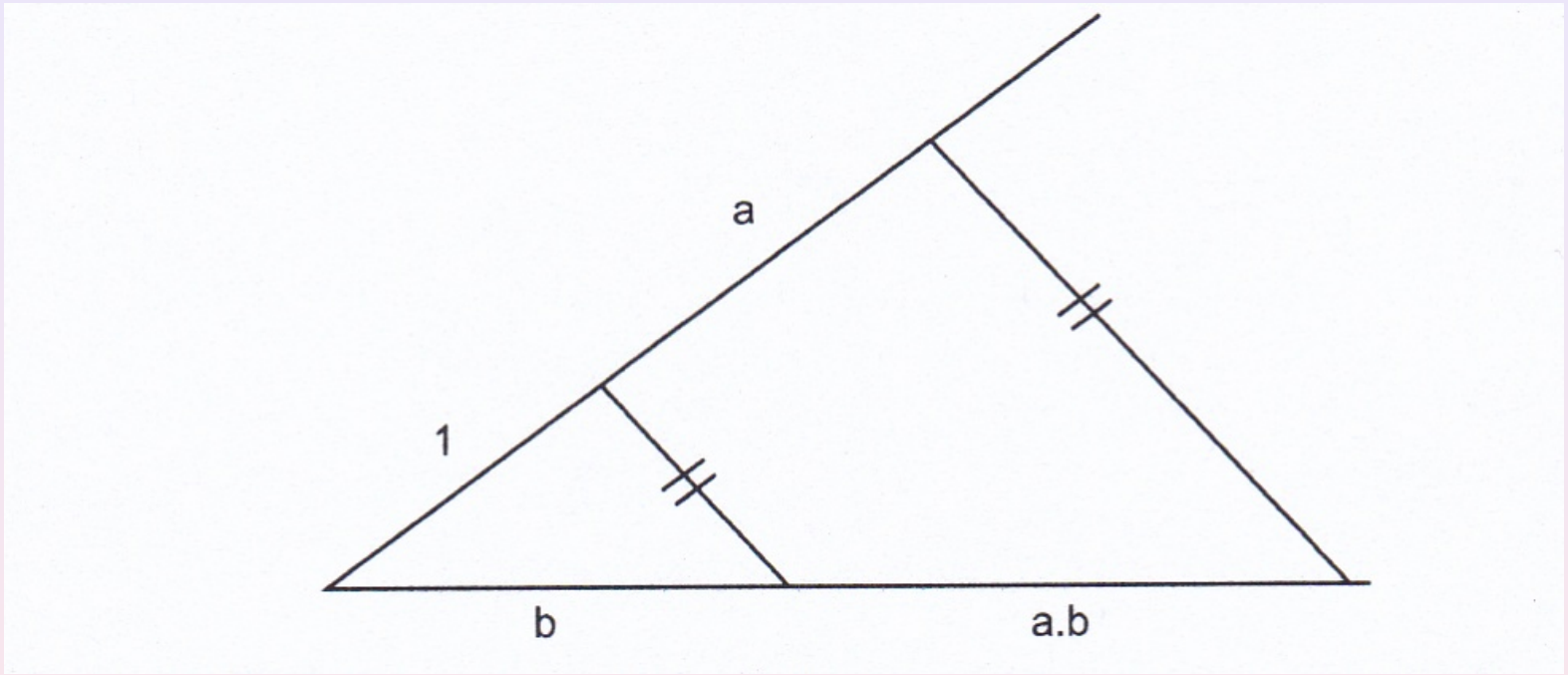
Co jde snadno a co nejde snadno

- jednorozměrné veličiny (úsečky) lze snadno sčítat, odečítat, násobit a dělit,
- problém: délka křivky (rektifikace kružnice)
- dvojrozměrné veličiny (čtverce) lze snadno sčítat a odečítat (Pythagorova věta)
- převést pravidelný mnohoúhelník na čtverec stejného obsahu (snadné)
- problém: křivočaré útvary (kvadratura kruhu)
- trojrozměrné veličiny (objem krychle): potíže dělá už sčítání (zdvojení krychle)
- úhly: sčítání, násobky, dělení na polovinu
- problém: dělení na třetinu (trisekce)

Důležité upozornění

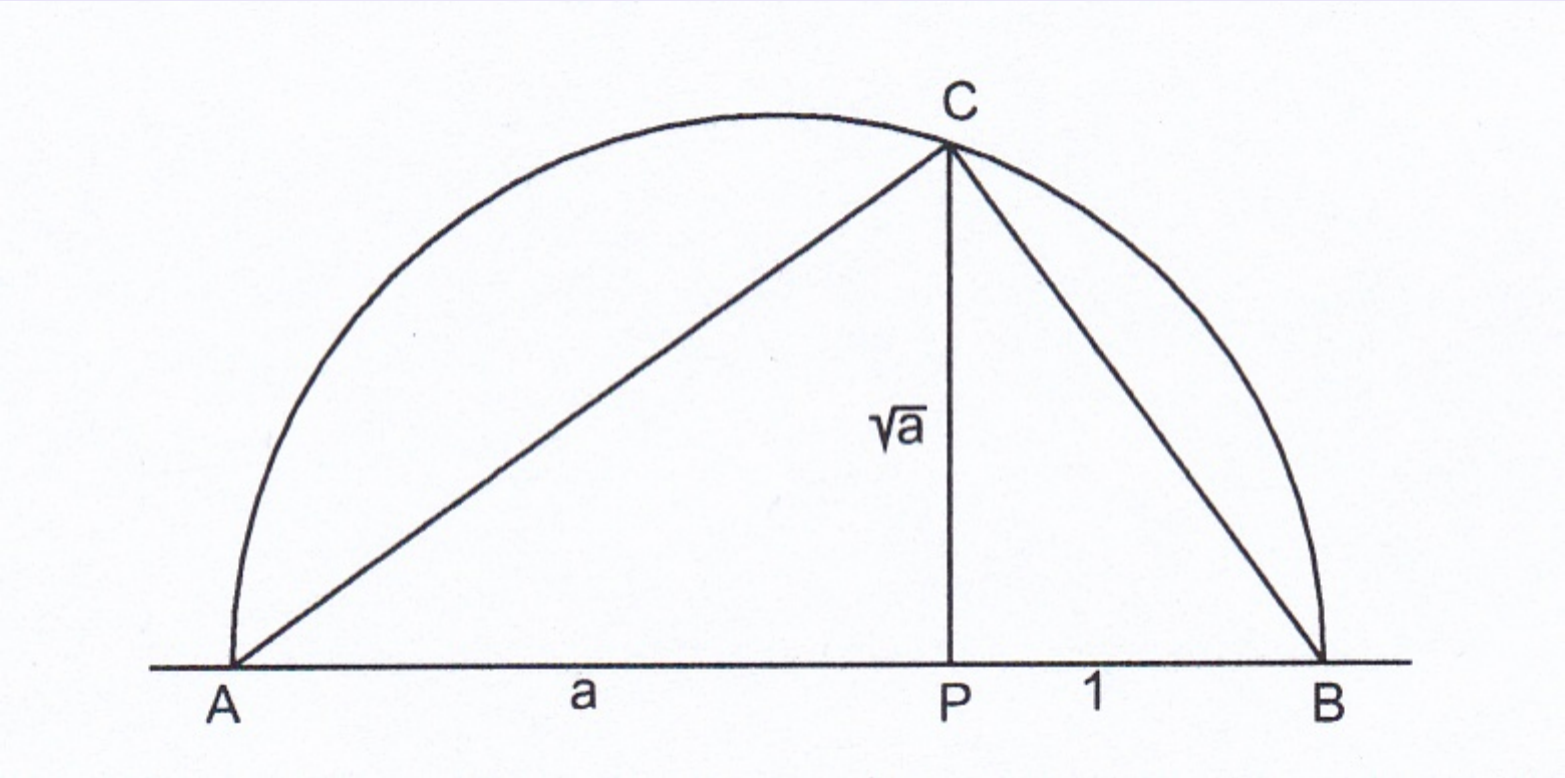
- Musíme mít k disposici *jednotkovou úsečku*.

Násobení úseček



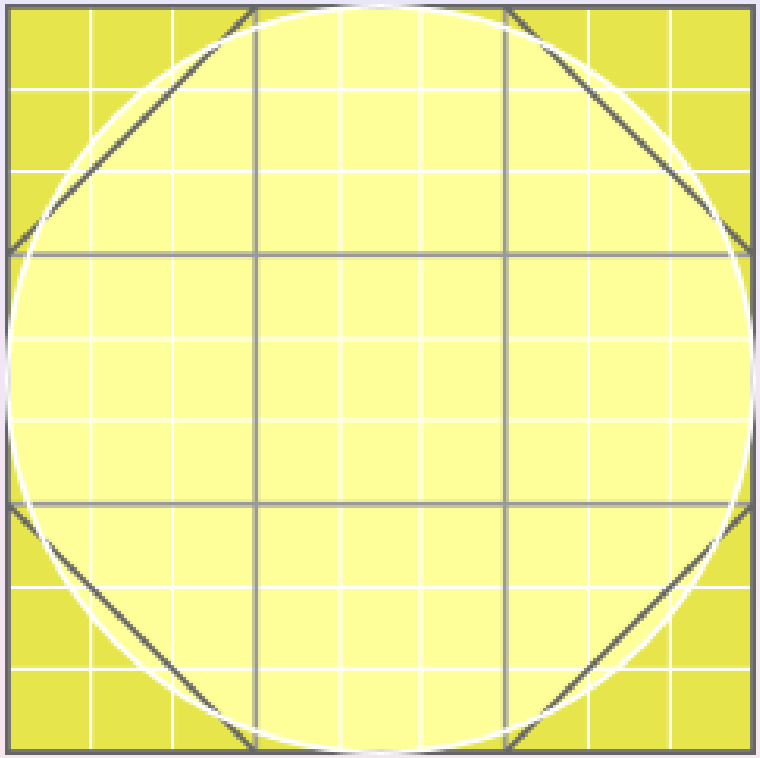
konstrukce úsečky délky $a \cdot b$, dáno $1, a, b$

Odmocňování úseček



konstrukce úsečky délky $\sqrt{a}$, dáno $1, a$

Přibližné řešení kvadratury kruhu



kruh nahrazen osmiúhelníkem

plocha 7, správně asi $7,07$, $\pi = \frac{28}{9} = 3,111\ldots$, chyba asi $-1,2\%$

Kvadratura kruhu - další přibližná řešení

- Rhindův papyrus (1650 BC):

$$\frac{\text{obsah kruhu}}{\text{obsah opsaného čtverce}} = \frac{64}{81},$$

  tedy $\pi = \frac{256}{81} = 3,16\ldots$

- Archimedes (287–212 BC): $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$, $\pi = 3,1419\ldots$, chyba menší než $0,05\%$

- Adam Kochanski (1685): eukleidovská konstrukce $\pi = 3,141533\ldots$

Matematická výbava pro další postup

- Budeme potřebovat několik vět z algebry.
- zdroj:

  Vladimír Kořínek: Základy algebry, Academia, Praha 1956

První věta z algebry

Věta (o konstruovatelnosti bodu)

Každý bod, jehož souřadnice lze vypočítat ze souřadnic daných bodů aritmetickými operacemi a druhou odmocninou, je (z daných bodů) eukleidovsky sestrojitelný.

Druhá věta z algebry

Věta (Eisensteinovo kritérium ireducibility)

Nechť

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

je polynom stupně $n \geq 2$ a p je prvočíslo splňující

$$p \nmid a_n,$$
$$p \mid a_i \quad \text{pro } i \in \{0, 1, \ldots, n-1\},$$
$$p^2 \nmid a_0.$$

Potom je P ireducibilní nad tělesem $\mathbb{Q}$.

Třetí věta z algebry

Věta (o konstruovatelnosti úsečky)

Jsou dány úsečky o délkách $a_1, \ldots, a_k$. Nechť T je těleso vzniklé z $\mathbb{Q}$ adjunkcí čísel $a_1, \ldots, a_k$. Nechť β je kořen polynomu

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

který je ireducibilní nad T a jehož koeficienty jsou prvky T. Pak je úsečka délky β konstruovatelná pouze tehdy, je-li stupeň polynomu mocninou čísla 2.

Čtvrtá věta z algebry

Věta (o racionálním kořenu)

Je-li racionální číslo $\frac{p}{q}$ kořenem polynomu s celočíselnými koeficienty, pak p dělí absolutní člen a q dělí řídící koeficient.

Trisekce a její řešitelnost

- Úhel φ v rovině je určen body $[0,0]$, $[0,1]$, $[\cos\varphi, \sin\varphi]$.
- Chceme sestrojit bod $[\cos\frac{\varphi}{3}, \sin\frac{\varphi}{3}]$.
- Díky Větě 1 a $\cos^2 + \sin^2 = 1$ stačí úsečka délky $\cos\frac{\varphi}{3}$.
- Užijeme vzorec $4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3} = \cos\varphi$.
- Položíme $a = \cos\varphi$ a $x = \cos\frac{\varphi}{3}$.
- Dostaneme $4x^3 - 3x - a = 0$.

Občas to jde

- Máme rovnici $4x^3 - 3x - a = 0$.
- Pro $a = -1$ (což odpovídá $\varphi = \pi$) jest

$$4x^3 - 3x + 1 = (x + 1)(2x - 1)^2.$$

- Pro $a = 0$ (což odpovídá $\varphi = \frac{\pi}{2}$) jest

$$4x^3 - 3x = x(4x^2 - 2).$$

- Jenomže úloha to požaduje pro *libovolný* úhel φ!

Ale ne vždy

- Máme rovnici $4x^3 - 3x - a = 0$.
- Volme $\varphi = \frac{\pi}{3}$, pak $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, a tedy řešíme

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0,$$

neboli

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

- Dle Věty 4 by racionální kořen musel být prvkem množiny

$$\left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\right\}.$$

- Žádný prvek této množiny není kořen (ověříme dosazením).

Ještě jeden příklad

- Volme $\varphi = \arccos \frac{3}{4}$, tedy $\cos \varphi = \frac{3}{4}$.
- Dostaneme rovnici

$$16x^3 - 12x - 3 = 0.$$

- Dle Věty 2 je tato rovnice ireducibilní nad $\mathbb{Q}$ (volíme $p = 3$).
- Dle Věty 3 konstrukce není proveditelná (stupeň 3 není mocninou 2).

Neřešitelnost úloh

Ani jedna z prvních čtyř úloh nemá řešení.

- trisekce úhlu: konstruovat lze jen takové úhly, jejichž sin a cos jsou algebraická čísla stupně mocniny 2 nad $\mathbb{Q}$, najdeme úhel, jehož trojnásobek je konstruovatelný a jehož cos není algebraická čísla stupně mocniny 2 nad $\mathbb{Q}$ (Pierre Laurent Wantzel 1837)

- zdvojení krychle: potřebujeme $\sqrt[3]{2}$, tedy kořen polynomu $x^3 - 2 = 0$, ten je ireducibilní a jeho stupeň 3 není mocninou 2 (Evariste Galois 1830),

- rektifikace kružnice a kvadratura kruhu: číslo π (a tedy i $\sqrt{\pi}$) je transcendentní (Ferdinand von Lindemann 1882)

Konstrukce mnohoúhelníků

- Carl Friedrich Gauss 1796: postačující podmínka
- Pierre Wantzel 1837: podmínka je také nutná

Theorem (konstruovatelnost mnohoúhelníků)

Pravidelný n-úhelník je eukleidovsky konstruovatelný právě tehdy, když jsou všechny liché dělitele čísla n různá Fermatova prvočísla.

Fermatovo prvočíslo je prvočíslo tvaru $F_m = 2^{2^m} + 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Fermatova prvočísla

$$F_0 = 2^1 + 1 = 3$$
$$F_1 = 2^2 + 1 = 5$$
$$F_2 = 2^4 + 1 = 17$$
$$F_3 = 2^8 + 1 = 257$$
$$F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$$

Tedy lze konstruovat n-úhelníky například pro

$n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 51, 60, 68, 80, 85$

a nelze je konstruovat například pro

$$n = 7, 9, 11, 13, 14$$

Důkaz neřešitelnosti konstrukce sedmiúhelníku

Uvažujeme rovnici $z^7 = 1$ v $\mathbb{C}$.

$$z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$

Jeden z kořenů je $z = 1$. Další kořeny splňují

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

$$z^3 + \frac{1}{z^3} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} = 0$$

Sedmiúhelník - pokračování

Položme $x = \operatorname{Re} z$. Pak pro $x = \cos\varphi$ platí

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad \frac{1}{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Dosazením a pomocí trigonometrických vzorců dostaneme

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

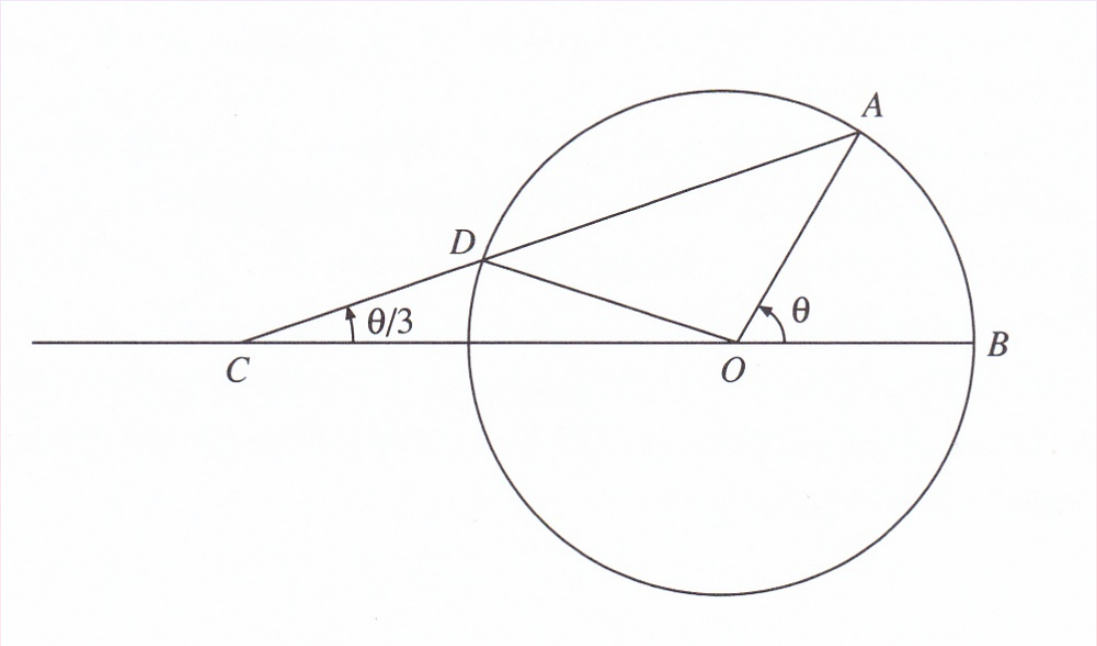
Racionální kořen by dle Věty 4 byl z množiny $\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\}$, to ale nejsou kořeny.

Tedy, dle Věty 3 (stupeň 3 není mocninou 2), konstrukce není možná.

Trisekce s nedovolenými pomůckami

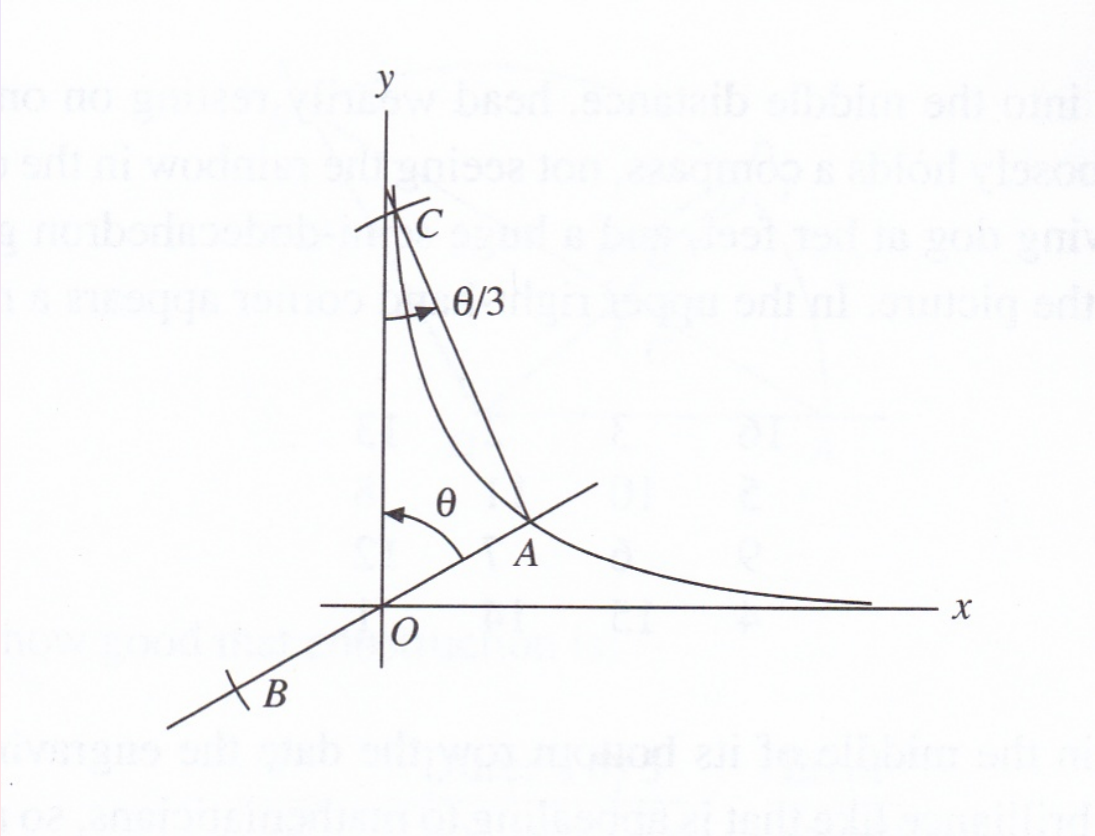
Neeukleidovské pomůcky

- Řekové pravděpodobně věděli/tušili, že problém je neřešitelný.
- Nalezli několik řešení s pomůckami navíc.
- Jedna možnost je použít tzv. *protraktor* (úhloměr).
- Archimedovo řešení s *prevítkem* (pravítkem se dvěma značkami):



Využití křivek

- Nové důkazy se objevují dodnes.
- Následující je z roku 1989:



Kdo je to trisektor (třetič) a jak s ním zacházet

What To Do When the Trisector Comes

Underwood Dudley

A *trisector* is a person who has, he thinks, succeeded in dividing any angle into three equal parts using straightedge and compass alone. He *comes* when he sends you his trisection in the mail and asks your opinion, or (worse) calls you to discuss his work, or (worse still) shows up in person. You may think that the problem of how to deal with trisectors is not an important one; I intend to show that it is.

Trisectors form a subset of mathematical cranks, which in turn are a subset of all cranks. By "crank" I mean what Augustus DeMorgan meant by "paradoxer" in his wonderful book *A Budget of Paradoxers:*

> A great many individuals, ever since the rise of the mathematical method, have, each for himself, attacked its direct and indirect consequences. I shall call each of these persons a *paradoxer*, and his system a *paradox*. I use the word in the old sense: a paradox is something which is apart from general opinion, either in subject-matter, method, or conclusion.

I pulled that book off a library shelf nearly thirty years ago not knowing what was in it, and it started my interest in cranks in general and mathematical cranks in particular. You might think that it would be easier for mathematicians to handle cranks than, say, economists. An advocate of Henry George's single tax could argue endlessly and inconclusively, but the only way to see if the tax would work would be to get a nation or collection of nations to give the idea a try. In mathematics, there ought to be less endless argument: given a "proof" of Fermat's Conjecture, something like "there is an error on page 4, line 12" should settle the matter, and given a trisection, there is no need even to read as far as page 4 since there is no chance whatsoever that it is correct. But unfortunately it is not that way. Trisectors can and do argue just as endlessly as any other cranks.

By the way, if you have any trisections or any works of mathematical cranks I would be most grateful to have copies. I have sought such things out for years, and my collection of analyzed trisections—standardized diagrams with neat letters, and computer printouts of errors—is in its second hundred. But I have the collector's lust: I want them *all*. Quadratures of the circle (the most popular target of cranks in the last century but now not common), duplications of the cube, proofs of Fermat's Conjecture: all are welcome.

One obvious characteristic of trisectors is that they are old. The typical trisector heard of the trisection in his geometry class, but did not succeed with his construction until many years later, usually after retirement. "His" in the last sentence is not sexist because almost all trisectors are male. From the two female trisectors I know of, it follows by an invalid statistical calculation that we can be 95% sure that the proportion of female trisectors is less than .04. Women have too much sense to waste time on such things. Trisectors are old men. An Illinois lawyer wrote in 1953:

> I became interested in this problem in my junior high school year (1913–14) at Philo, Illinois. My geometry teacher suggested it. I turned it over in my mind and thought of it many times.

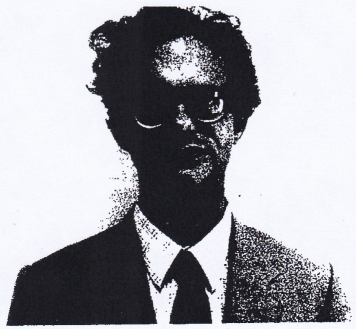
An engineer in 1973:

> It all started in 1936. From that date on, more or less of my spare time was devoted in the field of trisection.

From the *California Freemason*, 1972:

> My teacher at that time said that it was the opinion of mathematicians that a solution was impossible. For over 55 years that puzzle has bugged me.

Underwood Dudley



20 THE MATHEMATICAL INTELLIGENCER VOL. 5, NO. 1 © 1983 Springer-Verlag New York

(Math. Intelligencer, 1983)

Albrecht Dürer (1471–1528) a jeho Melencolia



Co málokdo ví o Albrechtu Dürerovi

- Deset let po Melencolii vydal Dürer brožurku *The Printer's Manual*
- A manual of Measurement of Lines, Areas and Solids by Means of Compass and Ruler
- Assembled by Albrecht Dürer for All Lovers of Art with Appropriate Illustrations Arranged to be Printed in the Year MDXXV

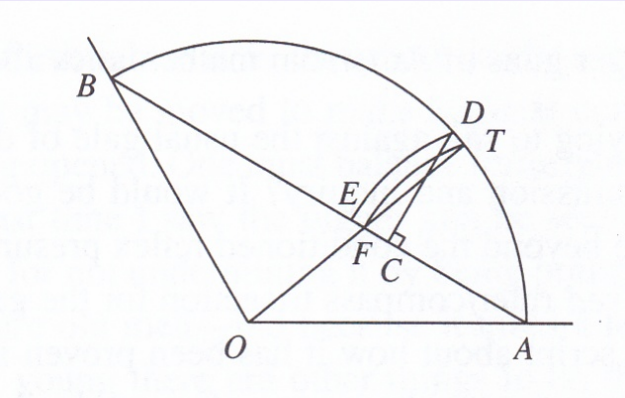
Co v příručce najdeme

- jak vepsat čtverec do kruhu
- jak sestrojit pětiúhelník, šestiúhelník a devítiúhelník
- jak konstruovat dláždění
- další konstrukce pomocí kružítka a pravítka.

- Dürer nerozlišuje mezi přesnými konstrukcemi (pětiúhelník) a přibližnými konstrukcemi (devítiúhelník)
- Jeho trisekce (*'Method for dividing an arc into three equal parts'*) je pochopitelně jen přibližná, ale je to jedna z nejlepších známých aproximací všech dob.

Dürerova trisekce (1526)

- Návod k trisekci:

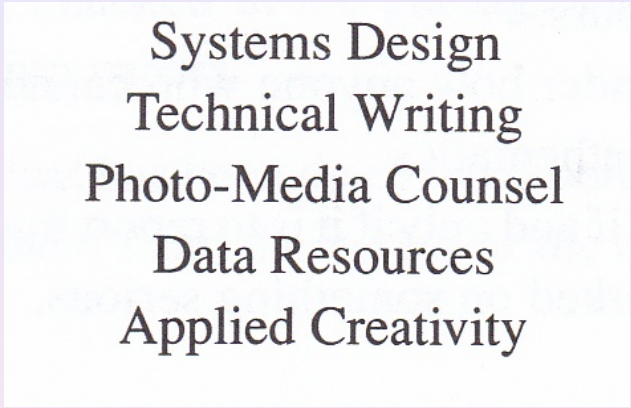


- Posuďme, jak dobrá je to aproximace:

θ	Dürer's $\theta/3$	Error
9°	3° 0′ 12.9″	12.9″
18°	5° 59′ 56.8″	1.2″
27°	8° 59′ 59.7″	.3″
36°	12° 0′ 0.1″	.1″
45°	14° 59′ 59.8″	.2″
54°	17° 59′ 59.7″	.3″
63°	20° 59′ 58.7″	1.3″
72°	23° 59′ 56.8″	3.2″
81°	26° 59′ 52.6″	7.4″

Slovo má trisektor

- V roce 1988 napsal D.L. z Kalifornie na papíře s hlavičkou



toto:

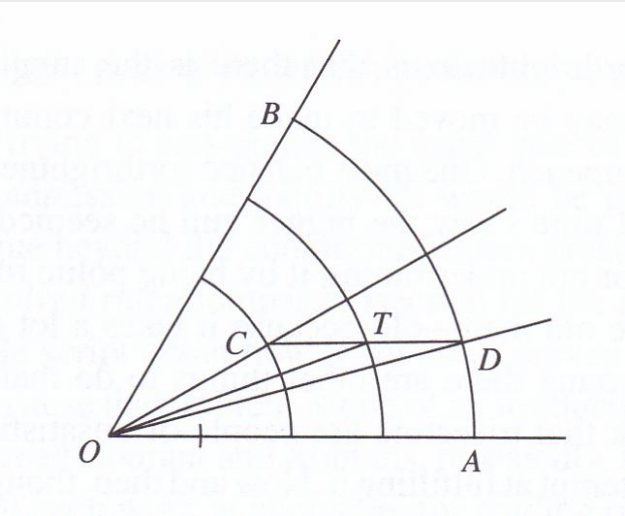
- *Vyřešil jsem antický problém trisekce úhlu. Je mi známo vše o tom, že a proč to nejde. Vím o redukci problému na třetí odmocninu. Četl jsem opakovaně Couranta, Robbinse i Kleina. Hledám vydavatele a sponzora pro mou knihu.*
  Můj objev nepochybně galvanizuje matematiky celého světa. Představte si slávu, kterou by slízl Pythagoras, kdyby byl schopen učinit můj objev.

Odpověď z university

- Kdyby Vám, jak píšete, bylo opravdu známo *vše* o neřešitelnosti antického problému trisekce, byl byste neplýtval časem na jeho řešení. Mně vše známo je a mohu Vás ujistit, že to, co jste sepsal, nikoho nezajímá. Zanechte marné snahy a jděte dělat něco užitečného. Pomyslete na tu spoustu opravdové matematiky, kterou jste si mohl osvojit během těch stovek tisíců zbytečných hodin.

A ještě jedno řešení

- řešení autora, který sám sebe popsal jako *'chovanec mentálního zařízení v rámci nápravného zařízení'*:



- Chyba této konstrukce je $10'$ pro úhel 60° a $32'$ pro pravý úhel.

Klasické problémy a zákon



Edward Johnston Goodwin (1828–1902)

Obvod kružnice

V knize

Universal Inequality is the Law of All Creation

(E.J. Goodwin, 1892)

se dočteme například toto:

- *Během prvního týdne roku 1888 byl autor nadpřirozeným způsobem poučen o přesné hodnotě obvodu kružnice . . .*
- *Žádná vědecká autorita nedokáže vysvětlit, jak byla tato hodnota nalezena . . .*

Komentář matematikův (D. Singmaster, 1985):

- *Myslím, že s druhým z výroků lze naprosto souhlasit.*

Hodnota konstanty odhalena

- V roce 1894 dokázal Goodwin kvadraturu kruhu.
- Důkaz mu zabral dvě stránky.
- Mimo jiné zde uvedl, že π *není rovno* 3.14, *jak nás učili ve škole*.

Publikace

- E.J. Goodwin: *The Quadrature of the Circle*, American Mathematical Monthly **1,7** (1894), 246–247.

Tentýž autor, tentýž časopis, o rok později, jiný problém

- E.J. Goodwin: *(A) The trisection of an angle, (B) Duplication of the Cube*, American Mathematical Monthly **2,11** (1895), 337.

Goodwinova řešení klasických problémů

(A) The trisection of an angle:

The trisection of a right line taken as the chord of any arc of a circle trisects the angle of the arc;
(B) Duplication of the Cube:

Doubling the dimensions of a cube octuples its contents, and doubling its contents increases its dimensions twenty-five plus one per cent.

By request of the author,
Edw. J. Goodwin,
Solitude, Indiana.

Komentář:

- *Jinými slovy* $\sqrt[3]{2} = 1.26$ *(místo* $1.25992105\ldots$*)*

Pár slov na obranu časopisu

- vychází od 1894
- v tomto roce byl vydáván soukromým nakladatelstvím
- publikoval téměř cokoli
- oba Goodwinovy články vyšly v rubrice ‘Queries and Information’ s poznámkou ‘Published at the request of the author’
- důkaz neřešitelnosti kvadratury kruhu byl znám teprve 12 let (Ferdinand von Lindemann 1882).

Do hry vstupuje zastupitelstvo

V roce 1897 přiměl Goodwin svého zastupitele z Posey County Taylora I. Recorda, aby legislativcům předložil návrh zákona.

- 5.2.1897 byl návrh zákona č. 246 (the π-bill of Indiana) předložen Indiana House of Representatives
- byl nejprve předán *Výboru pro mokřady (Committee of Swamp Lands)*, později *Výboru pro zdrženlivost (Temperance Committee)* a nakonec *Výboru pro vzdělávání (Education Committee)*
- byl jednomyslně schválen za podpory *State Superintendent of Public Instruction*
- a 6.2.1897 byl postoupen Senátu.

Text zákona

- *A bill for an act introducing a new mathematical truth and offered as a contribution to education to be used only by the state of Indiana free of cost by paying any royalties whatever on the same, provided it is accepted by the official action of the legislature of 1897.*
- Nebyl žádný důvod zákon neschválit.
- Návrh dále obsahoval nesmyslné matematické bábolení, kterému nikdo nerozuměl.
- A hlavně: *Důkazem hodnoty, kterou autor nabízí státu Indiana darem, je fakt, že jeho řešení trisekce úhlu, duplikátu krychle a kvadratury kruhu byly přijaty do American Mathematical Monthly, předního matematického časopisu v této zemi.*

Zákon (prozatím) neschválen

- V Senátu se návrh dostal na pořad diskuse 11.2.1897.
- Náhodou byl přítomen *C.A. Waldo*, profesor matematiky na Purdue University.
- Přesvědčil několik senátorů, že zákon je nesmyslný.
- Odmítl nabídku setkání s autorem.
- Později změnily tón i místní noviny, původně podporující Goodwinovu teorii.
- The Indianapolis Journal: *The Senate might as well try to legislate water to run up hill as to establish mathematical truth by law.*

Dobová satira, matematikou inspirovaná



REPRESENTATIVE RECORD OF INDIANA AND HIS "NEW MATHEMATICAL TRUTH."

Situaci zachraňuje profesor



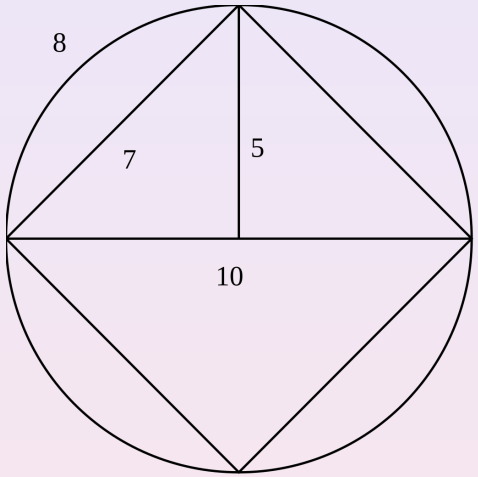
CLARENCE ABIATHAR WALDO,
A. M., Ph. D.,
Head Professor of Mathematics.

Clarence A. Waldo (1852–1926)

A kolik je tedy vlastně to π?

- A circular area is equal to the square on a line equal to the quadrant of the circumference . . .
- Tedy:
$$\left(\frac{\pi r}{2}\right)^2 = \pi r^2.$$
- Tedy $\pi = 4$.
- A o kousek níže: This new measure of the circle has happily brought to light the ratio of the chord and arc of which is 7:8.
- Tedy
$$\frac{\sqrt{\pi} r}{\pi r/2} = \frac{7}{8}.$$
- Jinými slovy,
$$\pi = \frac{16\sqrt{2}}{7} = 3.232488\ldots$$

Nákres křanků



Goodwinova teorie hodnoty π.

Hodnota π

- David Singmaster napočítal v Goodwinově pojednání devět různých hodnot π.
- Stát Indiana mohl od Goodwina získat opravdu mnohé.

Analýza všech hodnot π?

Úplný seznam všech devíti hodnot čísla π v Goodwinově článku:

4	3.555556
3.333333	3.265986
3.265306	3.232488
3.2	3.190494
2.56	

Komentář matematikův (D. Singmaster):

- These average to 3.28907, though I haven't accounted for the relative frequency of these values in his assertions.
- Most circle squarers get just one value. Goodwin is unique in getting so many.

Z rozsáhlé literatury k případu (Math. Intelligencer, 1985)

Old Intelligencer

The Legal Values of Pi
by David Singmaster

I have long been interested in the notorious attempt to legislate a legal value of π. I have read several articles [2,5,6,7,8,10] on the history of this attempt and it has been mentioned in the popular press recently [1,9]. From these it is clear that only Greenblatt [5] and Hallerberg [7] have tried to understand the obscure content of the proposed bill. Greenblatt found four different values of π given in it! Hallerberg has tried to understand how some of the values came about.

I have found six different values given in the Bill and three other values in an earlier article by the same author [3] and in contemporary interviews with him [5, pp. 388–389].

In this note, I will briefly sketch the history of the proposal, drawing heavily on the definitive article of Hallerberg [6] and then I will quote the versions of the proposals and then derive the values of π described.

Historical Sketch

Edward Johnston Goodwin (1828?–1902) was a doctor in Solitude, Indiana. Hallerberg [7, p. 139] has recently discovered three versions of a monograph by Goodwin. The 1982 version, entitled "Universal Inequality is the Law of All Creation", includes the following comments:

> During the first week in March, 1888, the author was supernaturally taught the exact measure of the circle . . . no authority in the science of numbers can tell how the ratio was discovered. . . .

(I think the evidence will lead us to agree with the latter assertion!)

He copyrighted his results in the U.S., England, Germany, Belgium, France, Austria and Spain. He attempted to present his solution at the educational exhibit of the 1893 Columbian Exposition in Chicago. When the organisers learned what he planned to present, his permit was revoked and he was told to present his solution to the mathematical journals.

The *American Mathematical Monthly*, then in its first year, was privately published and often inserted whatever material was at hand. In 1894, Goodwin's article "Quadrature of the Circle" appeared in the Queries and Information section of the seventh issue of the first volume of the *Monthly*, with the note "Published at the request of the author". The first paragraph is followed by "(copyrighted by the author, 1889. All rights reserved.)" As we will see, the proposed Bill is almost, but not quite, identical to this article.

Dr. Goodwin persuaded his local representative, Taylor I. Record, to introduce a Bill, written by Goodwin. House Bill No. 246 was introduced in the Indiana House of Representatives on 18 January 1897. The Bill was referred to the Committee on Canals, generally known as the Committee on Swamp Lands, 'midst general cheerfulness . . . where, in the swamps, the bill would find a deserved grave' [6, p. 385, where it is quoted from *Der Tägliche Telegraph*, A German language paper in Indianapolis]. Surprisingly (or perhaps not), the committee returned the Bill for reference to the Committee on Education. On 2 February, the Committee on Education reported the Bill back "with the recommendation that said bill do pass". The House duly passed it then and again at a second reading on 5 February, when the rules were suspended to permit the third reading as well. The Bill was then forwarded to the Senate, where it was referred to the Committee on Temperance on 11 February.

The first newspaper report, on 20th January, commented that: "The bill . . . is not intended to be a hoax. Dr. Goodwin . . . and State Superintendent of Public Instruction Geeting, believe that it is the long-sought solution . . . Dr. Goodwin, the author, is a mathematician of note. He has it copyrighted and his proposition is that if the legislative will indorse the solution he will allow the state to use [it] free of charge" [2, p. 208, quoted from *The Indianapolis Sentinel*].

By 6 February, the newspapers began to realise what was happening. The *Indianapolis Journal* commented: "This is the strangest bill that has ever passed an Indiana assembly" and printed the entire Bill, [2, p. 209]. The Bill became a source of much merriment in the press, as far away as Chicago and, later, New York.

Professor C. A. Waldo, a mathematician at Purdue University, came to the state capitol on Academy business at this time. He came to the House session on 5 February and was surprised to discover a debate on mathematical legislation. He recalls:

Případně další čtení

1. Anon. (1983) Reciting to the point of boredom. *The Guardian* (3 Nov.), 1
2. W. E. Edington (1935) House Bill No. 246, Indiana State Legislature, 1897. *Proc. Indiana Acad. Sci.*, *45*, 206–210
3. E. J. Goodwin (1894) Quadrature of the circle. *Amer. Math. Month.*, *1*, 246–247
4. E. J. Goodwin (1895) (A) The trisection of an angle; (B) Duplication of the cube. *Amer. Math. Month.*, *2*, 337
5. M. H. Greenblatt (1965) The "legal" value of π, and some related mathematical anomalies. *American Scientist* (Dec.), 427A–434A
6. A. E. Hallerberg (1975) House Bill No. 246 revisited. *Proc. Indiana Acad. Sci.*, *84*, 374–399
7. A. E. Hallerberg (1977) Indiana's squared circle. *Math. Mag.*, *50*, 136–140
8. T. F. Holgate (1935) Rules for making pi digestible. *The Atlantic Monthly* (July), 118–119
9. R. Millington (1982) Letter: The House divided and got a zero answer. *The Guardian* (8 Nov.)
10. C. A. Waldo (1916) What might have been. *Proc. Indiana Acad. Sci.*, *26*, 445–446

Smutný konec

V roce 1902 vyšel ve městě Springfield, Indiana, Goodwinův nekrolog *End of a Man Who Wanted to Benefit the World*. Píše se zde, mimo jiné:

- *He has devoted his last years to have the government recognize and include in its schools at West Point and Annapolis his method of squaring the circle.*
- *He was doomed to disappointment, and in the peaceful confines of village life the tragedy of a fruitless ambition was enacted.*

Mnohoúhelníky

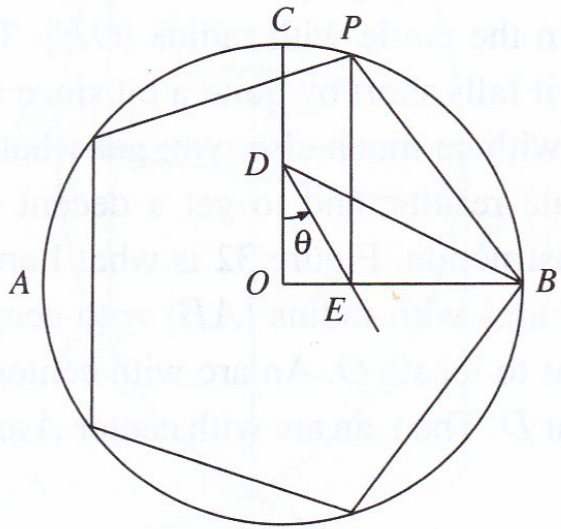
Úloha: sestrojte n-úhelník

Úloha je

- snadná pro $n = 3, 4, 6, 8$,
- těžká pro $n = 5$, (ale jde to),
- neřešitelná pro $n = 7, 9$.

Konstrukce pentagonu

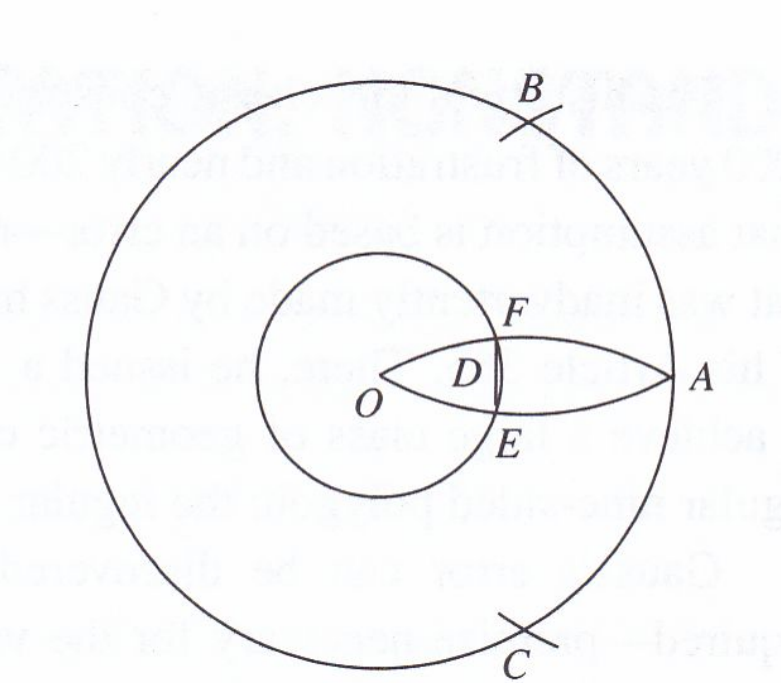
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta},$$



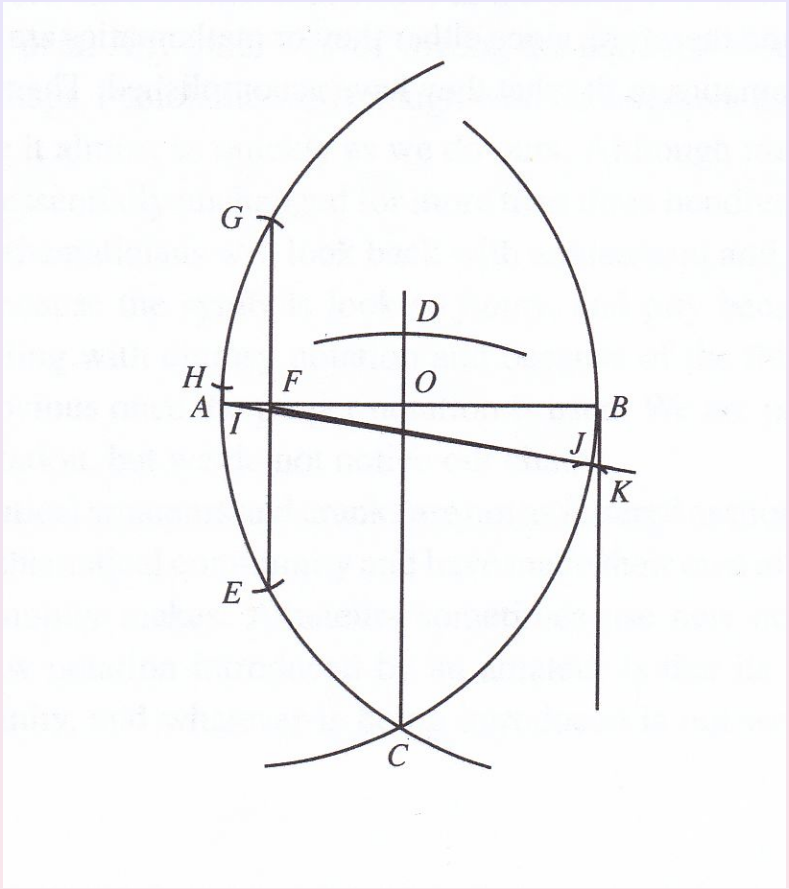
Co na to trisektor

- Septagonisté téměř neeexistují.
- Důvod by mohl být v tom, že 360 se špatně dělí sedmi.
- Nonagonisté existují, ale je jich málo.
- Důvodem by mohlo být to, že konstrukci nonagonu je snadným důsledkem trisekce úhlu.
- Proč se zdržovat obskurním problémem nicotného významu, když mohu rovnou vyřešit velký.

Nonagon poprvé



Nonagon podruhé

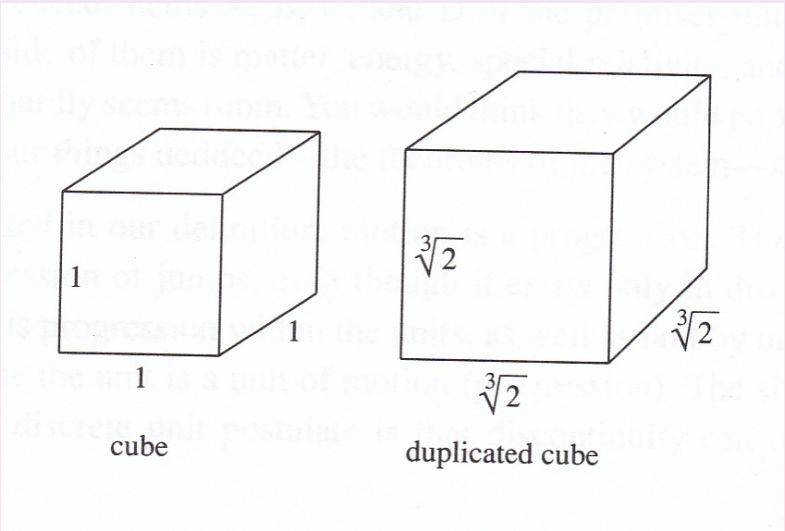


Úhel se od 10° liší o 0.0001 sec. Vetknut do poloměru Země, měl by stranu o 240 stop kratší. Nikdo by si ničeho nevšiml.

Duplikáty

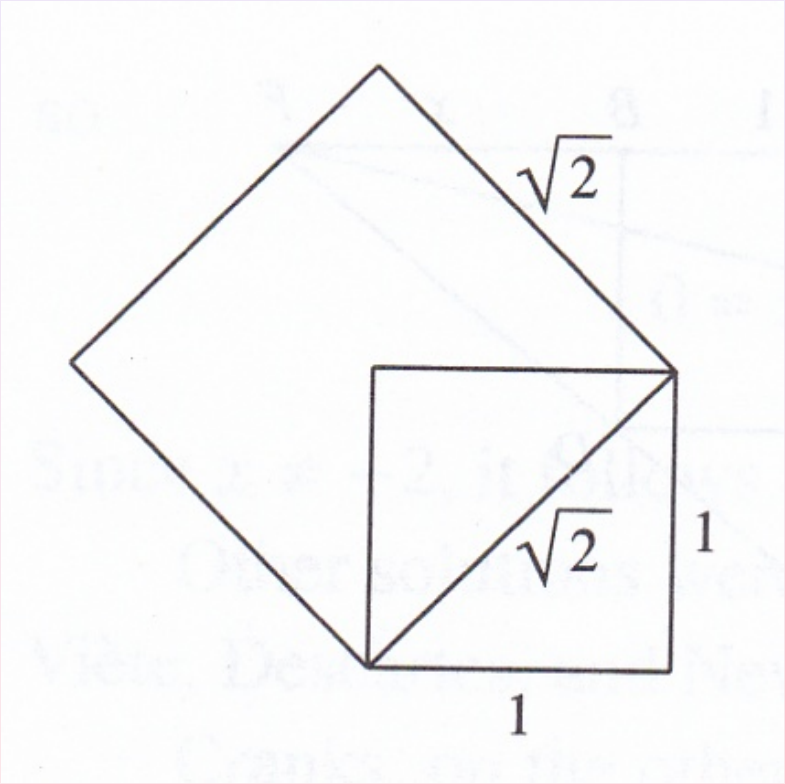
Úloha

- K dané krychli sestrojte krychli dvojnásobného objemu.
- Konstrukce musí být *eukleidovská*.



2D verse

- Dvojrozměrná obdoba je snadná.



Zádrhel

- Jenomže na 3D versi problému potřebujeme $\sqrt[3]{n}$.
- A to eukleidovsky sestrojit nelze.
- Řekové si to uvědomovali a šli na věc jinak.
- Nalezneme-li x, y tak, aby

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2},$$

potom

$$2 = \frac{y^2}{x} = \frac{x^4}{x} = x^3,$$

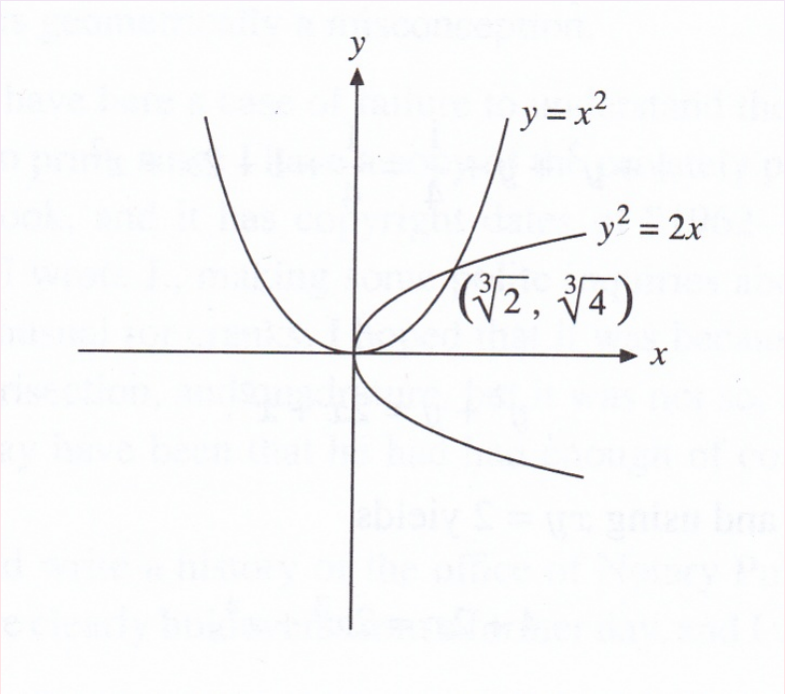
a máme to.

Řešení

- To znamená, že stačí lokalizovat průnik parabol

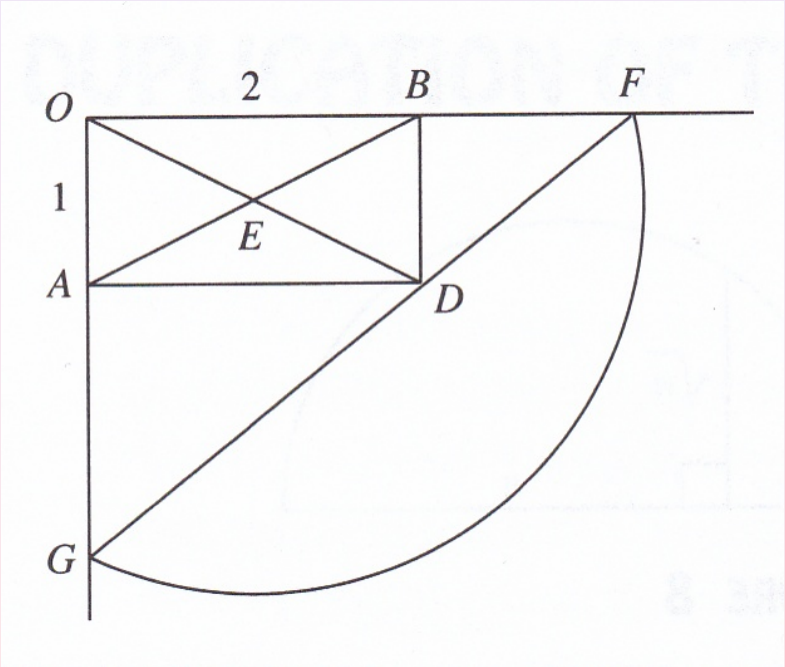
$$x^2 = y, \quad y^2 = 2x,$$

tj.



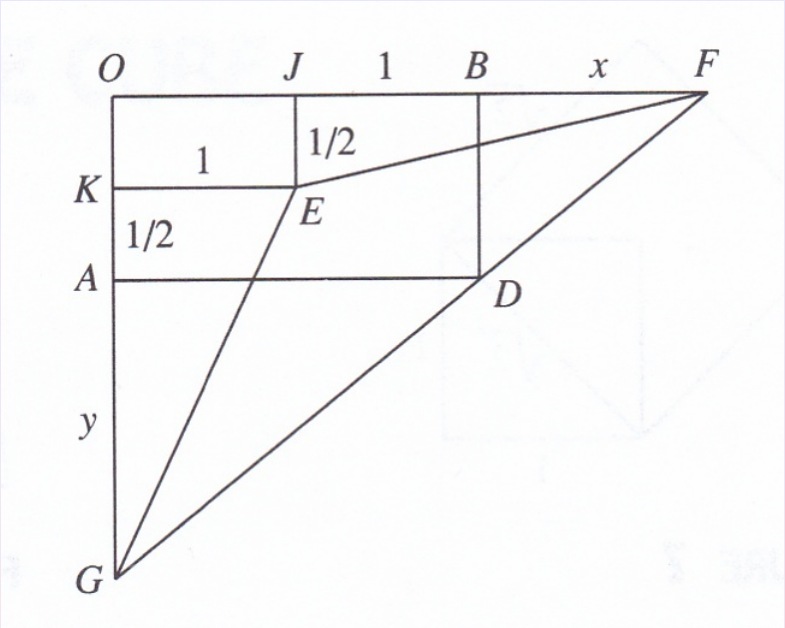
Otočné pravítko

- Kolem roku 220BC našel Apollonius jiné řešení.
- Konstrukce není eukleidovská, protože použil *otočné pravítko* (wiggling straight edge).



- Potom $BF = \sqrt[3]{2}$.

Vysvětlení, proč to funguje



- Trojúhelníky BDF a AGD jsou podobné, takže

$$\frac{x}{1} = \frac{2}{y}, \quad \text{neboli } xy = 2.$$

- Dle Pythagorovy věty aplikované na KEG a JEF máme

$$1 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + (1 + x)^2.$$

$$1 + y^2 + y + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + 1 + 2x + x^2,$$

neboli

$$y^2 + y = 2x + x^2.$$

Vynásobíme x^2 a použijeme $xy = 2$ a dostaneme

$$4 + 2x - 2x^3 + x^4,$$

to jest

$$0 = x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = (x^3 - 2)(x + 2).$$

Protože $x \neq -2$, zbývá jediná možnost, a to $x^3 = 2$.

Vývoj

Další řešení nalezli Huygens, Viète, Descartes a Newton.

Sázka a notář

Z dopisu W.V. (1971):

TO WHOM IT MAY CONCERN

It starts:

> Sirs, I am hopeful that someone at Lloyds of London will inform me if there are odds set on someone solving the famous problem of antiquity known as the "Duplication of The Cube".

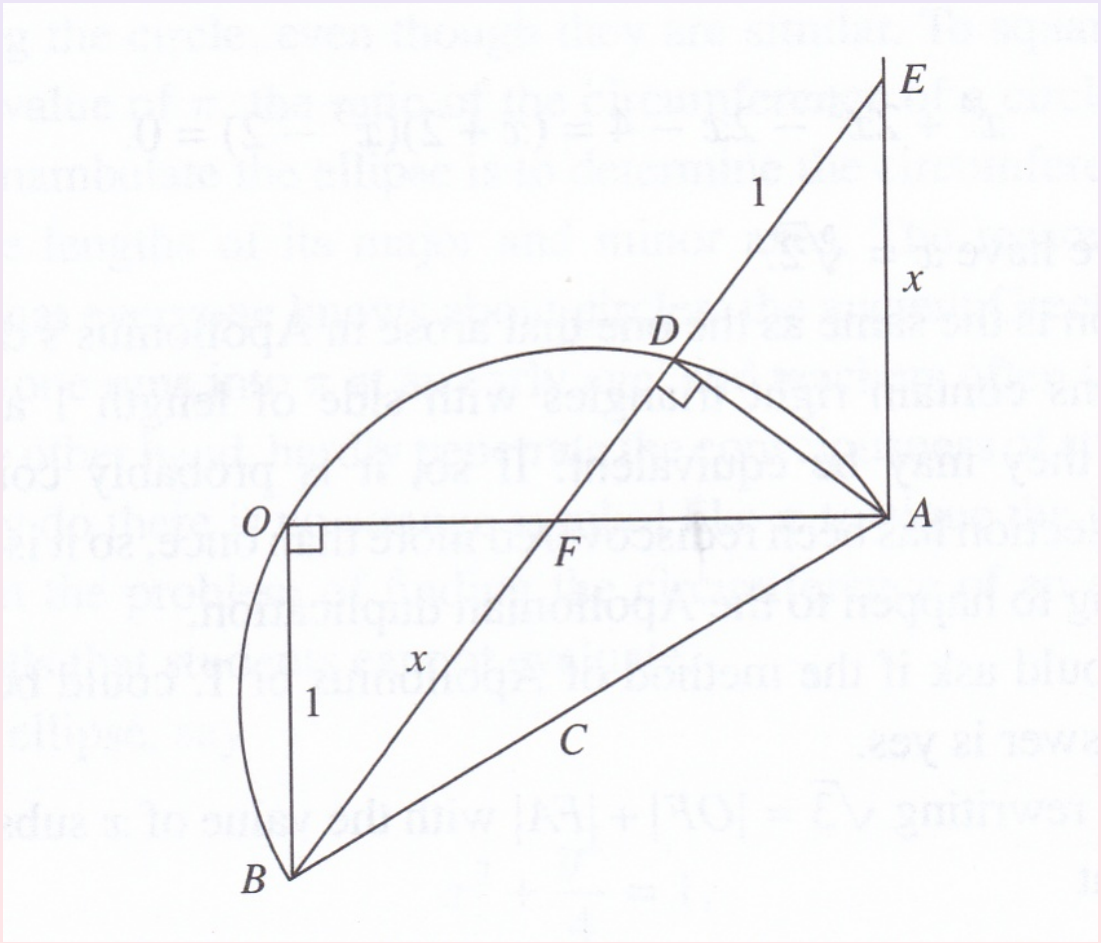
It later states:

> The Encyclopedia Britannica states that this problem cannot be solved by the use of a straight edge and compass alone, and many famous authoritative geometricians and mathematicians firmly agree with this statement. I challenge them all.
>
> Since I am challenging all past, as well as present authorities that are in agreement with the Encyclopedia Britannica the turmoil this should cause could bring some interesting results. If the odds appeal to me, I will be most happy to reveal this knowledge to all that challenge me.

Dopis obsahuje notářské osvědčení a datum expirace (!).

Řešení s prevítkem

Z devítistránkové luxusně tištěné brožurky *Duplicating the Cube* (sepsal C.T.,1981):



Pár poznámek na závěr

- Konstrukce C.T. je velice pěkná a nápaditá.
- Bohužel není eukleidovská, protože využívá označené pravítko.
- Není vyloučeno, že je ekvivalentní konstrukci Appoloniově.
- Metoda se dá využít i ke konstrukci *triplikátu* krychle.
- Navíc z analytického rozboru konstrukce plyne, že

$$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}=\sqrt{3},$$

což je netriviální identita.

Ať se i nám dostává odpovídajícího uznání!

