



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



O možnostech radikalismu

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

OSMA, 24.11.2020

0 Úvod

Co je to radikál

Zastánce radikalismu je označován jako radikalista nebo radikál.

Zastánce radikalismu je označován jako radikalista nebo radikál.

Slovo radikál má ještě další dva významy. První se týká chemického pojmosloví a pojednává o něm článek radikál. Druhý pochází z pojmosloví jazykovědného a označuje skupinu souhlásek, která je nositeli významu. Tato skupina se vyskytuje především v semitských jazycích a v češtině ji nenajdeme.

Zastánce radikalismu je označován jako radikalista nebo radikál.

Slovo radikál má ještě další dva významy. První se týká chemického pojmosloví a pojednává o něm článek radikál. Druhý pochází z pojmosloví jazykovědného a označuje skupinu souhlásek, která je nositeli významu. Tato skupina se vyskytuje především v semitských jazycích a v češtině ji nenajdeme.

Neplést s extremismem!

1 Rozcvička

Druhý stupeň (žák je povzbuzován, ať se to naučí)

Druhý stupeň (žák je povzbuzován, ať se to naučí)

Rovnice

Druhý stupeň (žák je povzbuzován, ať se to naučí)

Rovnice

$$x^2 + px + q = 0$$

Druhý stupeň (žák je povzbuzován, ať se to naučí)

Rovnice

$$x^2 + px + q = 0$$

má kořeny

Druhý stupeň (žák je povzbuzován, ať se to naučí)

Rovnice

$$x^2 + px + q = 0$$

má kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Druhý stupeň (žák je povzbuzován, ať se to naučí)

Rovnice

$$x^2 + px + q = 0$$

má kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Kořeny lze vyjádřit pomocí koeficientů a operací $+$, $-$, $\cdot$ a $\sqrt{}$.

Třetí stupeň

Obecnou rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Třetí stupeň

Obecnou rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

zredukujeme na

Obecnou rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

zredukujeme na

$$y^3 + py + q = 0$$

Třetí stupeň

Obecnou rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

zredukujeme na

$$y^3 + py + q = 0$$

substitucí

$$x = y - \frac{a}{3}.$$

Třetí stupeň po redukci (žák je povzbuzován, ať se to neučí)

Třetí stupeň po redukci (žák je povzbuzován, ať se to neučí)

Rovnice

Rovnice

$$x^3 + px + q = 0$$

Třetí stupeň po redukci (žák je povzbuzován, ať se to neučí)

Rovnice

$$x^3 + px + q = 0 \quad (1)$$

má kořeny tvaru

Třetí stupeň po redukci (žák je povzbuzován, ať se to neučí)

Rovnice

$$x^3 + px + q = 0 \quad (1)$$

má kořeny tvaru

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Třetí stupeň po redukci (žák je povzbuzován, ať se to neučí)

Rovnice

$$x^3 + px + q = 0 \quad (1)$$

má kořeny tvaru

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Kořeny lze vyjádřit pomocí koeficientů a operací $+$, $-$, $\cdot$, $\sqrt{}$ a $\sqrt[3]{}$.

Důkaz vzorce pro kořen kubické rovnice

Důkaz vzorce pro kořen kubické rovnice

Označme

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Důkaz vzorce pro kořen kubické rovnice

Označme

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Potom

$$A + B = x, \quad A^3 + B^3 = -q, \quad AB = -\frac{p}{3},$$

Důkaz vzorce pro kořen kubické rovnice

Označme

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Potom

$$A + B = x, \quad A^3 + B^3 = -q, \quad AB = -\frac{p}{3},$$

a tedy

Důkaz vzorce pro kořen kubické rovnice

Označme

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Potom

$$A + B = x, \quad A^3 + B^3 = -q, \quad AB = -\frac{p}{3},$$

a tedy

$$x^3 = (A + B)^3 = A^3 + 3AB(A + B) + B^3 = -q - px.$$

Co je na čísle 4 tak zvláštního?

Co je na čísle 4 tak zvláštního?

Rovnici

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Co je na číse 4 tak zvláštního?

Rovnici

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2)$$

lze (obdobnou substitucí) zredukovat na

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \quad (3)$$

Co je na čísle 4 tak zvláštního?

Rovnici

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2)$$

lze (obdobnou substitucí) zredukovat na

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \quad (3)$$

Formule ponížení: (3) lze zredukovat na rovnici stupně 3.

Co je na číse 4 tak zvláštního?

Rovnici

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2)$$

lze (obdobnou substitucí) zredukovat na

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \quad (3)$$

Formule ponížení: (3) lze zredukovat na rovnici stupně 3.

Tento jev *nemá* obdoby pro žádné $n \neq 4$.

$4 \mapsto 3$ osnova

1. Dáno

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \quad (4)$$

1. Dáno

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \quad (4)$$

2. Vyřeš

$$y^3 + (p^2 - 2p - 4r)y + q^2 = 0. \quad (5)$$

1. Dáno

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \quad (4)$$

2. Vyřeš

$$y^3 + (p^2 - 2p - 4r)y + q^2 = 0. \quad (5)$$

3. Necht' y_1, y_2, y_3 jsou kořeny (5).

1. Dáno

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \quad (4)$$

2. Vyřeš

$$y^3 + (p^2 - 2p - 4r)y + q^2 = 0. \quad (5)$$

3. Necht' y_1, y_2, y_3 jsou kořeny (5).

4. Uvažuj OSMICI

$$\frac{\pm\sqrt{-y_1} \pm \sqrt{-y_2} \pm \sqrt{-y_3}}{2}.$$

1. Dáno

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \quad (4)$$

2. Vyřeš

$$y^3 + (p^2 - 2p - 4r)y + q^2 = 0. \quad (5)$$

3. Necht' y_1, y_2, y_3 jsou kořeny (5).

4. Uvažuj OSMICI

$$\frac{\pm\sqrt{-y_1} \pm \sqrt{-y_2} \pm \sqrt{-y_3}}{2}.$$

5. Čtyři z nich budou kořeny (4). Zbylé budou mít nesprávná znaménka. Dosad' a urči.

K otázce, co je na čísle 4 tak zvláštního

K otázce, co je na čísle 4 tak zvláštního

Z mnoha různých odpovědí vybíráme: pohled' na kombinatoriku!

K otázce, co je na čísle 4 tak zvláštního

Z mnoha různých odpovědí vybíráme: pohled' na kombinatoriku!

Úloha. Kolika způsoby lze z 20 studentů vybrat presidenta a dva ministry?

K otázce, co je na čísle 4 tak zvláštního

Z mnoha různých odpovědí vybíráme: pohled' na kombinatoriku!

Úloha. Kolika způsoby lze z 20 studentů vybrat presidenta a dva ministry?

Odpověď. 3420.

K otázce, co je na čísle 4 tak zvláštního

Z mnoha různých odpovědí vybíráme: pohled' na kombinatoriku!

Úloha. Kolika způsoby lze z 20 studentů vybrat presidenta a dva ministry?

Odpověď. 3420.

Úloha. A kolik z nich by znamenalo pronikavé zlepšení situace?

K otázce, co je na čísle 4 tak zvláštního

Z mnoha různých odpovědí vybíráme: pohled' na kombinatoriku!

Úloha. Kolika způsoby lze z 20 studentů vybrat presidenta a dva ministry?

Odpověď. 3420.

Úloha. A kolik z nich by znamenalo pronikavé zlepšení situace?

Odpověď. Všechny.

K otázce, co je na čísle 4 tak zvláštního

Z mnoha různých odpovědí vybíráme: pohled' na kombinatoriku!

Úloha. Kolika způsoby lze z 20 studentů vybrat presidenta a dva ministry?

Odpověď. 3420.

Úloha. A kolik z nich by znamenalo pronikavé zlepšení situace?

Odpověď. Všechny.

Úloha. Kolika způsoby lze vytáhnout dvě zelené a tři červené koule z pytle obsahujícího po 10 koulích každé barvy?

K otázce, co je na čísle 4 tak zvláštního

Z mnoha různých odpovědí vybíráme: pohled' na kombinatoriku!

Úloha. Kolika způsoby lze z 20 studentů vybrat presidenta a dva ministry?

Odpověď'. 3420.

Úloha. A kolik z nich by znamenalo pronikavé zlepšení situace?

Odpověď'. Všechny.

Úloha. Kolika způsoby lze vytáhnout dvě zelené a tři červené koule z pytle obsahujícího po 10 koulích každé barvy?

Odpověď'. 5400.

K otázce, co je na čísle 4 tak zvláštního

K otázce, co je na čísle 4 tak zvláštního

Pozorování. Výsledkem kombinatorických úloh je obvykle mnohem větší číslo, než čísla vyskytující se v zadání.

K otázce, co je na čísle 4 tak zvláštního

Pozorování. Výsledkem kombinatorických úloh je obvykle mnohem větší číslo, než čísla vyskytující se v zadání.

Otázka. Najdi kombinatorický problém, u kterého je výsledek menším číslem, než zadání.

K otázce, co je na čísle 4 tak zvláštního

Pozorování. Výsledkem kombinatorických úloh je obvykle mnohem větší číslo, než čísla vyskytující se v zadání.

Otázka. Najdi kombinatorický problém, u kterého je výsledek menším číslem, než zadání.

Problém. Kolika způsoby lze rozdělit 4 objekty do dvojic?

K otázce, co je na čísle 4 tak zvláštního

Pozorování. Výsledkem kombinatorických úloh je obvykle mnohem větší číslo, než čísla vyskytující se v zadání.

Otázka. Najdi kombinatorický problém, u kterého je výsledek menším číslem, než zadání.

Problém. Kolika způsoby lze rozdělit 4 objekty do dvojic?

Odpověď. 3.

K otázce, co je na čísle 4 tak zvláštního

Pozorování. Výsledkem kombinatorických úloh je obvykle mnohem větší číslo, než čísla vyskytující se v zadání.

Otázka. Najdi kombinatorický problém, u kterého je výsledek menším číslem, než zadání.

Problém. Kolika způsoby lze rozdělit 4 objekty do dvojic?

Odpověď. 3.

Kupodivu tento fakt má zásadní význam pro redukci rovnice stupně 4 na rovnici stupně 3.

2 Radikalismus v matematice

Uvažujme algebraickou rovnici

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0. \quad (6)$$

Uvažujme algebraickou rovnici

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0. \quad (6)$$

Řekneme, že rovnice (6) *připouští radikální řešení*, jestliže existuje vzorec pro její kořeny formulovaný pouze pomocí koeficientů a operací $+$, $-$, $\cdot$ a $\sqrt[n]{}$.

Uvažujme algebraickou rovnici

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0. \quad (6)$$

Řekneme, že rovnice (6) *připouští radikální řešení*, jestliže existuje vzorec pro její kořeny formulovaný pouze pomocí koeficientů a operací $+$, $-$, $\cdot$ a $\sqrt[n]{}$.

Viděli jsme, že všechny rovnice stupňů ≤ 4 připouštějí radikální řešení.

Uvažujme algebraickou rovnici

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0. \quad (6)$$

Řekneme, že rovnice (6) *připouští radikální řešení*, jestliže existuje vzorec pro její kořeny formulovaný pouze pomocí koeficientů a operací $+$, $-$, $\cdot$ a $\sqrt[n]{}$.

Viděli jsme, že všechny rovnice stupňů ≤ 4 připouštějí radikální řešení.

Budeme se zabývat otázkou, jak je tomu u vyšších stupňů.

Cesta k radikalismu

Vraťme se ke kvadratické rovnici

$$x^2 + px + q = 0.$$

Vraťme se ke kvadratické rovnici

$$x^2 + px + q = 0.$$

Představme si, že se ve vzorečku pro její kořeny

Vraťme se ke kvadratické rovnici

$$x^2 + px + q = 0.$$

Představme si, že se ve vzorečku pro její kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

chceme zbavit symbolu $\sqrt{}$.

Vraťme se ke kvadratické rovnici

$$x^2 + px + q = 0.$$

Představme si, že se ve vzorečku pro její kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

chceme zbavit symbolu $\sqrt{}$.

Jak to provedeme?

Radikální řešení kvadratické rovnice

Utvoříme soustavu

$$\begin{aligned}x_1^2 &= p^2 - 4q, \\x_2 &= -\frac{p}{2} + \frac{x_1}{2}.\end{aligned}$$

Radikální řešení kvadratické rovnice

Utvoříme soustavu

$$\begin{aligned}x_1^2 &= p^2 - 4q, \\x_2 &= -\frac{p}{2} + \frac{x_1}{2}.\end{aligned}$$

Ze zadání rovnice známe p, q .

Utvoříme soustavu

$$\begin{aligned}x_1^2 &= p^2 - 4q, \\x_2 &= -\frac{p}{2} + \frac{x_1}{2}.\end{aligned}$$

Ze zadání rovnice známe p, q .

Z nich vypočteme x_1 a potom x_2 . Hodnota x_2 bude řešení.

Utvoříme soustavu

$$\begin{aligned}x_1^2 &= p^2 - 4q, \\x_2 &= -\frac{p}{2} + \frac{x_1}{2}.\end{aligned}$$

Ze zadání rovnice známe p, q .

Z nich vypočteme x_1 a potom x_2 . Hodnota x_2 bude řešení.

Protože x_1 není jednoznačné, není jednoznačné ani x_2 .

Utvoříme soustavu

$$\begin{aligned}x_1^2 &= p^2 - 4q, \\x_2 &= -\frac{p}{2} + \frac{x_1}{2}.\end{aligned}$$

Ze zadání rovnice známe p, q .

Z nich vypočteme x_1 a potom x_2 . Hodnota x_2 bude řešení.

Protože x_1 není jednoznačné, není jednoznačné ani x_2 .

Takto dostaneme *všechna* řešení rovnice.

Radikální řešení kubické rovnice

Radikální řešení kubické rovnice

Podobně pro (kubickou) rovnici (1) utvoříme soustavu

$$x_1^2 = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4},$$

$$x_2^3 = -\frac{q}{2} + x_1,$$

$$x_3^3 = -\frac{q}{2} - x_1,$$

$$x_4 = x_2 + x_3.$$

Dostaneme dvě hodnoty pro x_1 a tři pro x_2 i x_3 . Teoreticky dostaneme až 36 hodnot pro x_4 , nejvýše 9 z nich ale bude různých. Tři z nich budou řešení (1). Zbylé hodnoty budou řešení rovnic

$$x^3 + \varepsilon_3 x + q = 0 \quad \text{a} \quad x^3 + \overline{\varepsilon_3} x + q = 0,$$

kde $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ je primitivní třetí komplexní odmocnina z 1.

Radikální řešení kubické rovnice

Podobně pro (kubickou) rovnici (1) utvoříme soustavu

$$x_1^2 = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4},$$

$$x_2^3 = -\frac{q}{2} + x_1,$$

$$x_3^3 = -\frac{q}{2} - x_1,$$

$$x_4 = x_2 + x_3.$$

Dostaneme dvě hodnoty pro x_1 a tři pro x_2 i x_3 .

Podobně pro (kubickou) rovnici (1) utvoříme soustavu

$$x_1^2 = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4},$$

$$x_2^3 = -\frac{q}{2} + x_1,$$

$$x_3^3 = -\frac{q}{2} - x_1,$$

$$x_4 = x_2 + x_3.$$

Dostaneme dvě hodnoty pro x_1 a tři pro x_2 i x_3 . Teoreticky dostaneme až 36 hodnot pro x_4 , nejvýše 9 z nich ale bude různých.

Podobně pro (kubickou) rovnici (1) utvoříme soustavu

$$x_1^2 = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4},$$

$$x_2^3 = -\frac{q}{2} + x_1,$$

$$x_3^3 = -\frac{q}{2} - x_1,$$

$$x_4 = x_2 + x_3.$$

Dostaneme dvě hodnoty pro x_1 a tři pro x_2 i x_3 . Teoreticky dostaneme až 36 hodnot pro x_4 , nejvýše 9 z nich ale bude různých. Tři z nich budou řešení (1).

Radikální řešení kubické rovnice

Podobně pro (kubickou) rovnici (1) utvoříme soustavu

$$x_1^2 = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4},$$

$$x_2^3 = -\frac{q}{2} + x_1,$$

$$x_3^3 = -\frac{q}{2} - x_1,$$

$$x_4 = x_2 + x_3.$$

Dostaneme dvě hodnoty pro x_1 a tři pro x_2 i x_3 . Teoreticky dostaneme až 36 hodnot pro x_4 , nejvýše 9 z nich ale bude různých. Tři z nich budou řešení (1). Zbylé hodnoty budou řešení rovnic

$$x^3 + \varepsilon_3 x + q = 0 \quad \text{a} \quad x^3 + \overline{\varepsilon_3} x + q = 0,$$

kde $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ je primitivní třetí komplexní odmocnina z 1.

3 Co máme v plánu

Náš dnešní cíl

Věta

Rovnice

$$x^5 - x + a = 0 \quad (7)$$

nepřipouští radikální řešení.

Pomocný výsledek

Lemma

Je-li b vícenásobný kořen (7), pak $5b^4 = 1$.

Pomocný výsledek - důkaz

Proof.

$$x^5 - x + a = (x - b)^2 p(x), \quad \text{st } p = 3.$$

Polož $x = b - \varepsilon$, ε hodně malé (analýza!), pak

$$\begin{aligned}(b + \varepsilon)^5 - (b + \varepsilon) + a &= \varepsilon^2 p(b + \varepsilon), \\ b^5 + 5\varepsilon b^4 + \varepsilon^2(10b^3 + 10b^2\varepsilon + 5b\varepsilon^2 + \varepsilon^3) - b - \varepsilon + a \\ &= \varepsilon^2 p(b + \varepsilon),\end{aligned}$$

vyhod' $b^5 - b + a$ a vyděl ε , dostaneš

$$5b^4 - 1 = \varepsilon(p(b + \varepsilon) - 10b^3 - 10b^2\varepsilon - 5b\varepsilon^2 - \varepsilon^3),$$

což platí pro každé ε , takže $5b^4 - 1$ je strašně mrňavé. □

Nebezpečné hodnoty parametru a

Nebezpečné hodnoty parametru a

Tvrzení

Má-li (7) vícenásobný kořen, pak $a^4 = \frac{4^4}{5^5}$, tj.

$$a = \pm \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}, \quad \text{nebo} \quad a = \pm \frac{4i}{5\sqrt[4]{5}}.$$

Proof.

Dle lemmatu je vícenásobný kořen b rovnice (7) povinně tvaru $5b^4 = 1$. Tedy

$$a^4 = (b - b^5)^4 = b^4(1 - b^4)^4 = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5} \right)^4 = \frac{4^4}{5^5}.$$



Variace parametru a a její vliv na všechno ostatní

Variace parametru a a její vliv na všechno ostatní

Je-li $a = 0$, pak rovnice má kořeny $0, \pm 1, \pm i$.

Variace parametru a a její vliv na všechno ostatní

Je-li $a = 0$, pak rovnice má kořeny $0, \pm 1, \pm i$.

Měníme-li parametr a , pak se mění i kořeny, ale nedojde k jejich kolisi, pakliže se vyhneme *nebezpečným hodnotám* $a = \pm \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$,
 $a = \pm \frac{4i}{5\sqrt[4]{5}}$.

Variace parametru a a její vliv na všechno ostatní

Je-li $a = 0$, pak rovnice má kořeny $0, \pm 1, \pm i$.

Měníme-li parametr a , pak se mění i kořeny, ale nedojde k jejich kolisi, pakliže se vyhneme *nebezpečným hodnotám* $a = \pm \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$,
 $a = \pm \frac{4i}{5\sqrt[4]{5}}$.

Otázka. Co se stane, když se a vydá na procházku po uzavřené pěšince (*smyčce*) začínající i končící v 0?

Variace parametru a a její vliv na všechno ostatní

Je-li $a = 0$, pak rovnice má kořeny $0, \pm 1, \pm i$.

Měníme-li parametr a , pak se mění i kořeny, ale nedojde k jejich kolisi, pakliže se vyhneme *nebezpečným hodnotám* $a = \pm \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$,
 $a = \pm \frac{4i}{5\sqrt[4]{5}}$.

Otázka. Co se stane, když se a vydá na procházku po uzavřené pěšince (*smyčce*) začínající i končící v 0?

Odpověď. Pět kořenů se vrátí zpět na posice $0, \pm 1, \pm i$.

Variace parametru a a její vliv na všechno ostatní

Je-li $a = 0$, pak rovnice má kořeny $0, \pm 1, \pm i$.

Měníme-li parametr a , pak se mění i kořeny, ale nedojde k jejich kolisi, pakliže se vyhneme *nebezpečným hodnotám* $a = \pm \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$,
 $a = \pm \frac{4i}{5\sqrt[4]{5}}$.

Otázka. Co se stane, když se a vydá na procházku po uzavřené pěšince (*smyčce*) začínající i končící v 0?

Odpověď. Pět kořenů se vrátí zpět na posice $0, \pm 1, \pm i$.

Otázka. Vráť se ale každý kořen na *své* místo?

Variace parametru a a její vliv na všechno ostatní

Je-li $a = 0$, pak rovnice má kořeny $0, \pm 1, \pm i$.

Měníme-li parametr a , pak se mění i kořeny, ale nedojde k jejich kolisi, pakliže se vyhneme *nebezpečným hodnotám* $a = \pm \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$,
 $a = \pm \frac{4i}{5\sqrt[4]{5}}$.

Otázka. Co se stane, když se a vydá na procházku po uzavřené pěšince (*smýčce*) začínající i končící v 0?

Odpověď. Pět kořenů se vrátí zpět na posice $0, \pm 1, \pm i$.

Otázka. Vrátí se ale každý kořen na *své* místo?

Odpověď. Ani omylem!

Procházka parametru a a permutace kořenů

Procházka parametru a a permutace kořenů

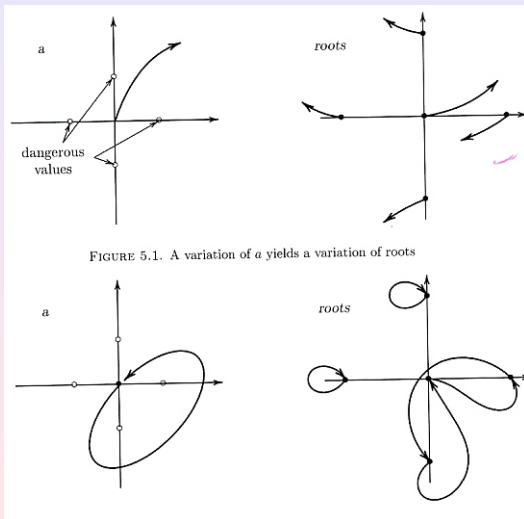


FIGURE 5.1. A variation of a yields a variation of roots

Permutace a jejich vliv na všechno ostatní

Permutace a jejich vliv na všechno ostatní

Permutaci pěti prvků $(1, 2, 3, 4, 5)$ značíme $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$. Tento symbol znamená přesuny

$$1 \mapsto i_1, \quad 2 \mapsto i_2, \quad 3 \mapsto i_3, \quad 4 \mapsto i_4, \quad 5 \mapsto i_5.$$

Permutace a jejich vliv na všechno ostatní

Permutaci pěti prvků $(1, 2, 3, 4, 5)$ značíme $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$. Tento symbol znamená přesuny

$$1 \mapsto i_1, \quad 2 \mapsto i_2, \quad 3 \mapsto i_3, \quad 4 \mapsto i_4, \quad 5 \mapsto i_5.$$

Násobení permutací $\alpha \cdot \beta$, není komutativní, příklad:

$$(21435) \cdot (13254) = (31524),$$

$$(13254) \cdot (21435) = (24153).$$

Permutace a jejich vliv na všechno ostatní

Permutaci pěti prvků $(1, 2, 3, 4, 5)$ značíme $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$. Tento symbol znamená přesuny

$$1 \mapsto i_1, \quad 2 \mapsto i_2, \quad 3 \mapsto i_3, \quad 4 \mapsto i_4, \quad 5 \mapsto i_5.$$

Násobení permutací $\alpha \cdot \beta$, není komutativní, příklad:

$$(21435) \cdot (13254) = (31524),$$

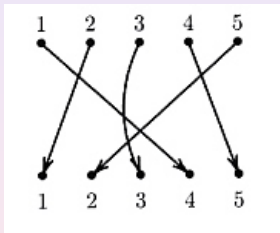
$$(13254) \cdot (21435) = (24153).$$

Inversní permutace α^{-1} (obrat šipky), platí

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \alpha = I = (12345).$$

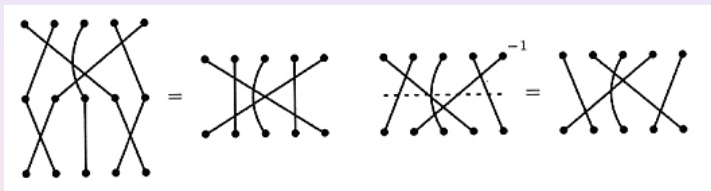
Permutace

Permutace

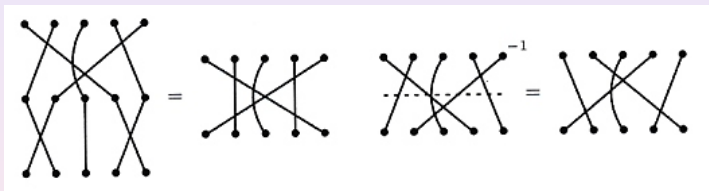


Operace s permutacemi

Operace s permutacemi



Operace s permutacemi



Grafické znázornění násobení a inverse.

Počet neřádů permutace

Počet neřádů je počet párů $[s, t]$ splňujících $s < t$ a $i_s > i_t$.

Počet neřádů je počet párů $[s, t]$ splňujících $s < t$ a $i_s > i_t$.

Počet neřádů se pohybuje od 0 (pro (12345)) po 10 (pro (54321)).

Počet neřádů permutace

Počet neřádů je počet párů $[s, t]$ splňujících $s < t$ a $i_s > i_t$.

Počet neřádů se pohybuje od 0 (pro (12345)) po 10 (pro (54321)).

Počet neřádů se nejlépe počítá pomocí diagramu (neřád = křížovatka).

Parita permutace

Parita permutace

Hlavní charakteristikou permutace ale není počet neřádů, nýbrž jejich *parita*.

Hlavní charakteristikou permutace ale není počet neřádů, nýbrž jejich *parita*.

Permutace se zove *lichá* (*sudá*), jestliže je počet jejích neřádů lichý (sudý).

Hlavní charakteristikou permutace ale není počet neřádů, nýbrž jejich *parita*.

Permutace se zove *lichá* (*sudá*), jestliže je počet jejích neřádů lichý (sudý).

Pozorování.

$\text{lichá} \cdot \text{lichá} = \text{sudá} \cdot \text{sudá} = \text{sudá},$

$\text{lichá} \cdot \text{sudá} = \text{sudá} \cdot \text{lichá} = \text{lichá}.$

Užitečný důsledek

Tvrzení

(a) α a α^{-1} mají stejnou paritu,

Tvrzení

- (a) α a α^{-1} mají stejnou paritu,*
- (b) existuje právě 60 sudých a právě 60 lichých permutací.*

Proof.

(a) $\alpha \cdot \alpha^{-1} = I.$



Užitečný důsledek - důkaz (b)

Užitečný důsledek - důkaz (b)

Proof.

(b) Necht' $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ jsou všechny sudé permutace a γ je nějaká lichá.

Užitečný důsledek - důkaz (b)

Proof.

(b) Necht' $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ jsou všechny sudé permutace a γ je nějaká lichá.

Potom

$$\beta_1 = \gamma\alpha_1, \dots, \beta_N = \gamma\alpha_N$$

jsou liché a různé (kdyby $\gamma\alpha = \gamma\alpha'$, pak $\gamma^{-1}\gamma\alpha = \gamma^{-1}\gamma\alpha'$, a tedy $\alpha = \alpha'$).

Užitečný důsledek - důkaz (b)

Proof.

(b) Necht' $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ jsou všechny sudé permutace a γ je nějaká lichá.

Potom

$$\beta_1 = \gamma\alpha_1, \dots, \beta_N = \gamma\alpha_N$$

jsou liché a různé (kdyby $\gamma\alpha = \gamma\alpha'$, pak $\gamma^{-1}\gamma\alpha = \gamma^{-1}\gamma\alpha'$, a tedy $\alpha = \alpha'$).

Navíc $\beta_1, \dots, \beta_N$ jsou *všechny* liché permutace (je-li β lichá, pak $\gamma^{-1}\beta$ je sudá a $\beta = \gamma\gamma^{-1}\beta$). □

4 Dvě věty

Věta o elitních permutacích

Věta

*Každá permutace je součinem **elitních permutací***

$$\alpha_1 = (52341), \alpha_2 = (15342), \alpha_3 = (12543), \alpha_4 = (12354).$$

Věta

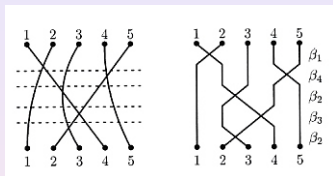
*Každá permutace je součinem **elitních permutací***

$$\alpha_1 = (52341), \alpha_2 = (15342), \alpha_3 = (12543), \alpha_4 = (12354).$$

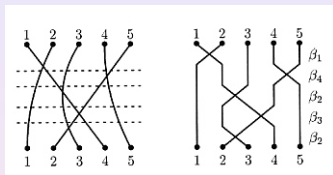
Důkaz obrázkem.

Důkaz věty o elitních permutacích

Důkaz věty o elitních permutacích

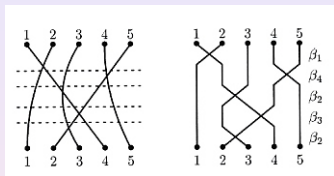


Důkaz věty o elitních permutacích



Dekompozice permutace do součinu základních transposic

Důkaz věty o elitních permutacích



Dekompozice permutace do součinu základních transposic

$$\beta_1 = (21345), \beta_2 = (13245), \beta_3 = (12435), \beta_4 = (12354),$$
$$\beta_1 = \alpha_2 \alpha_1 \alpha_2, \beta_2 = \alpha_3 \alpha_2 \alpha_3, \beta_3 = \alpha_4 \alpha_3 \alpha_4, \beta_4 = \alpha_4.$$

Komutátor permutace

Definice

Komutátorem permutací α a β nazýváme

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}.$$

Definice

Komutátorem permutací α a β nazýváme

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}.$$

Poznámka

Každý komutátor je sudý.

Věta o komutátorech

Věta

Každá sudá permutace je součinem komutátorů sudých permutací.

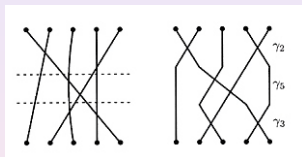
Věta

Každá sudá permutace je součinem komutátorů sudých permutací.

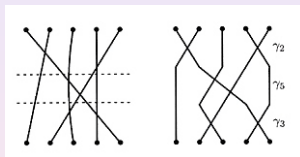
Důkaz obrázkem.

Důkaz věty o komutátorech - začátek

Důkaz věty o komutátorech - začátek



Důkaz věty o komutátorech - začátek



Komutátory sudých permutací.

Důkaz věty o komutátorech - popis

Důkaz věty o komutátorech - popis

Rozřezeme diagram horizontálně tak, aby každý pás obsahoval dvě křižovatky. Daná permutace se tak stane součinem permutací obsahujících dvě křižovatky. Takových existuje přesně 9, vizte následující obrázek. Každá z nich je komutátorem dvou sudých permutací:

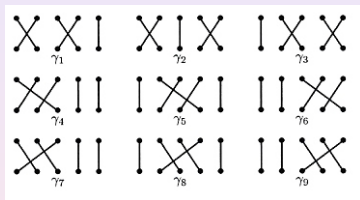
$$\gamma_1 = [(42135), \gamma_5] \quad \gamma_4 = [\gamma_3, \gamma_2], \quad \gamma_7 = [\gamma_2, \gamma_3],$$

$$\gamma_2 = [(42351), (14352)] \quad \gamma_5 = [(52431), (53241)], \quad \gamma_8 = [(53241), (52431)]$$

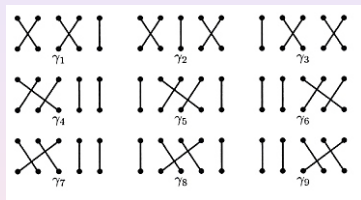
$$\gamma_3 = [\gamma_9, (14352)] \quad \gamma_6 = [\gamma_2, \gamma_1], \quad \gamma_9 = [\gamma_1, \gamma_2],$$

Důkaz věty o komutátorech - pokračování

Důkaz věty o komutátorech - pokračování



Důkaz věty o komutátorech - pokračování



Permutace γ

Zásadní poznámka k zásadním dvěma větám

Zásadní poznámka k zásadním dvěma větám

Poznámka

Věta o elitních permutacích platí pro každé $n \geq 2$.

Zásadní poznámka k zásadním dvěma větám

Poznámka

Věta o elitních permutacích platí pro každé $n \geq 2$.

*Ale věta o komutátorech pro $n \leq 4$ **neplatí** (!).*

Zásadní poznámka k zásadním dvěma větám

Poznámka

Věta o elitních permutacích platí pro každé $n \geq 2$.

*Ale věta o komutátorech pro $n \leq 4$ **neplatí** (!).*

A právě díky tomu je možné každou rovnici stupně ≤ 4 řešit pomocí radikálů.

5 Variace parametru a a permutace kořenů

Hurá na procházku

Uvažujme smyčku v komplexní rovině, která

Uvažujme smyčku v komplexní rovině, která

- vybíhá z 0,

Uvažujme smyčku v komplexní rovině, která

- vybíhá z 0,
- podél reálné osy se připlíží do těsné blízkosti nebezpečné hodnoty $a_0 = \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$,

Uvažujme smyčku v komplexní rovině, která

- vybíhá z 0,
- podél reálné osy se připlíží do těsné blízkosti nebezpečné hodnoty $a_0 = \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$,
- oběhne tento bod proti směru hodinových ručiček s velmi malým poloměrem,

Uvažujme smyčku v komplexní rovině, která

- vybíhá z 0,
- podél reálné osy se připlíží do těsné blízkosti nebezpečné hodnoty $a_0 = \frac{4}{5\sqrt[4]{5}}$,
- oběhne tento bod proti směru hodinových ručiček s velmi malým poloměrem,
- vrátí se do 0 podél reálné osy.

Kořeny na procházce

Otázka. Co dělají během této procházky kořeny rovnice $x^5 - x + a = 0$?

Otázka. Co dělají během této procházky kořeny rovnice $x^5 - x + a = 0$?

- kořeny -1 a $\pm i$ se projdou a vrátí domů,

Otázka. Co dělají během této procházky kořeny rovnice $x^5 - x + a = 0$?

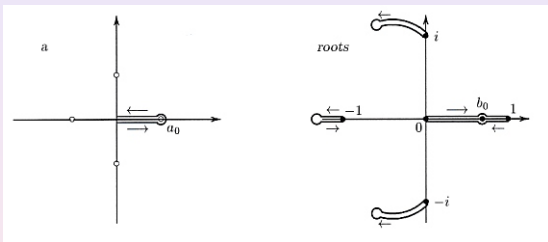
- kořeny -1 a $\pm i$ se projdou a vrátí domů,
- kořeny 0 a 1 se přiblíží k bodu $b_0 = \frac{+}{\sqrt[4]{5}}$, oběhnou jej po směru hodinových ručiček a vymění si posice.

Otázka. Co dělají během této procházky kořeny rovnice $x^5 - x + a = 0$?

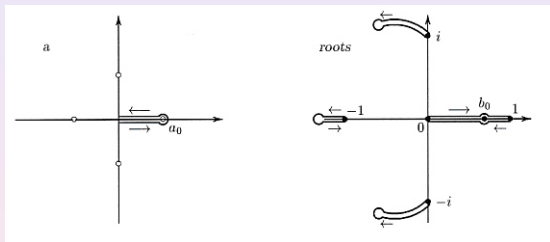
- kořeny -1 a $\pm i$ se projdou a vrátí domů,
- kořeny 0 a 1 se přiblíží k bodu $b_0 = \frac{+}{\sqrt[4]{5}}$, oběhnou jej po směru hodinových ručiček a vymění si posice.

Vysvětlení tohoto jevu: obrázkem.

Výměna kořenů



Výměna kořenů



Co se stane, pustíme-li a na speciální vycházku.

Kořeny na procházce - popis

Kořeny vyšlé z 0 a 1 se téměř setkají když $a \rightarrow a_0$.

Kořeny vyšlé z 0 a 1 se téměř setkají když $a \rightarrow a_0$. Kořeny vyšlé z $\pm i$ zůstávají komplexně sdružené a nikdy nepotkají reálnou osu (protože by jinak vytvořily násobný kořen).

Kořeny na procházce - popis

Kořeny vyšlé z 0 a 1 se téměř setkají když $a \rightarrow a_0$. Kořeny vyšlé z $\pm i$ zůstávají komplexně sdružené a nikdy nepotkají reálnou osu (protože by jinak vytvořily násobný kořen). Když a obkružuje a_0 , kořeny vyšlé z -1 a $\pm i$ se prakticky nemění.

Kořeny vyšlé z 0 a 1 se téměř setkají když $a \rightarrow a_0$. Kořeny vyšlé z $\pm i$ zůstávají komplexně sdružené a nikdy nepotkají reálnou osu (protože by jinak vytvořily násobný kořen). Když a obkružuje a_0 , kořeny vyšlé z -1 a $\pm i$ se prakticky nemění. Co ale dělají zbylé dva kořeny 0 a 1?

Kořeny vyšlé z 0 a 1 se téměř setkají když $a \rightarrow a_0$. Kořeny vyšlé z $\pm i$ zůstávají komplexně sdružené a nikdy nepotkají reálnou osu (protože by jinak vytvořily násobný kořen). Když a obkružuje a_0 , kořeny vyšlé z -1 a $\pm i$ se prakticky nemění. Co ale dělají zbylé dva kořeny 0 a 1? Vezměme *komplexní* číslo ε malé normy a pohled'me, pro která a má polynom $x^5 - x + a$ kořen $b_0 + \varepsilon$.

Kořeny vyšlé z 0 a 1 se téměř setkají když $a \rightarrow a_0$. Kořeny vyšlé z $\pm i$ zůstávají komplexně sdružené a nikdy nepotkají reálnou osu (protože by jinak vytvořily násobný kořen). Když a obkružuje a_0 , kořeny vyšlé z -1 a $\pm i$ se prakticky nemění. Co ale dělají zbylé dva kořeny 0 a 1? Vezměme *komplexní* číslo ε malé normy a pohled'me, pro která a má polynom $x^5 - x + a$ kořen $b_0 + \varepsilon$. To lze snadno spočítat:

Kořeny vyšlé z 0 a 1 se téměř setkají když $a \rightarrow a_0$. Kořeny vyšlé z $\pm i$ zůstávají komplexně sdružené a nikdy nepotkají reálnou osu (protože by jinak vytvořily násobný kořen). Když a obkružuje a_0 , kořeny vyšlé z -1 a $\pm i$ se prakticky nemění. Co ale dělají zbylé dva kořeny 0 a 1? Vezměme *komplexní* číslo ε malé normy a pohled'me, pro která a má polynom $x^5 - x + a$ kořen $b_0 + \varepsilon$. To lze snadno spočítat:

$$a = (b_0 + \varepsilon) - (b_0 + \varepsilon)^5 \approx a_0 - 10b_0^3\varepsilon^2,$$

kde $\approx$ označuje chybu menší než $|\varepsilon|^2$.

Kořeny vyšlé z 0 a 1 se téměř setkají když $a \rightarrow a_0$. Kořeny vyšlé z $\pm i$ zůstávají komplexně sdružené a nikdy nepotkají reálnou osu (protože by jinak vytvořily násobný kořen). Když a obkružuje a_0 , kořeny vyšlé z -1 a $\pm i$ se prakticky nemění. Co ale dělají zbylé dva kořeny 0 a 1? Vezměme *komplexní* číslo ε malé normy a pohled'me, pro která a má polynom $x^5 - x + a$ kořen $b_0 + \varepsilon$. To lze snadno spočítat:

$$a = (b_0 + \varepsilon) - (b_0 + \varepsilon)^5 \approx a_0 - 10b_0^3\varepsilon^2,$$

kde $\approx$ označuje chybu menší než $|\varepsilon|^2$. Takže když x opíše půlkruh po směru hodinových ručiček kolem b_0 , a opíše kompletní kruh proti směru hodinových ručiček kolem a_0 a naopak.

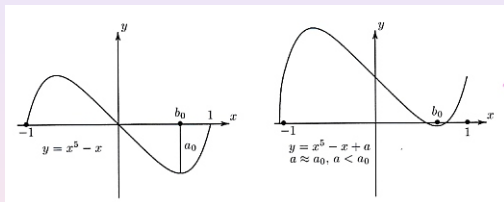
Kořeny vyšlé z 0 a 1 se téměř setkají když $a \rightarrow a_0$. Kořeny vyšlé z $\pm i$ zůstávají komplexně sdružené a nikdy nepotkají reálnou osu (protože by jinak vytvořily násobný kořen). Když a obkružuje a_0 , kořeny vyšlé z -1 a $\pm i$ se prakticky nemění. Co ale dělají zbylé dva kořeny 0 a 1? Vezměme *komplexní* číslo ε malé normy a pohled'me, pro která a má polynom $x^5 - x + a$ kořen $b_0 + \varepsilon$. To lze snadno spočítat:

$$a = (b_0 + \varepsilon) - (b_0 + \varepsilon)^5 \approx a_0 - 10b_0^3\varepsilon^2,$$

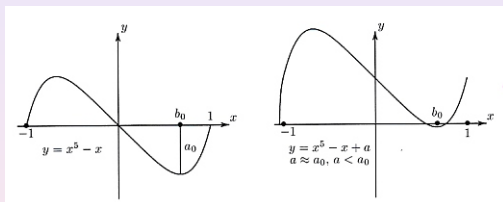
kde $\approx$ označuje chybu menší než $|\varepsilon|^2$. Takže když x opíše půlkruh po směru hodinových ručiček kolem b_0 , a opíše kompletní kruh proti směru hodinových ručiček kolem a_0 a naopak. Výsledek: dva kořeny blízko b_0 si vymění posice.

Vysvětlení chování kořenů na procházce

Vysvětlení chování kořenů na procházce



Vysvětlení chování kořenů na procházce



Ilustrace procházky.

Ještě jedno užitečné pozorování

Ještě jedno užitečné pozorování

Kořeny polynomu $x^5 - x + ia$ lze dostat z kořenů polynomu $x^5 - x + i$ násobením i .

Ještě jedno užitečné pozorování

Kořeny polynomu $x^5 - x + ia$ lze dostat z kořenů polynomu $x^5 - x + ia$ násobením i . To znamená, že právě popsany proces lze otočením o $\frac{\pi}{2}$ přesunout na kořeny 0 a i . Tedy kořen 0 lze vyměnit s kterýmkoli ze zbývajících čtyř kořenů.

Ještě jedno užitečné pozorování

Kořeny polynomu $x^5 - x + ia$ lze dostat z kořenů polynomu $x^5 - x + ia$ násobením i . To znamená, že právě popsany proces lze otočením o $\frac{\pi}{2}$ přesunout na kořeny 0 a i . Tedy kořen 0 lze vyměnit s kterýmkoli ze zbývajících čtyř kořenů.

A ještě něco.

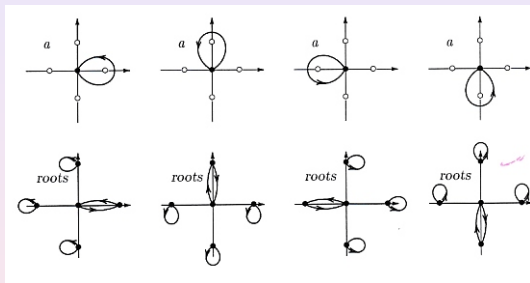
Ještě jedno užitečné pozorování

Kořeny polynomu $x^5 - x + ia$ lze dostat z kořenů polynomu $x^5 - x + ia$ násobením i . To znamená, že právě popsany proces lze otočením o $\frac{\pi}{2}$ přesunout na kořeny 0 a i . Tedy kořen 0 lze vyměnit s kterýmkoli ze zbývajících čtyř kořenů.

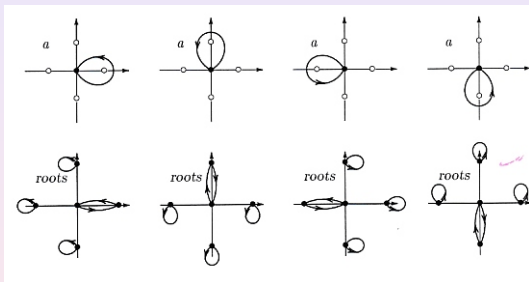
A ještě něco. Skládání smyček odpovídá násobení permutací kořenů.

Důkaz věty o komutátorech - začátek

Důkaz věty o komutátorech - začátek



Důkaz věty o komutátorech - začátek



Pootočení.

Věta o permutaci kořenů

Věta o permutaci kořenů

Věta

Každé permutaci pěti kořenů $0, \pm 1, \pm i$ odpovídá nějaká smyčka vybíhající z 0 , končící v 0 a vyhýbající se nebezpečným bodům.

6 Variace parametru a a permutace radikálů

Předpokládejme, že rovnice $x^5 - x + a = 0$ má radikální řešení ve tvaru

$$x_1^{k_1} = p_1(a),$$

$$x_2^{k_2} = p_2(a, x_1),$$

...

$$x_N^{k_N} = p_N(a, x_1, \dots, x_{N-1})$$

a že se všechna řešení rovnice najdou mezi hodnotami x_N .

Předpokládejme, že rovnice $x^5 - x + a = 0$ má radikální řešení ve tvaru

$$\begin{aligned}x_1^{k_1} &= p_1(a), \\x_2^{k_2} &= p_2(a, x_1), \\&\dots \\x_N^{k_N} &= p_N(a, x_1, \dots, x_{N-1})\end{aligned}$$

a že se všechna řešení rovnice najdou mezi hodnotami x_N .
Teoreticky může x_N dosahovat až $k_1 \cdots k_N$ hodnot, některé ale splynou pro každé a (viděli jsme u kubické rovnice).

Předpokládejme, že rovnice $x^5 - x + a = 0$ má radikální řešení ve tvaru

$$\begin{aligned}x_1^{k_1} &= p_1(a), \\x_2^{k_2} &= p_2(a, x_1), \\&\dots \\x_N^{k_N} &= p_N(a, x_1, \dots, x_{N-1})\end{aligned}$$

a že se všechna řešení rovnice najdou mezi hodnotami x_N .
Teoreticky může x_N dosahovat až $k_1 \cdots k_N$ hodnot, některé ale splynou pro každé a (viděli jsme u kubické rovnice). Dostáváme **věž** hodnot $a, x_1, \dots, x_N$.

Předpokládejme, že rovnice $x^5 - x + a = 0$ má radikální řešení ve tvaru

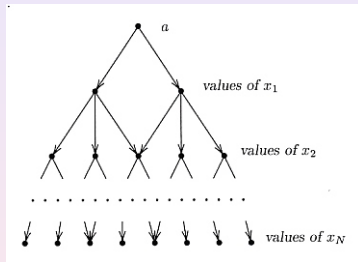
$$\begin{aligned}x_1^{k_1} &= p_1(a), \\x_2^{k_2} &= p_2(a, x_1), \\&\dots \\x_N^{k_N} &= p_N(a, x_1, \dots, x_{N-1})\end{aligned}$$

a že se všechna řešení rovnice najdou mezi hodnotami x_N . Teoreticky může x_N dosahovat až $k_1 \cdots k_N$ hodnot, některé ale splynou pro každé a (viděli jsme u kubické rovnice). Dostáváme **věž** hodnot $a, x_1, \dots, x_N$.

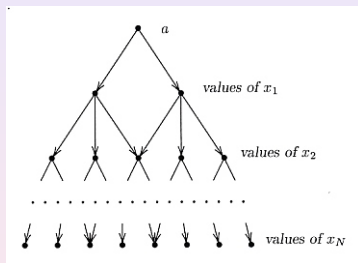
Měníme-li a , mění se celá věž. Hodnoty x_N , které jsou řešeními rovnice, jimi zůstávají.

Důkaz věty o komutátorech - začátek

Důkaz věty o komutátorech - začátek



Důkaz věty o komutátorech - začátek



Věž radikálů.

Poznámka o nebezpečnostech (tzv. strašení ve věži)

Některé hodnoty x_M (kterékoli M) splývají pro každé a . Některé ale splynou *náhodně* jen pro *některé* hodnoty a . Například rovnice

$$x_1^{k_1} = p_1(a)$$

má k_1 řešení, je-li $p_1(a) \neq 0$, ale jen jedno, je-li $p_1(a) = 0$.

Některé hodnoty x_M (kterékoli M) splývají pro každé a . Některé ale splynou *náhodně* jen pro *některé* hodnoty a . Například rovnice

$$x_1^{k_1} = p_1(a)$$

má k_1 řešení, je-li $p_1(a) \neq 0$, ale jen jedno, je-li $p_1(a) = 0$. Tedy kořeny p_1 jsou *místy náhodných kolísí*.

Některé hodnoty x_M (kterékoli M) splývají pro každé a . Některé ale splynou *náhodně* jen pro *některé* hodnoty a . Například rovnice

$$x_1^{k_1} = p_1(a)$$

má k_1 řešení, je-li $p_1(a) \neq 0$, ale jen jedno, je-li $p_1(a) = 0$. Tedy kořeny p_1 jsou *místy náhodných kolísí*. Budeme jim říkat *nebezpečné body*, tj. přidáme je k těm čtyřem, které už známe.

Poznámka o nebezpečnostvích (tzv. strašení ve věži)

Některé hodnoty x_M (kterékoli M) splývají pro každé a . Některé ale splynou *náhodně* jen pro *některé* hodnoty a . Například rovnice

$$x_1^{k_1} = p_1(a)$$

má k_1 řešení, je-li $p_1(a) \neq 0$, ale jen jedno, je-li $p_1(a) = 0$. Tedy kořeny p_1 jsou *místy náhodných kolísí*. Budeme jim říkat *nebezpečné body*, tj. přidáme je k těm čtyřem, které už známe. Podstatné je, že jich je *konečně mnoho*.

Poznámka o nebezpečnostech - pokračování

Ve druhém patře věže (počítáme shora) nastane kolise tehdy, když

$$p_2(a, x_1) = p_2(a, x'_1)$$

pro $x_1 \neq x'_1$.

Ve druhém patře věže (počítáme shora) nastane kolise tehdy, když

$$p_2(a, x_1) = p_2(a, x'_1)$$

pro $x_1 \neq x'_1$. Systém

$$x_1^{k_1} = p_1(a),$$

$$(x'_1)^{k_1} = p_1(a),$$

$$p_2(a, x_1) = p_2(a, x'_1)$$

bud' má konečně mnoho řešení (a, x_1, x'_1) , v kterémžto případě prohlásíme tuto a za nebezpečné hodnoty, nebo má některá řešení pro každé a a ještě některá další jen pro některá a , ty pak opět přidáme k nebezpečným.

Ve druhém patře věže (počítáme shora) nastane kolise tehdy, když

$$p_2(a, x_1) = p_2(a, x'_1)$$

pro $x_1 \neq x'_1$. Systém

$$x_1^{k_1} = p_1(a),$$

$$(x'_1)^{k_1} = p_1(a),$$

$$p_2(a, x_1) = p_2(a, x'_1)$$

bud' má konečně mnoho řešení (a, x_1, x'_1) , v kterémžto případě prohlásíme tuto a za nebezpečné hodnoty, nebo má některá řešení pro každé a a ještě některá další jen pro některá a , ty pak opět přidáme k nebezpečným. Takto pokračujeme až na úroveň x_N .

Ve druhém patře věže (počítáme shora) nastane kolise tehdy, když

$$p_2(a, x_1) = p_2(a, x'_1)$$

pro $x_1 \neq x'_1$. Systém

$$x_1^{k_1} = p_1(a),$$

$$(x'_1)^{k_1} = p_1(a),$$

$$p_2(a, x_1) = p_2(a, x'_1)$$

bud' má konečně mnoho řešení (a, x_1, x'_1) , v kterémžto případě prohlásíme tato a za nebezpečné hodnoty, nebo má některá řešení pro každé a a ještě některá další jen pro některá a , ty pak opět přidáme k nebezpečným. Takto pokračujeme až na úroveň x_N .

Výsledek procesu:

Ve druhém patře věže (počítáme shora) nastane kolise tehdy, když

$$p_2(a, x_1) = p_2(a, x'_1)$$

pro $x_1 \neq x'_1$. Systém

$$x_1^{k_1} = p_1(a),$$

$$(x'_1)^{k_1} = p_1(a),$$

$$p_2(a, x_1) = p_2(a, x'_1)$$

bud' má konečně mnoho řešení (a, x_1, x'_1) , v kterémžto případě prohlásíme tato a za nebezpečné hodnoty, nebo má některá řešení pro každé a a ještě některá další jen pro některá a , ty pak opět přidáme k nebezpečným. Takto pokračujeme až na úroveň x_N .

Výsledek procesu: dostaneme konečnou množinu nebezpečných bodů, kterým se při procházkách po smyčkách musíme vyhnout.

Ve druhém patře věže (počítáme shora) nastane kolise tehdy, když

$$p_2(a, x_1) = p_2(a, x'_1)$$

pro $x_1 \neq x'_1$. Systém

$$x_1^{k_1} = p_1(a),$$

$$(x'_1)^{k_1} = p_1(a),$$

$$p_2(a, x_1) = p_2(a, x'_1)$$

bud' má konečně mnoho řešení (a, x_1, x'_1) , v kterémžto případě prohlásíme tato a za nebezpečné hodnoty, nebo má některá řešení pro každé a a ještě některá další jen pro některá a , ty pak opět přidáme k nebezpečným. Takto pokračujeme až na úroveň x_N .

Výsledek procesu: dostaneme konečnou množinu nebezpečných bodů, kterým se při procházkách po smyčkách musíme vyhnout. Může se stát, že se 0 stane nebezpečným bodem.

Ve druhém patře věže (počítáme shora) nastane kolise tehdy, když

$$p_2(a, x_1) = p_2(a, x'_1)$$

pro $x_1 \neq x'_1$. Systém

$$x_1^{k_1} = p_1(a),$$

$$(x'_1)^{k_1} = p_1(a),$$

$$p_2(a, x_1) = p_2(a, x'_1)$$

bud' má konečně mnoho řešení (a, x_1, x'_1) , v kterémžto případě prohlásíme tato a za nebezpečné hodnoty, nebo má některá řešení pro každé a a ještě některá další jen pro některá a , ty pak opět přidáme k nebezpečným. Takto pokračujeme až na úroveň x_N .

Výsledek procesu: dostaneme konečnou množinu nebezpečných bodů, kterým se při procházkách po smyčkách musíme vyhnout. Může se stát, že se 0 stane nebezpečným bodem. Pak nevyrazíme z nuly, ale z blízkého bezpečného bodu (a vrátíme se do něj).

7 Komutátory smyček

Pro dvě smyčky ℓ_1 a ℓ_2 budeme smyčku $[\ell_1, \ell_2] = \ell_1 \ell_2 \ell_1^{-1} \ell_2^{-1}$ nazývat *komutátorem* smyček ℓ_1 a ℓ_2 .

Pro dvě smyčky ℓ_1 a ℓ_2 budeme smyčku $[\ell_1, \ell_2] = \ell_1 \ell_2 \ell_1^{-1} \ell_2^{-1}$ nazývat **komutátorem** smyček ℓ_1 a ℓ_2 .

Lemma

Je-li smyčka ℓ nějakým součinem komutátorů bezpečných smyček, potom při procházce parametru a podél ℓ se každá hodnota x_1 vrátí na své místo.

Proof.

Pro každé bezpečné a dostaneme k_1 hodnot x_1 :

$$x_1, x_1 \varepsilon_{k_1}, x_1 \varepsilon_{k_1}^2, \dots, x_1 \varepsilon_{k_1}^{k_1-1},$$

kde

$$\varepsilon_{k_1} = \cos \frac{2\pi}{k_1} + i \sin \frac{2\pi}{k_1},$$

a jejich vzájemné poměry se při procházce nemění.

Proof.

Pro každé bezpečné a dostaneme k_1 hodnot x_1 :

$$x_1, x_1 \varepsilon_{k_1}, x_1 \varepsilon_{k_1}^2, \dots, x_1 \varepsilon_{k_1}^{k_1-1},$$

kde

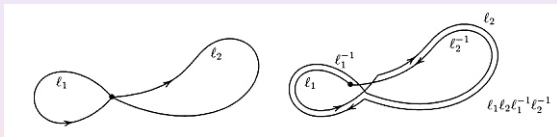
$$\varepsilon_{k_1} = \cos \frac{2\pi}{k_1} + i \sin \frac{2\pi}{k_1},$$

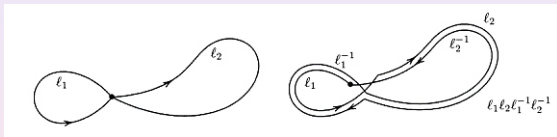
a jejich vzájemné poměry se při procházce nemění. Necht' $\ell = \ell_1 \ell_2 \ell_1^{-1} \ell_2^{-1}$ a necht' procházka podél ℓ_1 pošle x_1 do $x_1 \varepsilon_{k_1}^{m_1}$, a tedy x_1^r do $x_1 \varepsilon_{k_1}^{r+m_1}$, obdobně pro ℓ_2 . Potom pochod přes $\ell_1, \ell_2, \ell_1^{-1}$ a ℓ_2^{-1} dává

$$x_1 \mapsto x_1 \varepsilon_{k_1}^{m_1} \mapsto x_1 \varepsilon_{k_1}^{m_1+m_2} \mapsto x_1 \varepsilon_{k_1}^{m_1+m_2-m_1} \mapsto x_1 \varepsilon_{k_1}^{m_1+m_2-m_1-m_2} = x_1.$$



Komutátory smyček





Komutátory smyček.

Komutátory smyček - poslední lemma

Lemma

Je-li smyčka ℓ nějakým součinem komutátorů součinu komutátorů $\dots$ součinu komutátorů (N -krát) bezpečných smyček, potom při procházce parametru a podél ℓ se každá hodnota $x_1, \dots, x_N$ vrátí na své místo.

8 Důkaz hlavní věty

Hurá ke kýženému sporu

Hurá ke kýženému sporu

Předpokládejme, že rovnice $x^5 - x + a$ připouští radikální řešení.

Hurá ke kýženému sporu

Předpokládejme, že rovnice $x^5 - x + a$ připouští radikální řešení.
Uvažujme nějakou neidentickou sudou permutaci α_0 kořenů.

Hurá ke kýženému sporu

Předpokládejme, že rovnice $x^5 - x + a$ připouští radikální řešení. Uvažujme nějakou neidentickou sudou permutací α_0 kořenů. Vyjádříme α_0 ve tvaru součinu komutátorů sudých permutací,

$$\alpha_0 = [\alpha_1, \alpha_2][\alpha_3, \alpha_4] \cdots [\alpha_{2s-1}, \alpha_{2s}].$$

Hurá ke kýženému sporu

Předpokládejme, že rovnice $x^5 - x + a$ připouští radikální řešení. Uvažujme nějakou neidentickou sudou permutací α_0 kořenů. Vyjádříme α_0 ve tvaru součinu komutátorů sudých permutací,

$$\alpha_0 = [\alpha_1, \alpha_2][\alpha_3, \alpha_4] \cdots [\alpha_{2s-1}, \alpha_{2s}].$$

Potom totéž provedeme s každou α_i :

$$\alpha_1 = [\alpha_{11}, \alpha_{12}][\alpha_{13}, \alpha_{14}] \cdots [\alpha_{2t-1}, \alpha_{2t}].$$

Hurá ke kýženému sporu

Předpokládejme, že rovnice $x^5 - x + a$ připouští radikální řešení. Uvažujme nějakou neidentickou sudou permutací α_0 kořenů. Vyjádříme α_0 ve tvaru součinu komutátorů sudých permutací,

$$\alpha_0 = [\alpha_1, \alpha_2][\alpha_3, \alpha_4] \cdots [\alpha_{2s-1}, \alpha_{2s}].$$

Potom totéž provedeme s každou α_i :

$$\alpha_1 = [\alpha_{11}, \alpha_{12}][\alpha_{13}, \alpha_{14}] \cdots [\alpha_{2t-1}, \alpha_{2t}].$$

A tak dále až na N -tou úroveň.

Hurá ke kýženému sporu

Předpokládejme, že rovnice $x^5 - x + a$ připouští radikální řešení. Uvažujme nějakou neidentickou sudou permutací α_0 kořenů. Vyjádříme α_0 ve tvaru součinu komutátorů sudých permutací,

$$\alpha_0 = [\alpha_1, \alpha_2][\alpha_3, \alpha_4] \cdots [\alpha_{2s-1}, \alpha_{2s}].$$

Potom totéž provedeme s každou α_i :

$$\alpha_1 = [\alpha_{11}, \alpha_{12}][\alpha_{13}, \alpha_{14}] \cdots [\alpha_{2t-1}, \alpha_{2t}].$$

A tak dále až na N -tou úroveň. Pro každou permutaci $\alpha_{i_1 \dots i_N}$, která se objeví v posledním (N -tém) kroku, najdeme bezpečnou smyčku $\ell_{i_1 \dots i_N}$, která tuto permutaci generuje.

Hurá ke kýženému sporu

Předpokládejme, že rovnice $x^5 - x + a$ připouští radikální řešení. Uvažujme nějakou neidentickou sudou permutací α_0 kořenů. Vyjádříme α_0 ve tvaru součinu komutátorů sudých permutací,

$$\alpha_0 = [\alpha_1, \alpha_2][\alpha_3, \alpha_4] \cdots [\alpha_{2s-1}, \alpha_{2s}].$$

Potom totéž provedeme s každou α_i :

$$\alpha_1 = [\alpha_{11}, \alpha_{12}][\alpha_{13}, \alpha_{14}] \cdots [\alpha_{1t-1}, \alpha_{1t}].$$

A tak dále až na N -tou úroveň. Pro každou permutaci $\alpha_{i_1 \dots i_N}$, která se objeví v posledním (N -tém) kroku, najdeme bezpečnou smyčku $\ell_{i_1 \dots i_N}$, která tuto permutaci generuje. Ve vyjádření α_0 pomocí $\alpha_{i_1 \dots i_N}$ nahradíme každou permutaci tvaru $\alpha_{i_1 \dots i_N}$ *její* smyčkou. Dostaneme smyčku, která je N -úrovňovým součinem komutátorů smyček (ve smyslu lemmatu).

Hurá ke kýženému sporu

Předpokládejme, že rovnice $x^5 - x + a$ připouští radikální řešení. Uvažujme nějakou neidentickou sudou permutací α_0 kořenů. Vyjádříme α_0 ve tvaru součinu komutátorů sudých permutací,

$$\alpha_0 = [\alpha_1, \alpha_2][\alpha_3, \alpha_4] \cdots [\alpha_{2s-1}, \alpha_{2s}].$$

Potom totéž provedeme s každou α_i :

$$\alpha_1 = [\alpha_{11}, \alpha_{12}][\alpha_{13}, \alpha_{14}] \cdots [\alpha_{2t-1}, \alpha_{2t}].$$

A tak dále až na N -tou úroveň. Pro každou permutaci $\alpha_{i_1 \dots i_N}$, která se objeví v posledním (N -tém) kroku, najdeme bezpečnou smyčku $\ell_{i_1 \dots i_N}$, která tuto permutaci generuje. Ve vyjádření α_0 pomocí $\alpha_{i_1 \dots i_N}$ nahradíme každou permutaci tvaru $\alpha_{i_1 \dots i_N}$ **její** smyčkou. Dostaneme smyčku, která je N -úrovňovým součinem komutátorů smyček (ve smyslu lemmatu). Podle lemmatu tato výsledná smyčka vrací každý kořen na místo.

Hurá ke kýženému sporu

Předpokládejme, že rovnice $x^5 - x + a$ připouští radikální řešení. Uvažujme nějakou neidentickou sudou permutací α_0 kořenů. Vyjádříme α_0 ve tvaru součinu komutátorů sudých permutací,

$$\alpha_0 = [\alpha_1, \alpha_2][\alpha_3, \alpha_4] \cdots [\alpha_{2s-1}, \alpha_{2s}].$$

Potom totéž provedeme s každou α_i :

$$\alpha_1 = [\alpha_{11}, \alpha_{12}][\alpha_{13}, \alpha_{14}] \cdots [\alpha_{2t-1}, \alpha_{2t}].$$

A tak dále až na N -tou úroveň. Pro každou permutaci $\alpha_{i_1 \dots i_N}$, která se objeví v posledním (N -tém) kroku, najdeme bezpečnou smyčku $\ell_{i_1 \dots i_N}$, která tuto permutaci generuje. Ve vyjádření α_0 pomocí $\alpha_{i_1 \dots i_N}$ nahradíme každou permutaci tvaru $\alpha_{i_1 \dots i_N}$ *její* smyčkou. Dostaneme smyčku, která je N -úrovňovým součinem komutátorů smyček (ve smyslu lemmatu). Podle lemmatu tato výsledná smyčka vrací každý kořen na místo. Zároveň ale generuje neidentickou permutaci kořenů.

Hurá ke kýženému sporu

Předpokládejme, že rovnice $x^5 - x + a$ připouští radikální řešení. Uvažujme nějakou neidentickou sudou permutací α_0 kořenů. Vyjádříme α_0 ve tvaru součinu komutátorů sudých permutací,

$$\alpha_0 = [\alpha_1, \alpha_2][\alpha_3, \alpha_4] \cdots [\alpha_{2s-1}, \alpha_{2s}].$$

Potom totéž provedeme s každou α_i :

$$\alpha_1 = [\alpha_{11}, \alpha_{12}][\alpha_{13}, \alpha_{14}] \cdots [\alpha_{2t-1}, \alpha_{2t}].$$

A tak dále až na N -tou úroveň. Pro každou permutaci $\alpha_{i_1 \dots i_N}$, která se objeví v posledním (N -tém) kroku, najdeme bezpečnou smyčku $\ell_{i_1 \dots i_N}$, která tuto permutaci generuje. Ve vyjádření α_0 pomocí $\alpha_{i_1 \dots i_N}$ nahradíme každou permutaci tvaru $\alpha_{i_1 \dots i_N}$ její smyčkou. Dostaneme smyčku, která je N -úrovňovým součinem komutátorů smyček (ve smyslu lemmatu). Podle lemmatu tato výsledná smyčka vrací každý kořen na místo. Zároveň ale generuje neidentickou permutaci kořenů. A to je spor.

A já Vám děkuji za pozornost!