

Hrajeme si s řadami

Petr Vodstrčil

`petr.vodstrcil@vsb.cz`

VŠB	TECHNICKÁ	FAKULTA	KATEDRA
	UNIVERZITA	ELEKTROTECHNIKY	APLIKOVANÉ
	OSTRAVA	A INFORMATIKY	MATEMATIKY

Horní Lomná, 10.–12.6. 2024

Výjezdní zasedání KAM, seminář OSMA

Uvažujme řadu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

Zajímavé pozorování

Uvažujme řadu (se součtem $\frac{\pi^2}{6}$)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

Zajímavé pozorování

Uvažujme řadu (se součtem $\frac{\pi^2}{6}$) a její částečný součet (sečteme 1 000 000 000 členů této řady).

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Zajímavé pozorování

Uvažujme řadu (se součtem $\frac{\pi^2}{6}$) a její částečný součet (sečteme 1 000 000 000 členů této řady).

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Zajímavé pozorování

Uvažujme řadu (se součtem $\frac{\pi^2}{6}$) a její částečný součet (sečteme 1 000 000 000 členů této řady).

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Zajímavé pozorování

Uvažujme řadu (se součtem $\frac{\pi^2}{6}$) a její částečný součet (sečteme 1 000 000 000 členů této řady).

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Zajímavé pozorování

Uvažujme řadu (se součtem $\frac{\pi^2}{6}$) a její částečný součet (sečteme 1 000 000 000 členů této řady).

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Zajímavé pozorování

Uvažujme řadu (se součtem $\frac{\pi^2}{6}$) a její částečný součet (sečteme 1 000 000 000 členů této řady).

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Zajímavé pozorování

Uvažujme řadu (se součtem $\frac{\pi^2}{6}$) a její částečný součet (sečteme 1 000 000 000 členů této řady).

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Zajímavé pozorování

Uvažujme řadu (se součtem $\frac{\pi^2}{6}$) a její částečný součet (sečteme 1 000 000 000 členů této řady).

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Pokusíme se tento jev vysvětlit.

Günter M. Ziegler



MATEMATIKA VÁM TO SPOČÍTÁ

Příběhy královny věd

UNIVERSUM

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} &= \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} + \frac{1}{121} + \frac{1}{144} + \frac{1}{169} + \frac{1}{196} + \frac{1}{225} + \frac{1}{256} \\ &= 1,644\,934\,066\,848\,226\,436\,472\,415\,166\,646\,025\,189\,2 \end{aligned}$$

Pokud budeme počítat jen „konečně daleko“, nevychází nám $\frac{\pi^2}{6}$, ale menší číslo. Například mezisoučet prvního tisíce zlomků, budeme-li dávat pozor, aby počítač pracoval s dostatečnou přesností, bude

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} &= \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{1000000} = \\ &= 1,644\,933\,066\,848\,726\,436\,305\,748\,499\,979\,391\,855\,88 \end{aligned}$$

Prvních pět míst je zde už správně. Fakt, že šesté místo je špatně, nás nemusí překvapit: při sčítání zlomků se správnému konečnému výsledku blížíme jen velmi pomalu, to je známá věc. Že však sedmé, osmé, deváté, desáté, jedenácté a dvanácté místo mezisoučtu je opět správně, to už překvapující je! Skutečnost, že chyby se vyskytují přibližně na šestém, dvanáctém, osmnáctém atd. místě a velikost chyby je také celkem systematická, přičemž zde hrají důležitou roli *Bernoulliho čísla* $0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, \dots$, se nedá při počítání ručně nebo pouhým okem poznat. Nepovedlo se to ani tak vynikajícím počtářům jako Euler, Gauss nebo Riemann, ale až modernímu počítači, který má složitou matematiku k dispozici ve formě softwaru.

Formulovat a dokázat jako matematický závěr to dokonce ale přesto musí matematik s papírem a tužkou. Jako prvním se to podařilo bratrům Jonathanovi a Peteru Borweinovým společně s Karlem Dilcherem, několik let poté, co tento jev na počítači objevil Roy D. North.

Věta

Necht' (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti splňující

- $\lim a_n = \lim b_n = 0$, nebo $\lim |b_n| = +\infty$,
- (b_n) je ryze monotónní,
- $\lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \left(= \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right)$ existuje.

Pak

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}.$$

Věta

Necht' (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti splňující

- $\lim a_n = \lim b_n = 0$, nebo $\lim |b_n| = +\infty$,
- (b_n) je ryze monotónní,
- $\lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \left(= \lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right)$ existuje.

Pak

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}.$$

Důkaz.

Byl proveden v semináři OSMA dne 16.4.2024. Rukopis je dostupný na webových stránkách semináře <http://am.vsb.cz/osma>. □

Dokažme Stolzovu větu v případě, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a (b_n) je klesající.

Dokažme Stolzovu větu v případě, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a (b_n) je klesající.

Vše plyne z následujícího pomocného tvrzení:

Lemma

Nechť $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a posloupnost (b_n) je klesající. Dále necht' pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \leq \alpha.$$

Pak

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{a_n}{b_n} \leq \alpha.$$

Dokažme Stolzovu větu v případě, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a (b_n) je klesající.

Vše plyne z následujícího pomocného tvrzení:

Lemma

Nechť $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a posloupnost (b_n) je klesající. Dále necht' pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \leq \alpha.$$

Pak

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{a_n}{b_n} \leq \alpha.$$

Důkaz.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je dáno.

Dokažme Stolzovu větu v případě, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a (b_n) je klesající.

Vše plyne z následujícího pomocného tvrzení:

Lemma

Nechť $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a posloupnost (b_n) je klesající. Dále necht' pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \leq \alpha.$$

Pak

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{a_n}{b_n} \leq \alpha.$$

Důkaz.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je dáno. Uvažujme dále libovolné $m \in \mathbb{N}$, $m > n$.

Dokažme Stolzovu větu v případě, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a (b_n) je klesající.

Vše plyne z následujícího pomocného tvrzení:

Lemma

Nechť $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a posloupnost (b_n) je klesající. Dále necht' pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \leq \alpha.$$

Pak

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{a_n}{b_n} \leq \alpha.$$

Důkaz.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je dáno. Uvažujme dále libovolné $m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Z předpokladů plyne, že pro každé $i \in \{n, \dots, m-1\}$ platí $\frac{\Delta a_i}{\Delta b_i} \leq \alpha$.

Dokažme Stolzovu větu v případě, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a (b_n) je klesající.

Vše plyne z následujícího pomocného tvrzení:

Lemma

Nechť $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a posloupnost (b_n) je klesající. Dále necht' pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \leq \alpha.$$

Pak

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{a_n}{b_n} \leq \alpha.$$

Důkaz.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je dáno. Uvažujme dále libovolné $m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Z předpokladů plyne, že pro každé $i \in \{n, \dots, m-1\}$ platí $\frac{\Delta a_i}{\Delta b_i} \leq \alpha$. Posloupnost (b_n) je klesající, a proto pro každé $i \in \{n, \dots, m-1\}$ platí nerovnost $\Delta a_i \geq \alpha \Delta b_i$.

Dokažme Stolzovu větu v případě, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a (b_n) je klesající.

Vše plyne z následujícího pomocného tvrzení:

Lemma

Nechť $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a posloupnost (b_n) je klesající. Dále necht' pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \leq \alpha.$$

Pak

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{a_n}{b_n} \leq \alpha.$$

Důkaz.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je dáno. Uvažujme dále libovolné $m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Z předpokladů plyne, že pro každé $i \in \{n, \dots, m-1\}$ platí $\frac{\Delta a_i}{\Delta b_i} \leq \alpha$. Posloupnost (b_n) je klesající, a proto pro každé $i \in \{n, \dots, m-1\}$ platí nerovnost $\Delta a_i \geq \alpha \Delta b_i$. Odtud

$$\sum_{i=n}^{m-1} \Delta a_i \geq \alpha \sum_{i=n}^{m-1} \Delta b_i$$

Dokažme Stolzovu větu v případě, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a (b_n) je klesající.

Vše plyne z následujícího pomocného tvrzení:

Lemma

Nechť $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a posloupnost (b_n) je klesající. Dále necht' pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \leq \alpha.$$

Pak

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{a_n}{b_n} \leq \alpha.$$

Důkaz.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je dáno. Uvažujme dále libovolné $m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Z předpokladů plyne, že pro každé $i \in \{n, \dots, m-1\}$ platí $\frac{\Delta a_i}{\Delta b_i} \leq \alpha$. Posloupnost (b_n) je klesající, a proto pro každé $i \in \{n, \dots, m-1\}$ platí nerovnost $\Delta a_i \geq \alpha \Delta b_i$. Odtud

$$\sum_{i=n}^{m-1} \Delta a_i \geq \alpha \sum_{i=n}^{m-1} \Delta b_i \implies a_m - a_n \geq \alpha(b_m - b_n)$$

Dokažme Stolzovu větu v případě, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a (b_n) je klesající.

Vše plyne z následujícího pomocného tvrzení:

Lemma

Nechť $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a posloupnost (b_n) je klesající. Dále necht' pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \leq \alpha.$$

Pak

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{a_n}{b_n} \leq \alpha.$$

Důkaz.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je dáno. Uvažujme dále libovolné $m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Z předpokladů plyne, že pro každé $i \in \{n, \dots, m-1\}$ platí $\frac{\Delta a_i}{\Delta b_i} \leq \alpha$. Posloupnost (b_n) je klesající, a proto pro každé $i \in \{n, \dots, m-1\}$ platí nerovnost $\Delta a_i \geq \alpha \Delta b_i$. Odtud

$$\sum_{i=n}^{m-1} \Delta a_i \geq \alpha \sum_{i=n}^{m-1} \Delta b_i \implies a_m - a_n \geq \alpha(b_m - b_n) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} -a_n \geq -\alpha b_n$$

Dokažme Stolzovu větu v případě, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a (b_n) je klesající.

Vše plyne z následujícího pomocného tvrzení:

Lemma

Nechť $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a posloupnost (b_n) je klesající. Dále necht' pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} \leq \alpha.$$

Pak

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \frac{a_n}{b_n} \leq \alpha.$$

Důkaz.

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, je dáno. Uvažujme dále libovolné $m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Z předpokladů plyne, že pro každé $i \in \{n, \dots, m-1\}$ platí $\frac{\Delta a_i}{\Delta b_i} \leq \alpha$. Posloupnost (b_n) je klesající, a proto pro každé $i \in \{n, \dots, m-1\}$ platí nerovnost $\Delta a_i \geq \alpha \Delta b_i$. Odtud

$$\sum_{i=n}^{m-1} \Delta a_i \geq \alpha \sum_{i=n}^{m-1} \Delta b_i \implies a_m - a_n \geq \alpha(b_m - b_n) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} -a_n \geq -\alpha b_n \xrightarrow{b_n > 0} \frac{a_n}{b_n} \leq \alpha.$$



Uvažujme (konvergentní) řadu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

se součtem $s = \frac{\pi^2}{6}$ a odpovídající posloupnost jejích částečných součtů

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}.$$

Uvažujme (konvergentní) řadu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

se součtem $s = \frac{\pi^2}{6}$ a odpovídající posloupnost jejích částečných součtů

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}.$$

Podle definice součtu řady platí $s_n \rightarrow s$, tj. $(s - s_n) \rightarrow 0$.

Uvažujme (konvergentní) řadu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

se součtem $s = \frac{\pi^2}{6}$ a odpovídající posloupnost jejích částečných součtů

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}.$$

Podle definice součtu řady platí $s_n \rightarrow s$, tj. $(s - s_n) \rightarrow 0$.

Pokusme se zjistit, jak rychle rozdíl $(s - s_n)$ konverguje k nule.

Uvažujme (konvergentní) řadu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$$

se součtem $s = \frac{\pi^2}{6}$ a odpovídající posloupnost jejích částečných součtů

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}.$$

Podle definice součtu řady platí $s_n \rightarrow s$, tj. $(s - s_n) \rightarrow 0$.

Pokusme se zjistit, jak rychle rozdíl $(s - s_n)$ konverguje k nule.

S použitím Stolzovy věty (a s využitím rovnosti $\Delta s_n = \frac{1}{(n+1)^2}$) dostaneme

$$\lim n(s - s_n) = \lim \frac{s - s_n}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\Delta(s - s_n)}{\Delta(\frac{1}{n})} = \lim \frac{-\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{n+1} = 1.$$

Rovnost $\lim n(s - s_n) = 1$ znamená, že se rozdíl $(s - s_n)$ pro velká $n \in \mathbb{N}$ chová podobně jako $\frac{1}{n}$.

Rovnost $\lim n(s - s_n) = 1$ znamená, že se rozdíl $(s - s_n)$ pro velká $n \in \mathbb{N}$ chová podobně jako $\frac{1}{n}$.

Vztah $\lim n(s - s_n) = 1$ si lze navíc přepsat do tvaru

$$\lim n \left(s - s_n - \frac{1}{n} \right) = 0,$$

který nám říká, že výraz $(s - s_n - \frac{1}{n})$ konverguje k nule řádově rychleji než $\frac{1}{n}$.

Rovnost $\lim n(s - s_n) = 1$ znamená, že se rozdíl $(s - s_n)$ pro velká $n \in \mathbb{N}$ chová podobně jako $\frac{1}{n}$.

Vztah $\lim n(s - s_n) = 1$ si lze navíc přepsat do tvaru

$$\lim n \left(s - s_n - \frac{1}{n} \right) = 0,$$

který nám říká, že výraz $(s - s_n - \frac{1}{n})$ konverguje k nule řádově rychleji než $\frac{1}{n}$.

Proto je rozumné spočítat (opět pomocí Stolzovy věty) následující limitu:

$$\begin{aligned} \lim n^2 \left(s - s_n - \frac{1}{n} \right) &= \lim \frac{s - s_n - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{\Delta(s - s_n - \frac{1}{n})}{\Delta(\frac{1}{n^2})} = \\ &= \lim \frac{-\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}} = \lim \left(-\frac{n}{2n+1} \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Rovnost $\lim n(s - s_n) = 1$ znamená, že se rozdíl $(s - s_n)$ pro velká $n \in \mathbb{N}$ chová podobně jako $\frac{1}{n}$.

Vztah $\lim n(s - s_n) = 1$ si lze navíc přepsat do tvaru

$$\lim n \left(s - s_n - \frac{1}{n} \right) = 0,$$

který nám říká, že výraz $(s - s_n - \frac{1}{n})$ konverguje k nule řádově rychleji než $\frac{1}{n}$.

Proto je rozumné spočítat (opět pomocí Stolzovy věty) následující limitu:

$$\begin{aligned} \lim n^2 \left(s - s_n - \frac{1}{n} \right) &= \lim \frac{s - s_n - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{\Delta(s - s_n - \frac{1}{n})}{\Delta(\frac{1}{n^2})} = \\ &= \lim \frac{-\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}} = \lim \left(-\frac{n}{2n+1} \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Poslední vztah lze přepsat do tvaru $\lim n^2 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) = 0$.

$$\lim n^2 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) = 0$$

Proto se nabízí zkoumat limitu

$$\begin{aligned} \lim n^3 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) &= \lim \frac{s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{\Delta(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2})}{\Delta(\frac{1}{n^3})} = \\ &= \lim \frac{-\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^3}} = \lim \frac{n(n+1)}{6n^2 + 6n + 2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\lim n^2 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) = 0$$

Proto se nabízí zkoumat limitu

$$\begin{aligned} \lim n^3 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) &= \lim \frac{s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{\Delta(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2})}{\Delta(\frac{1}{n^3})} = \\ &= \lim \frac{-\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^3}} = \lim \frac{n(n+1)}{6n^2 + 6n + 2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

To znamená, že $\lim n^3 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} \right) = 0$.

$$\lim n^2 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) = 0$$

Proto se nabízí zkoumat limitu

$$\begin{aligned} \lim n^3 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) &= \lim \frac{s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{\Delta(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2})}{\Delta(\frac{1}{n^3})} = \\ &= \lim \frac{-\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^3}} = \lim \frac{n(n+1)}{6n^2 + 6n + 2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

To znamená, že $\lim n^3 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} \right) = 0$.

Několikanásobným opakováním stejného postupu dojdeme k závěru, že

$$\lim n^7 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7} \right) = 0.$$

$$\lim n^2 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) = 0$$

Proto se nabízí zkoumat limitu

$$\begin{aligned} \lim n^3 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) &= \lim \frac{s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{\Delta(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2})}{\Delta(\frac{1}{n^3})} = \\ &= \lim \frac{-\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^3}} = \lim \frac{n(n+1)}{6n^2 + 6n + 2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

To znamená, že $\lim n^3 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} \right) = 0$.

Několikanásobným opakováním stejného postupu dojdeme k závěru, že

$$\lim n^7 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7} \right) = 0.$$

Podrobnější analýzou bychom ukázali, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7} \right) \leq s_n \leq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} \right).$$

$$\lim n^2 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) = 0$$

$$\Delta \left(s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5} \right) = \frac{5n^2 + 5n + 1}{30n^5(n+1)^5} > 0$$

Proto se nabízí zkoumat limitu

$$\begin{aligned} \lim n^3 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) &= \lim \frac{s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{\Delta(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2})}{\Delta(\frac{1}{n^3})} = \\ &= \lim \frac{-\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^3}} = \lim \frac{n(n+1)}{6n^2 + 6n + 2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

To znamená, že $\lim n^3 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} \right) = 0$.

Několikanásobným opakováním stejného postupu dojdeme k závěru, že

$$\lim n^7 \left(s - s_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7} \right) = 0.$$

Podrobnější analýzou bychom ukázali, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7} \right) \leq s_n \leq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} \right).$$

Co jsme to teď prováděli?

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojité verzi to velmi dobře známe.

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojitě verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojité verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojitě verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojité verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojité verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojité verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojité verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojitě verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojitě verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

Funkce $(\sin x - x)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^2 .

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojité verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

Funkce $(\sin x - x)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^2 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojité verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

Funkce $(\sin x - x)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^2 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojitě verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

Funkce $(\sin x - x)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^2 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule řádově rychleji než x^3 .

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojité verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

Funkce $(\sin x - x)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^2 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule řádově rychleji než x^3 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = 0$

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojité verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

Funkce $(\sin x - x)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^2 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule řádově rychleji než x^3 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^4 .

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojitě verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

Funkce $(\sin x - x)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^2 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule řádově rychleji než x^3 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^4 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \frac{1}{120}$

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojitě verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

Funkce $(\sin x - x)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^2 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule řádově rychleji než x^3 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^4 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \frac{1}{120} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5}{x^5} = 0$

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojitě verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

Funkce $(\sin x - x)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^2 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule řádově rychleji než x^3 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^4 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \frac{1}{120} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5}{x^5} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5)$ jde k nule řádově rychleji než x^5 .

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojitě verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

Funkce $(\sin x - x)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^2 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule řádově rychleji než x^3 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^4 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \frac{1}{120} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5}{x^5} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5)$ jde k nule řádově rychleji než x^5 .

.....

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojité verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

Funkce $(\sin x - x)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^2 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule řádově rychleji než x^3 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^4 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \frac{1}{120} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5}{x^5} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5)$ jde k nule řádově rychleji než x^5 .

.....

- Pro malá x tedy platí $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5) \doteq 0$

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojité verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

Funkce $(\sin x - x)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^2 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule řádově rychleji než x^3 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^4 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \frac{1}{120} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5}{x^5} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5)$ jde k nule řádově rychleji než x^5 .

.....

- Pro malá x tedy platí $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5) \doteq 0$, tj. $\sin x \doteq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$.

Co jsme to teď prováděli?

Ve spojité verzi to velmi dobře známe. Ukažme si to na příkladě $f(x) = \sin x$ a $x \rightarrow 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

Jak rychle jde $\sin x$ k nule? Jde k nule aspoň tak rychle jako x ?

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$

Funkce $\sin x$ jde k nule stejně rychle jako x a $(\sin x - x)$ jde k nule řádově rychleji než x .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$

Funkce $(\sin x - x)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^2 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule řádově rychleji než x^3 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3)$ jde k nule dokonce řádově rychleji než x^4 .

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \frac{1}{120} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5}{x^5} = 0$

Funkce $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5)$ jde k nule řádově rychleji než x^5 .

.....

- Pro malá x tedy platí $(\sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5) \doteq 0$, tj. $\sin x \doteq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$.



Slíbené vysvětlení

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Slíbené vysvětlení

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7}\right) \leq s_n \leq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right).$$

Slíbené vysvětlení

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7}\right) \leq s_n \leq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right).$$

Proto

$$s_n \doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right)$$

Slíbené vysvětlení

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7}\right) \leq s_n \leq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right).$$

Proto

$$\begin{aligned} s_n &\doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right) = \\ &= \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{5n^3} + \frac{1}{30n^3} + \frac{1}{30n^5}\right). \end{aligned}$$

Slíbené vysvětlení

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7}\right) \leq s_n \leq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right).$$

Proto

$$\begin{aligned} s_n &\doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right) = \\ &= \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{5n^3} + \frac{1}{30n^3} + \frac{1}{30n^5}\right). \end{aligned}$$

Slíbené vysvětlení

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$-\frac{1}{10^9} \quad +\frac{5}{10^{19}} \quad -\frac{2}{10^{28}}$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7}\right) \leq s_n \leq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right).$$

Proto

$$\begin{aligned} s_n &\doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right) = \\ &= \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{5n^3} + \frac{1}{30n^3} + \frac{1}{30n^5}\right). \end{aligned}$$

Slíbené vysvětlení

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$-\frac{1}{10^9} \quad +\frac{5}{10^{19}} \quad -\frac{2}{10^{28}}$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7}\right) \leq s_n \leq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right).$$

Proto

$$\begin{aligned} s_n &\doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right) = \\ &= \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{5n^3} + \frac{1}{30n^3} + \frac{1}{30n^5}\right). \end{aligned}$$

Slíbené vysvětlení

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 \dots$$

$-\frac{1}{10^9} \quad +\frac{5}{10^{19}} \quad -\frac{2}{10^{28}}$

$$\sum_{i=1}^{10^9} \frac{1}{i^2} = 1.6449340658482264369724151664793585225522832345734651044022 \dots$$

Víme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7}\right) \leq s_n \leq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right).$$

Proto

$$\begin{aligned} s_n &\doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right) = \\ &= \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{5n^3} + \frac{1}{30n^3} + \frac{1}{30n^5}\right). \end{aligned}$$

Nejprve si přibližnou rovnost $s_n \doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right)$ přepíšeme do tvaru

$$s \doteq \left(s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5}\right).$$

Nejprve si přibližnou rovnost $s_n \doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right)$ přepíšeme do tvaru

$$s \doteq \left(s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5}\right).$$

Tu lze pak použít k numerickému výpočtu součtu naší řady s velkou přesností.

Nejprve si přibližnou rovnost $s_n \doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right)$ přepíšeme do tvaru

$$s \doteq \left(s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5}\right).$$

Tu lze pak použít k numerickému výpočtu součtu naší řady s velkou přesností.

Sečteme-li 100 členů naší řady, dostaneme výsledek 1.63498390018489286507..., který se od přesného výsledku 1.64493406684822643647... liší téměř o $\frac{1}{100}$.

Nejprve si přibližnou rovnost $s_n \doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right)$ přepíšeme do tvaru

$$s \doteq \left(s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5}\right).$$

Tu lze pak použít k numerickému výpočtu součtu naší řady s velkou přesností.

Sečteme-li 100 členů naší řady, dostaneme výsledek 1.63498390018489286507..., který se od přesného výsledku 1.64493406684822643647... liší téměř o $\frac{1}{100}$.

Využijeme-li výše uvedené přibližné rovnosti, dostaneme (po sečtení 104 čísel)

$$s \doteq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100} - \frac{1}{2 \cdot 100^2} + \frac{1}{6 \cdot 100^3} - \frac{1}{30 \cdot 100^5}$$

Nejprve si přibližnou rovnost $s_n \doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right)$ přepíšeme do tvaru

$$s \doteq \left(s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5}\right).$$

Tu lze pak použít k numerickému výpočtu součtu naší řady s velkou přesností.

Sečteme-li 100 členů naší řady, dostaneme výsledek 1.63498390018489286507..., který se od přesného výsledku 1.64493406684822643647... liší téměř o $\frac{1}{100}$.

Využijeme-li výše uvedené přibližné rovnosti, dostaneme (po sečtení 104 čísel)

$$\begin{aligned} s &\doteq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100} - \frac{1}{2 \cdot 100^2} + \frac{1}{6 \cdot 100^3} - \frac{1}{30 \cdot 100^5} = \\ &= 1.64493406684822619841 \dots \end{aligned}$$

Nejprve si přibližnou rovnost $s_n \doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5}\right)$ přepíšeme do tvaru

$$s \doteq \left(s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5}\right).$$

Tu lze pak použít k numerickému výpočtu součtu naší řady s velkou přesností.

Sečteme-li 100 členů naší řady, dostaneme výsledek 1.63498390018489286507..., který se od přesného výsledku 1.64493406684822643647... liší téměř o $\frac{1}{100}$.

Využijeme-li výše uvedené přibližné rovnosti, dostaneme (po sečtení 104 čísel)

$$\begin{aligned} s &\doteq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100} - \frac{1}{2 \cdot 100^2} + \frac{1}{6 \cdot 100^3} - \frac{1}{30 \cdot 100^5} = \\ &= 1.64493406684822619841 \dots, \end{aligned}$$

což je výsledek přesný na 15 desetinných míst!

Jiný příklad

(řada $4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \dots$ se součtem $s = \pi$)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078 \dots$$

Jiný příklad

(řada $4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \dots$ se součtem $s = \pi$)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{5 \cdot 10^8} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} = 3.1415926515897932384626433852795028841971693893751058209749447143078 \dots$$

Jiný příklad

(řada $4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \dots$ se součtem $s = \pi$)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{5 \cdot 10^8} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} = 3.1415926515897932384626433852795028841971693893751058209749447143078 \dots$$

Jiný příklad

(řada $4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \dots$ se součtem $s = \pi$)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{5 \cdot 10^8} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} = 3.1415926515897932384626433852795028841971693893751058209749447143078 \dots$$

I zde bychom mohli (podobnými technikami) ukázat, že pro každé sudé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^3} - \frac{5}{16n^5} + \frac{61}{64n^7} - \frac{1385}{256n^9}\right) \leq s_n \leq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^3} - \frac{5}{16n^5} + \frac{61}{64n^7}\right).$$

Jiný příklad

(řada $4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \dots$ se součtem $s = \pi$)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{5 \cdot 10^8} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} = 3.1415926515897932384626433852795028841971693893751058209749447143078 \dots$$

I zde bychom mohli (podobnými technikami) ukázat, že pro každé sudé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^3} - \frac{5}{16n^5} + \frac{61}{64n^7} - \frac{1385}{256n^9}\right) \leq s_n \leq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^3} - \frac{5}{16n^5} + \frac{61}{64n^7}\right).$$

Proto

$$s_n \doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^3} - \frac{5}{16n^5} + \frac{61}{64n^7}\right).$$

Jiný příklad

(řada $4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \dots$ se součtem $s = \pi$)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078 \dots$$

$$\sum_{i=1}^{5 \cdot 10^8} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} = 3.1415926515897932384626433852795028841971693893751058209749447143078 \dots$$

I zde bychom mohli (podobnými technikami) ukázat, že pro každé sudé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^3} - \frac{5}{16n^5} + \frac{61}{64n^7} - \frac{1385}{256n^9}\right) \leq s_n \leq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^3} - \frac{5}{16n^5} + \frac{61}{64n^7}\right).$$

Proto

$$s_n \doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^3} - \frac{5}{16n^5} + \frac{61}{64n^7}\right).$$

Jiný příklad

(řada $4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \dots$ se součtem $s = \pi$)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} = 3.14159265\textcolor{red}{3}58979323846264338\textcolor{red}{3}2795028841971693\textcolor{red}{9}9375105820974944\textcolor{red}{5}923078 \dots$$

$$-\frac{2}{10^9}$$

$$+\frac{2}{10^{27}}$$

$$-\frac{1}{10^{44}}$$

$$+\frac{122}{10^{63}}$$

$$\sum_{i=1}^{5 \cdot 10^8} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} = 3.14159265\textcolor{red}{1}58979323846264338\textcolor{red}{5}2795028841971693\textcolor{red}{8}9375105820974944\textcolor{red}{7}143078 \dots$$

I zde bychom mohli (podobnými technikami) ukázat, že pro každé sudé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^3} - \frac{5}{16n^5} + \frac{61}{64n^7} - \frac{1385}{256n^9}\right) \leq s_n \leq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^3} - \frac{5}{16n^5} + \frac{61}{64n^7}\right).$$

Proto

$$s_n \doteq \left(s - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^3} - \frac{5}{16n^5} + \frac{61}{64n^7}\right).$$

Numerický výpočet čísla π $\left(= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} \right)$

Zde využijeme přibližnou rovnost

$$s \doteq \left(s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^3} + \frac{5}{16n^5} - \frac{61}{64n^7} \right).$$

Numerický výpočet čísla π $\left(= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} \right)$

Zde využijeme přibližnou rovnost

$$s \doteq \left(s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^3} + \frac{5}{16n^5} - \frac{61}{64n^7} \right).$$

Sečteme-li 100 členů naší řady, dostaneme výsledek 3.13159290355855276430..., který se od přesného výsledku 3.14159265358979323846... opět liší téměř o $\frac{1}{100}$.

Numerický výpočet čísla π $\left(= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} \right)$

Zde využijeme přibližnou rovnost

$$s \doteq \left(s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^3} + \frac{5}{16n^5} - \frac{61}{64n^7} \right).$$

Sečteme-li 100 členů naší řady, dostaneme výsledek 3.13159290355855276430..., který se od přesného výsledku 3.14159265358979323846... opět liší téměř o $\frac{1}{100}$.

Využijeme-li výše uvedené přibližné rovnosti, dostaneme (po sečtení 104 čísel)

$$s \doteq \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \cdots - \frac{4}{199} + \frac{1}{100} - \frac{1}{4 \cdot 100^3} + \frac{5}{16 \cdot 100^5} - \frac{61}{64 \cdot 100^7}$$

Numerický výpočet čísla π $\left(= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} \right)$

Zde využijeme přibližnou rovnost

$$s \doteq \left(s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^3} + \frac{5}{16n^5} - \frac{61}{64n^7} \right).$$

Sečteme-li 100 členů naší řady, dostaneme výsledek 3.13159290355855276430..., který se od přesného výsledku 3.14159265358979323846... opět liší téměř o $\frac{1}{100}$.

Využijeme-li výše uvedené přibližné rovnosti, dostaneme (po sečtení 104 čísel)

$$\begin{aligned} s \doteq \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \cdots - \frac{4}{199} + \frac{1}{100} - \frac{1}{4 \cdot 100^3} + \frac{5}{16 \cdot 100^5} - \frac{61}{64 \cdot 100^7} = \\ = 3.14159265358979323305 \dots \end{aligned}$$

Numerický výpočet čísla π $\left(= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} \cdot 4}{2i-1} \right)$

Zde využijeme přibližnou rovnost

$$s \doteq \left(s_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^3} + \frac{5}{16n^5} - \frac{61}{64n^7} \right).$$

Sečteme-li 100 členů naší řady, dostaneme výsledek 3.13159290355855276430..., který se od přesného výsledku 3.14159265358979323846... opět liší téměř o $\frac{1}{100}$.

Využijeme-li výše uvedené přibližné rovnosti, dostaneme (po sečtení 104 čísel)

$$\begin{aligned} s &\doteq \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \cdots - \frac{4}{199} + \frac{1}{100} - \frac{1}{4 \cdot 100^3} + \frac{5}{16 \cdot 100^5} - \frac{61}{64 \cdot 100^7} = \\ &= 3.14159265358979323305 \dots, \end{aligned}$$

což je výsledek přesný dokonce na 17 desetinných míst!

Podobně bychom si mohli hrát například s řadami

- $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$$

Podobně bychom si mohli hrát například s řadami

- $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2,$$

Podobně bychom si mohli hrát například s řadami

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2,$

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^2}$

Podobně bychom si mohli hrát například s řadami

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2,$
- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^2} = \beta(2)$

Podobně bychom si mohli hrát například s řadami

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2,$

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^2} = \beta(2)$ $\left(\beta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^s} \dots \text{Dirichletova beta funkce} \right),$

Podobně bychom si mohli hrát například s řadami

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2,$

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^2} = \beta(2)$ $\left(\beta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^s} \dots \text{Dirichletova beta funkce} \right),$

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3}$

Podobně bychom si mohli hrát například s řadami

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2,$

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^2} = \beta(2)$ $\left(\beta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^s} \dots \text{Dirichletova beta funkce} \right),$

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} = \zeta(3)$

Podobně bychom si mohli hrát například s řadami

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2,$

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^2} = \beta(2)$ $\left(\beta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^s} \dots \text{Dirichletova beta funkce} \right),$

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} = \zeta(3)$ $\left(\zeta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s} \dots \text{Riemannova zeta funkce} \right),$

Podobně bychom si mohli hrát například s řadami

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2,$

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^2} = \beta(2)$ $\left(\beta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^s} \dots \text{Dirichletova beta funkce} \right),$

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} = \zeta(3)$ $\left(\zeta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s} \dots \text{Riemannova zeta funkce} \right),$

-

Podobně bychom si mohli hrát například s řadami

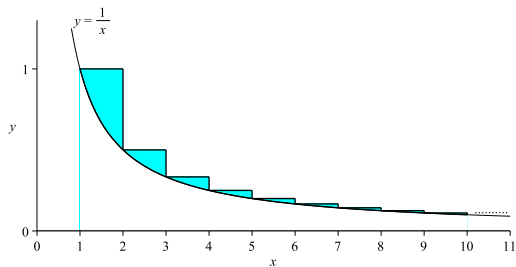
- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2,$
- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^2} = \beta(2)$ $\left(\beta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^s} \dots \text{Dirichletova beta funkce} \right),$
- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^3} = \zeta(3)$ $\left(\zeta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s} \dots \text{Riemannova zeta funkce} \right),$
-

Případně bychom se mohli pokusit numericky (a s dostatečnou přesností) stanovit hodnotu Eulerovy konstanty

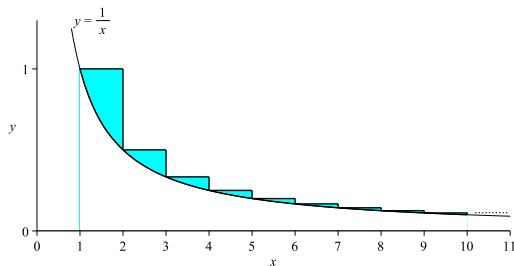
$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

$$\gamma = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.577215664901532860606512090082 \dots$$

$$\gamma = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.577215664901532860606512090082 \dots$$



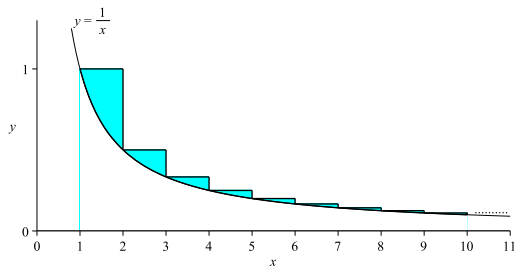
$$\gamma = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.577215664901532860606512090082 \dots$$



$$n = 100$$

$$\gamma \doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = 0.582207331651528892769134766289 \dots$$

$$\gamma = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.577215664901532860606512090082 \dots$$

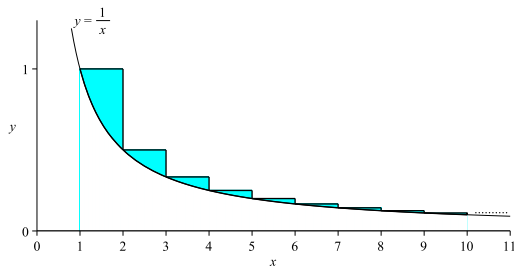


$$n = 100$$

$$\gamma \doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = 0.582207331651528892769134766289 \dots$$

Chyba je už na 2. desetinném místě.

$$\gamma = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.577215664901532860606512090082 \dots$$



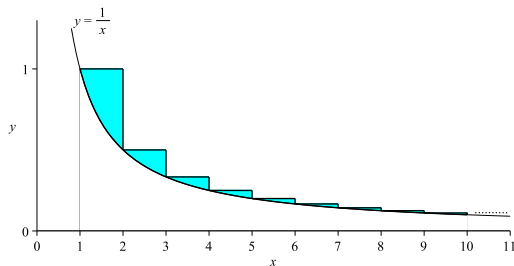
$$n = 100$$

$$\gamma \doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = 0.582207331651528892769134766289 \dots$$

Chyba je už na 2. desetinném místě.

$$\gamma \doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{252n^6}$$

$$\gamma = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.577215664901532860606512090082 \dots$$



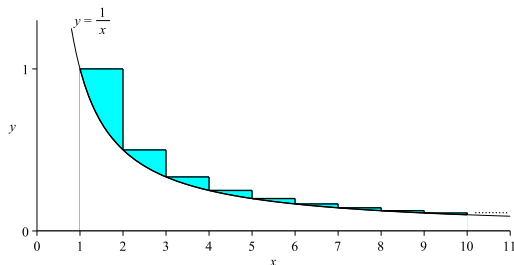
$$n = 100$$

$$\gamma \doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = 0.582207331651528892769134766289 \dots$$

Chyba je už na 2. desetinném místě.

$$\begin{aligned} \gamma &\doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{252n^6} = \\ &= 0.577215664901532861023103020257 \dots \end{aligned}$$

$$\gamma = \lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0.577215664901532860606512090082 \dots$$



$$n = 100$$

$$\gamma \doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = 0.582207331651528892769134766289 \dots$$

Chyba je už na 2. desetinném místě.

$$\gamma \doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{252n^6} =$$

$$= 0.577215664901532861023103020257 \dots$$

Chyba je až na 18. desetinném místě.

To je vše.

To je vše.

Děkuji za pozornost.

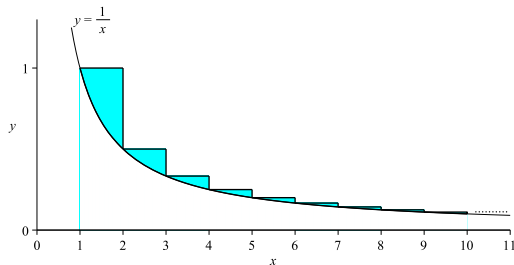
To je vše.

Děkuji za pozornost.

Eulerova konstanta – dodatek

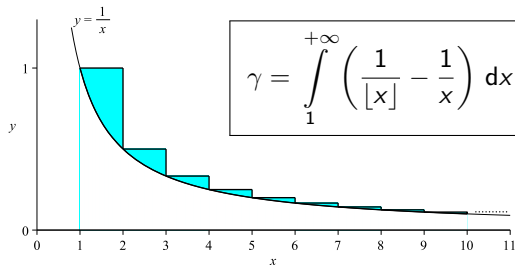
Eulerova konstanta $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.5772156649 \dots$

Geometrická interpretace Eulerovy konstanty:



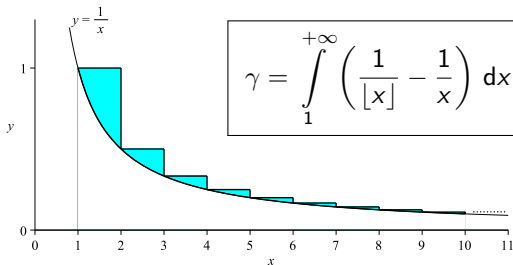
Eulerova konstanta $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.5772156649 \dots$

Geometrická interpretace Eulerovy konstanty:



Eulerova konstanta $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0.5772156649 \dots$

Geometrická interpretace Eulerovy konstanty:



Věta (Jiné vyjádření Eulerovy konstanty integrálem)

Platí

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma.$$

Důkaz vztahu $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \right).$

Uvažujme posloupnost (f_n) funkcí definovaných předpisem

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, & x \in (-\infty, n), \\ 0, & x \in \langle n, +\infty \rangle. \end{cases}$$

Není obtížné si rozmyslet, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \dots$. Navíc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^{-x}$.

Proto (Lebesgueova věta s integrovatelnou majorantou $g(x) = e^{-x} |\ln x|$, následná substituce $(1 - \frac{x}{n}) = t$, tj. $x = n(1 - t)$, $dx = -n \, dt$, a metoda per-partes) platí

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x) \ln x \, dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x \, dx \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_0^1 t^n (\ln n + \ln(1 - t)) \, dt \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\ln n}{n+1} + \int_0^1 t^n \ln(1 - t) \, dt \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\ln n}{n+1} + \underbrace{\left[\frac{t^{n+1} - 1}{n+1} \ln(1 - t) \right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t} \, dt \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln n - \int_0^1 (1 + t + t^2 + \dots + t^n) \, dt \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \left(\ln n - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \right) = -\gamma. \end{aligned}$$



Souvislost s gama funkcí

Připomeňme, že gama funkce je (pro každé $x \in \mathbb{R}^+$) definována předpisem

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Souvislost s gama funkcí

Připomeňme, že gama funkce je (pro každé $x \in \mathbb{R}^+$) definována předpisem

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Je snadným cvičením ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Souvislost s gama funkcí

Připomeňme, že gama funkce je (pro každé $x \in \mathbb{R}^+$) definována předpisem

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Je snadným cvičením ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}^+$

$$\Gamma'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right)$$

Souvislost s gama funkcí

Připomeňme, že gama funkce je (pro každé $x \in \mathbb{R}^+$) definována předpisem

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Je snadným cvičením ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ (je potřeba si rozmyslet, že můžeme zaměnit integrál a derivaci) platí

$$\Gamma'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} (t^{x-1} e^{-t}) dt$$

Souvislost s gama funkcí

Připomeňme, že gama funkce je (pro každé $x \in \mathbb{R}^+$) definována předpisem

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Je snadným cvičením ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ (je potřeba si rozmyslet, že můžeme zaměnit integrál a derivaci) platí

$$\Gamma'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} (t^{x-1} e^{-t}) dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt.$$

Souvislost s gama funkcí

Připomeňme, že gama funkce je (pro každé $x \in \mathbb{R}^+$) definována předpisem

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Je snadným cvičením ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ (je potřeba si rozmyslet, že můžeme zaměnit integrál a derivaci) platí

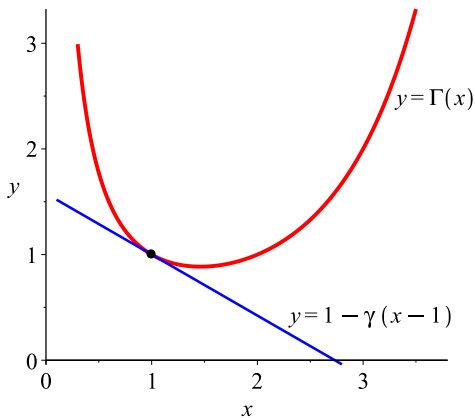
$$\Gamma'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \right) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} (t^{x-1} e^{-t}) dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt.$$

Odtud (dosazením $x = 1$) dostaneme

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = -\gamma.$$

Graf gama funkce $(\Gamma'(1) = -\gamma)$

Směrnice tečny sestrojené ke grafu gama funkce v bodě $(1, 1)$ je $-\gamma$.



Souvislost s Riemannovou zeta funkcí

Připomeňme, že pro každé $x \in (1, +\infty)$ je

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Souvislost s Riemannovou zeta funkcí

Připomeňme, že pro každé $x \in (1, +\infty)$ je

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \left(\zeta(x) - \frac{1}{x-1} \right) = \gamma.$$

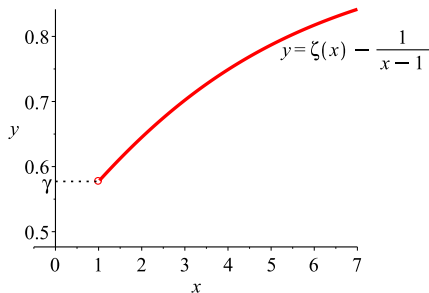
Souvislost s Riemannovou zeta funkcí

Připomeňme, že pro každé $x \in (1, +\infty)$ je

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Platí

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \left(\zeta(x) - \frac{1}{x-1} \right) = \gamma.$$



Další vyjádření Eulerovy konstanty integrálem

Platí

$$-\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx$$

Další vyjádření Eulerovy konstanty integrálem

Platí

$$-\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} x = -\ln t \\ dx = -\frac{1}{t} dt \end{array} \right| = \int_1^0 e^{-(-\ln t)} \cdot \ln(-\ln t) \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) dt$$

Další vyjádření Eulerovy konstanty integrálem

Platí

$$\begin{aligned} -\gamma &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} x = -\ln t \\ dx = -\frac{1}{t} dt \end{array} \right| = \int_1^0 e^{-(-\ln t)} \cdot \ln(-\ln t) \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) dt = \\ &= \int_0^1 \ln(-\ln t) \, dt \end{aligned}$$

Další vyjádření Eulerovy konstanty integrálem

Platí

$$\begin{aligned} -\gamma &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} x = -\ln t \\ dx = -\frac{1}{t} dt \end{array} \right| = \int_1^0 e^{-(-\ln t)} \cdot \ln(-\ln t) \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) dt = \\ &= \int_0^1 \ln(-\ln t) \, dt = \int_0^1 \ln\left(\ln \frac{1}{t}\right) dt \end{aligned}$$

Další vyjádření Eulerovy konstanty integrálem

Platí

$$\begin{aligned} -\gamma &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} x = -\ln t \\ dx = -\frac{1}{t} dt \end{array} \right| = \int_1^0 e^{-(-\ln t)} \cdot \ln(-\ln t) \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) dt = \\ &= \int_0^1 \ln(-\ln t) \, dt = \int_0^1 \ln\left(\ln \frac{1}{t}\right) dt = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{s} \\ dt = -\frac{1}{s^2} ds \end{array} \right| = \\ &= \int_{+\infty}^1 \ln(\ln s) \cdot \left(-\frac{1}{s^2}\right) ds \end{aligned}$$

Další vyjádření Eulerovy konstanty integrálem

Platí

$$\begin{aligned} -\gamma &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} x = -\ln t \\ dx = -\frac{1}{t} dt \end{array} \right| = \int_1^0 e^{-(-\ln t)} \cdot \ln(-\ln t) \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) dt = \\ &= \int_0^1 \ln(-\ln t) \, dt = \int_0^1 \ln\left(\ln \frac{1}{t}\right) dt = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{s} \\ dt = -\frac{1}{s^2} ds \end{array} \right| = \\ &= \int_{+\infty}^1 \ln(\ln s) \cdot \left(-\frac{1}{s^2}\right) ds = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(\ln s)}{s^2} ds. \end{aligned}$$

Další vyjádření Eulerovy konstanty integrálem

Platí

$$\begin{aligned} -\gamma &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} x = -\ln t \\ dx = -\frac{1}{t} dt \end{array} \right| = \int_1^0 e^{-(-\ln t)} \cdot \ln(-\ln t) \cdot \left(-\frac{1}{t}\right) dt = \\ &= \int_0^1 \ln(-\ln t) \, dt = \int_0^1 \ln\left(\ln \frac{1}{t}\right) dt = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{s} \\ dt = -\frac{1}{s^2} ds \end{array} \right| = \\ &= \int_{+\infty}^1 \ln(\ln s) \cdot \left(-\frac{1}{s^2}\right) ds = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(\ln s)}{s^2} ds. \end{aligned}$$

Dostali jsme další dvě pěkná integrální vyjádření Eulerovy konstanty.

A to už je opravdu vše.