

K čemu slouží exotické zápisy čísel

Edita Pelantová

Katedra matematiky, FJFI,
České vysoké učení technické v Praze

30. dubna 2019
Ostrava

Z Kutné Hory



Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: *I, V, X, L, C, M*

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: I, V, X, L, C, M objev kvazikrystalů *MCMLXXXII*

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: I, V, X, L, C, M

objev kvazikrystalů *MCMLXXXII*

Desítková soustava: $0, 1, 2, \dots, 9$

objev kvazikrystalů 1982

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: I, V, X, L, C, M

objev kvazikrystalů *MCMLXXXII*

Desítková soustava: $0, 1, 2, \dots, 9$

objev kvazikrystalů 1982 **poziční**

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: I, V, X, L, C, M objev kvazikrystalů *MCMLXXXII*

Desítková soustava: $0, 1, 2, \dots, 9$ objev kvazikrystalů 1982 **poziční**

$79 \text{ krát } 37 = LXXIX \text{ krát } XXXVII$

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: I, V, X, L, C, M objev kvazikrystalů *MCMLXXXII*

Desítková soustava: $0, 1, 2, \dots, 9$ objev kvazikrystalů 1982 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 = LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \dots, 0, 1, \dots, 5$

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: I, V, X, L, C, M objev kvazikrystalů *MCMLXXXII*

Desítková soustava: $0, 1, 2, \dots, 9$ objev kvazikrystalů 1982 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 = LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \dots, 0, 1, \dots, 5$

objev kvazikrystalů $20\bar{2}2$

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: I, V, X, L, C, M objev kvazikrystalů *MCMLXXXII*

Desítková soustava: $0, 1, 2, \dots, 9$ objev kvazikrystalů 1982 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 = LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \dots, 0, 1, \dots, 5$

objev kvazikrystalů $20\bar{2}2$

$$79 \text{ krát } 37 = 12\bar{1} \text{ krát } 4\bar{3}$$

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: I, V, X, L, C, M objev kvazikrystalů *MCMLXXXII*

Desítková soustava: $0, 1, 2, \dots, 9$ objev kvazikrystalů 1982 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 = LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \dots, 0, 1, \dots, 5$

objev kvazikrystalů $20\bar{2}2$

$$79 \text{ krát } 37 = 12\bar{1} \text{ krát } 4\bar{3}$$

Co ovlivňuje volbu zápisu čísel:

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: I, V, X, L, C, M objev kvazikrystalů *MCMLXXXII*

Desítková soustava: $0, 1, 2, \dots, 9$ objev kvazikrystalů 1982 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 = LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \dots, 0, 1, \dots, 5$

objev kvazikrystalů $20\bar{2}2$

$$79 \text{ krát } 37 = 12\bar{1} \text{ krát } 4\bar{3}$$

Co ovlivňuje volbu zápisu čísel:

- za jakým účelem číslo zaznamenáváme

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: I, V, X, L, C, M objev kvazikrystalů *MCMLXXXII*

Desítková soustava: $0, 1, 2, \dots, 9$ objev kvazikrystalů 1982 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 = LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \dots, 0, 1, \dots, 5$

objev kvazikrystalů $20\bar{2}2$

$$79 \text{ krát } 37 = 12\bar{1} \text{ krát } 4\bar{3}$$

Co ovlivňuje volbu zápisu čísel:

- za jakým účelem číslo zaznamenáváme
- jednoduchost algoritmů

Zápisy čísel v minulosti

Římský zápis: I, V, X, L, C, M objev kvazikrystalů *MCMLXXXII*

Desítková soustava: $0, 1, 2, \dots, 9$ objev kvazikrystalů 1982 **poziční**

$$79 \text{ krát } 37 = LXXIX \text{ krát } XXXVII$$

Cauchy: desítková soustava s ciframi $-5, -4, \dots, 0, 1, \dots, 5$

objev kvazikrystalů $20\overline{2}2$

$$79 \text{ krát } 37 = 12\overline{1} \text{ krát } 4\overline{3}$$

Co ovlivňuje volbu zápisu čísel:

- za jakým účelem číslo zaznamenáváme
- jednoduchost algoritmů
- technické dannosti vykonavatele (velká paměť? hodně procesorů?)

Rozvoje čísla do nekonečných řad

Věta

Nechť (w_n) je klesající posloupnost kladných čísel taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ je konvergentní a $w_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k$. Pak každé $x \in [0, \sum_{n=1}^{\infty} w_n]$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n w_n, \quad \text{kde } d_n \in \{0, 1\}.$$

Rozvoje čísla do nekonečných řad

Věta

Nechť (w_n) je klesající posloupnost kladných čísel taková, že $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ je konvergentní a $w_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k$. Pak každé $x \in [0, \sum_{n=1}^{\infty} w_n]$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n w_n, \quad \text{kde } d_n \in \{0, 1\}.$$

Hladový algoritmus pro hledání d_n

$$t_0 = 0, \quad t_n = t_{n-1} + d_n w_n, \quad d_n = \begin{cases} 1 & \text{když } t_{n-1} + w_n \leq x, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak
$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n d_k w_k.$$

Výpočet $\exp(x)$

- Tabelovány hodnoty $w_n = \ln(1 + 2^{-n})$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$

Výpočet $\exp(x)$

- Tabelovány hodnoty $w_n = \ln(1 + 2^{-n})$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$
- Najdi rozvoj $x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})$.

Výpočet $\exp(x)$

- Tabelovány hodnoty $w_n = \ln(1 + 2^{-n})$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$
- Najdi rozvoj $x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})$. Pak

$$\exp x = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})\right) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + 2^{-i})^{d_i}$$

Výpočet $\exp(x)$

- Tabelovány hodnoty $w_n = \ln(1 + 2^{-n})$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$
- Najdi rozvoj $x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})$. Pak

$$\exp x = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})\right) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + 2^{-i})^{d_i} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + d_i 2^{-i}).$$

Výpočet $\exp(x)$

- Tabelovány hodnoty $w_n = \ln(1 + 2^{-n})$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$
- Najdi rozvoj $x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})$. Pak

$$\exp x = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})\right) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + 2^{-i})^{d_i} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + d_i 2^{-i}).$$

Výpočet e^x

$$E_0 := 1, \quad E_n = E_{n-1}(1 + d_n 2^{-n}) = E_{n-1} + d_n 2^{-n} E_{n-1}.$$

Výpočet $\exp(x)$

- Tabelovány hodnoty $w_n = \ln(1 + 2^{-n})$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$
- Najdi rozvoj $x = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})$. Pak

$$\exp x = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \ln(1 + 2^{-i})\right) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + 2^{-i})^{d_i} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + d_i 2^{-i}).$$

Výpočet e^x

$$E_0 := 1, \quad E_n = E_{n-1}(1 + d_n 2^{-n}) = E_{n-1} + d_n 2^{-n} E_{n-1}.$$

Odhad chyby: Pro $x \in [0, \ln 2]$ lze ukázat $0 \leq e^x - E_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Výpočet $\exp(x)$

Pro velká x posun proměnné do vhodného intervalu:

Výpočet $\exp(x)$

Pro velká x posun proměnné do vhodného intervalu:

Algoritmus: vstup x

- Najdi $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $y = x - k \ln 2 \in [0, \ln 2]$.
- Spočítej předchozí metodou e^y .
- Polož $e^x = e^{y+k \ln 2} = 2^k e^y$ (tj. posuň binární tečku v e^y o k míst).

Výpočet $\exp(x)$

Pro velká x posun proměnné do vhodného intervalu:

Algoritmus: vstup x

- Najdi $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $y = x - k \ln 2 \in [0, \ln 2]$.
- Spočítej předchozí metodou e^y .
- Polož $e^x = e^{y+k \ln 2} = 2^k e^y$ (tj. posuň binární tečku v e^y o k míst).

Pro výpočet $\sin$ a $\cos$: rozvoj do řady

$$\sum d_n \arctan 2^{-n}, \text{ kde } d_n \in \{-1, 1\},$$

tzv. algoritmus CORDIC.

Poziční soustavy

Základ $\alpha \in \mathbb{C}$, cifry $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Pak $(\alpha, \mathcal{A})$ -reprezentace čísla x je

$$x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A}$$

Zapisujeme

$$x = x_n x_{n-1} \dots x_0 \bullet x_{-1} x_{-2} \dots \quad \text{nebo} \quad x = 0 \bullet x_n x_{n-1} \dots$$

Poziční soustavy

Základ $\alpha \in \mathbb{C}$, cifry $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Pak $(\alpha, \mathcal{A})$ -reprezentace čísla x je

$$x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A}$$

Zapisujeme

$$x = x_n x_{n-1} \dots x_0 \bullet x_{-1} x_{-2} \dots \quad \text{nebo} \quad x = 0 \bullet x_n x_{n-1} \dots$$

Požadujeme

Poziční soustavy

Základ $\alpha \in \mathbb{C}$, cifry $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Pak $(\alpha, \mathcal{A})$ -reprezentace čísla x je

$$x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A}$$

Zapisujeme

$$x = x_n x_{n-1} \dots x_0 \bullet x_{-1} x_{-2} \dots \quad \text{nebo} \quad x = 0 \bullet x_n x_{n-1} \dots$$

Požadujeme

- abeceda $\mathcal{A}$ konečná

Poziční soustavy

Základ $\alpha \in \mathbb{C}$, cifry $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Pak $(\alpha, \mathcal{A})$ -reprezentace čísla x je

$$x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A}$$

Zapisujeme

$$x = x_n x_{n-1} \dots x_0 \bullet x_{-1} x_{-2} \dots \quad \text{nebo} \quad x = 0 \bullet x_n x_{n-1} \dots$$

Požadujeme

- abeceda $\mathcal{A}$ konečná
- $|\alpha| > 1$ kvůli konvergenci

Poziční soustavy

Základ $\alpha \in \mathbb{C}$, cifry $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Pak $(\alpha, \mathcal{A})$ -reprezentace čísla x je

$$x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \alpha^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A}$$

Zapisujeme

$$x = x_n x_{n-1} \dots x_0 \bullet x_{-1} x_{-2} \dots \quad \text{nebo} \quad x = 0 \bullet x_n x_{n-1} \dots$$

Požadujeme

- abeceda $\mathcal{A}$ konečná
- $|\alpha| > 1$ kvůli konvergenci
- aby bylo dost čísel, která mají $(\alpha, \mathcal{A})$ -reprezentaci

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznačně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznačně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 =$$

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznačně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznačně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznačně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznačně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854 báze $b = -2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznačně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854 báze $b = -2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru

$$x = a_n (-2)^n + a_{n-1} (-2)^{n-1} + \dots + a_1 (-2)^1 + a_0 (-2)^0, \quad \text{kde } a_i \in \{0, 1\}.$$

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznačně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854 báze $b = -2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru

$$x = a_n (-2)^n + a_{n-1} (-2)^{n-1} + \dots + a_1 (-2)^1 + a_0 (-2)^0, \quad \text{kde } a_i \in \{0, 1\}.$$

54 =

Poziční soustavy

Mírná exotika základ $b \in \mathbb{N}$, cifry $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Každé $x \in \mathbb{N}$ lze jednoznačně zapsat

$$x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0, \quad \text{kde } a_i \in \mathcal{D}.$$

Např. $b = 2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

$$54 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Ale co $x \in \mathbb{Z}, x < 0$?

Grunwald 1854 báze $b = -2$, $\mathcal{D} = \{0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru

$$x = a_n (-2)^n + a_{n-1} (-2)^{n-1} + \dots + a_1 (-2)^1 + a_0 (-2)^0, \quad \text{kde } a_i \in \{0, 1\}.$$

$$54 = 1 \cdot (-2)^6 + 0 \cdot (-2)^5 + 0 \cdot (-2)^4 + 1 \cdot (-2)^3 + 0 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^1 + 0 \cdot (-2)^0$$

Poziční soustavy

Mírná exotika II Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážit $0, 1, 2, \dots, 40$ gramů ?

Poziční soustavy

Mírná exotika II Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážit $0, 1, 2, \dots, 40$ gramů ?

symetrická ternární soustava báze $b = 3$, $\mathcal{D} = \{-1, 0, 1\}$

Poziční soustavy

Mírná exotika II Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážit $0, 1, 2, \dots, 40$ gramů ?

symetrická ternární soustava báze $b = 3$, $\mathcal{D} = \{-1, 0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru

$x = a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + \dots + a_1 3^1 + a_0 3^0$, kde $a_i \in \{\overline{1}, 0, 1\}$.

$$54 =$$

Poziční soustavy

Mírná exotika II Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážít $0, 1, 2, \dots, 40$ gramů ?

symetrická ternární soustava báze $b = 3$, $\mathcal{D} = \{-1, 0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru

$x = a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + \dots + a_1 3^1 + a_0 3^0$, kde $a_i \in \{\bar{1}, 0, 1\}$.

$$54 = 3^4 + \bar{1} \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0$$

Poziční soustavy

Mírná exotika II Úloha: kolik závaží je třeba k laboratorním vahám, aby šlo navážít $0, 1, 2, \dots, 40$ gramů ?

symetrická ternární soustava báze $b = 3$, $\mathcal{D} = \{-1, 0, 1\}$

Každé $x \in \mathbb{Z}$ lze zapsat jednoznačně ve tvaru

$x = a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + \dots + a_1 3^1 + a_0 3^0$, kde $a_i \in \{\bar{1}, 0, 1\}$.

$$54 = 3^4 + \bar{1} \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0$$

V této soustavě počítaly první ruské počítače

Výhody:

kratší zápis čísla než binárně

lze zpsat kladné i záporné čísla

rozvoj $-x$ snadno z rozvoje x ,

stačí umět sčítat, odčítání stejné

vhodná abeceda na násobení

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nechť $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Pak

- každé $x \in \mathbb{C}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$;
- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=0}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$ jednoznačně.

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nechť $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Pak

- každé $x \in \mathbb{C}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$;
- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=0}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$ jednoznačně.

$$\gamma = i - 1, \gamma^2 = -2i, \gamma^3 = 2 + 2i, \gamma^4 = -4, \dots$$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nechť $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Pak

- každé $x \in \mathbb{C}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$;
- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=0}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$ jednoznačně.

$$\gamma = i - 1, \gamma^2 = -2i, \gamma^3 = 2 + 2i, \gamma^4 = -4, \dots$$
$$2 = \gamma^3 + \gamma^2$$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nechť $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Pak

- každé $x \in \mathbb{C}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$;
- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=0}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$ jednoznačně.

$$\begin{aligned} \gamma &= i - 1, \gamma^2 = -2i, \gamma^3 = 2 + 2i, \gamma^4 = -4, \dots \\ 2 &= \gamma^3 + \gamma^2 \implies (2)_\gamma = 1100 \bullet \end{aligned}$$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nechť $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Pak

- každé $x \in \mathbb{C}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$;
- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=0}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$ jednoznačně.

$$\gamma = i - 1, \gamma^2 = -2i, \gamma^3 = 2 + 2i, \gamma^4 = -4, \dots$$

$$2 = \gamma^3 + \gamma^2 \implies (2)_\gamma = 1100 \bullet$$

$$(3)_\gamma = 1101 \bullet$$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nechť $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Pak

- každé $x \in \mathbb{C}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$;
- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=0}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$ jednoznačně.

$$\gamma = i - 1, \gamma^2 = -2i, \gamma^3 = 2 + 2i, \gamma^4 = -4, \dots$$

$$2 = \gamma^3 + \gamma^2 \implies (2)_\gamma = 1100 \bullet$$

$$(3)_\gamma = 1101 \bullet \quad (4)_\gamma = 111010000 \bullet$$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nechť $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Pak

- každé $x \in \mathbb{C}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$;
- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=0}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$ jednoznačně.

$$\gamma = i - 1, \gamma^2 = -2i, \gamma^3 = 2 + 2i, \gamma^4 = -4, \dots$$

$$2 = \gamma^3 + \gamma^2 \implies (2)_\gamma = 1100\bullet$$

$$(3)_\gamma = 1101\bullet \quad (4)_\gamma = 111010000\bullet \quad (-1)_\gamma = 11101\bullet$$

Komplexní báze $\gamma = i - 1$, abeceda $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Penney 1965

Nechť $\gamma = i - 1$ a $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Pak

- každé $x \in \mathbb{C}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$;
- každé $x \in \mathbb{Z}[i] = \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$ lze zapsat ve tvaru $x = \sum_{k=0}^n x_k \gamma^k$, kde $x_k \in \mathcal{A}$ jednoznačně.

$$\gamma = i - 1, \gamma^2 = -2i, \gamma^3 = 2 + 2i, \gamma^4 = -4, \dots$$

$$2 = \gamma^3 + \gamma^2 \implies (2)_\gamma = 1100\bullet$$

$$(3)_\gamma = 1101\bullet \quad (4)_\gamma = 111010000\bullet \quad (-1)_\gamma = 11101\bullet$$

Jak sčítat v této soustavě?

Paralelní sčítání (libovolný počet procesorů)

Paralelní sčítání (libovolný počet procesorů)

Hledáme algoritmus na **paralelní sčítání**, tj. algoritmus, který by našel výsledek v čase nezávislém na délce sčítanců

Paralelní sčítání (libovolný počet procesorů)

Hledáme algoritmus na **paralelní sčítání**, tj. algoritmus, který by našel výsledek v čase nezávislém ne délce sčítanců

$$\begin{aligned} X &= \dots x_{j-4} x_{j-4+1} x_{j-4+2} \dots x_j \dots x_{j+4} x_{j+4+1} x_{j+4+2} \dots \\ Y &= \dots y_{j-4} y_{j-4+1} y_{j-4+2} \dots y_j \dots y_{j+4} y_{j+4+1} y_{j+4+2} \dots \\ X+Y &= \dots z_j z_{j+1} z_{j+2} \dots \end{aligned}$$

Paralelní sčítání (libovolný počet procesorů)

Hledáme algoritmus na **paralelní sčítání**, tj. algoritmus, který by našel výsledek v čase nezávislém ne délce sčítanců

$$\begin{aligned}
 X &= \dots x_{j-t} x_{j-t+1} x_{j-t+2} \dots x_j \dots x_{j+r} x_{j+r+1} x_{j+r+2} \dots \\
 Y &= \dots y_{j-t} y_{j-t+1} y_{j-t+2} \dots y_j \dots y_{j+r} y_{j+r+1} y_{j+r+2} \dots \\
 X+Y &= \dots z_j z_{j+1} z_{j+2} \dots
 \end{aligned}$$

$x =$	$\dots x_{j+t} \dots x_{j+1} x_j x_{j-1} \dots x_{j-r} \dots$	$x_j \in \mathcal{A}$
$y =$	$\dots y_{j+t} \dots y_{j+1} y_j y_{j-1} \dots y_{j-r} \dots$	$y_j \in \mathcal{A}$
$u_j = x_j + y_j$	$\dots \underbrace{u_{j+t} \dots u_{j+1} u_j u_{j-1} \dots u_{j-r}} \dots$	$u_j \in \mathcal{A} + \mathcal{A}$

Paralelní sčítání (libovolný počet procesorů)

Hledáme algoritmus na **paralelní sčítání**, tj. algoritmus, který by našel výsledek v čase nezávislém ne délce sčítanců

$$\begin{aligned}
 X &= \dots x_{j-t} x_{j-t+1} x_{j-t+2} \dots x_j \dots x_{j+r} x_{j+r+1} x_{j+r+2} \dots \\
 Y &= \dots y_{j-t} y_{j-t+1} y_{j-t+2} \dots y_j \dots y_{j+r} y_{j+r+1} y_{j+r+2} \dots \\
 X+Y &= \dots z_j z_{j+1} z_{j+2} \dots
 \end{aligned}$$

$x =$	$\dots x_{j+t} \dots x_{j+1} x_j x_{j-1} \dots x_{j-r} \dots$	$x_j \in \mathcal{A}$
$y =$	$\dots y_{j+t} \dots y_{j+1} y_j y_{j-1} \dots y_{j-r} \dots$	$y_j \in \mathcal{A}$
$u_j = x_j + y_j$	$\dots \underbrace{u_{j+t} \dots u_{j+1} u_j u_{j-1} \dots u_{j-r}} \dots$	$u_j \in \mathcal{A} + \mathcal{A}$
$v_j = \phi(u_{j+t} \dots u_{j-r})$	$\dots v_{j+t} \dots v_{j+1} v_j v_{j-1} \dots v_{j-r} \dots$	$v_j \in \mathcal{A}$

Klasický příklad

Základ $b =$ deset, cifry $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, 9\}$.

Zápis jednoznačný, až na $1\bullet = 0\bullet 9999\dots$

Klasický příklad

Základ $b = \text{deset}$, cifry $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, 9\}$.

Zápis jednoznačný, až na $1\bullet = 0\bullet 9999\dots$

Při aritmetických operacích přenos

$$\begin{array}{r} 39999999999999\dots 9999999999999999 \\ 00000000000000\dots 0000000000000001 \\ \hline 1000000000000000\dots 0000000000000000 \end{array}$$

Nutná redundance !!!

Klasický příklad

Základ $b = \text{deset}$, cifry $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, 9\}$.

Zápis jednoznačný, až na $1\bullet = 0\bullet 9999\dots$

Při aritmetických operacích přenos

$$\begin{array}{r} 39999999999999\dots 9999999999999999 \\ 00000000000000\dots 0000000000000001 \\ \hline 1000000000000000\dots 0000000000000000 \end{array}$$

Nutná redundance !!!

Pentium používá pro dělení algoritmus SRT a redundantní soustavu se základem $\beta = 4$ a pěti ciframi $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Báze $b = 4$, abeceda $\mathcal{A} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Vstup: dvě konečné posloupnosti cifer (x_i) a (y_i) v $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Výstup: konečná posloupnost cifer (z_i) z $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, taková, že

$$\sum x_i 4^i + \sum y_i 4^i = \sum z_i 4^i.$$

Pro každé i paralelně prováděj

- $w_i := x_i + y_i$
- když $\begin{cases} w_i \geq 3 \\ w_i = 2 \text{ and } w_{i-1} \geq 2 \end{cases}$, polož $q_i := 1$
- když $\begin{cases} w_i \leq -3 \\ w_i = -2 \text{ and } w_{i-1} \leq -2 \end{cases}$, polož $q_i := -1$
- jinak $q_i := 0$
- $z_i := w_i - q_i 4 + q_{i-1}$

Neceločíselné báze

Rényi 1957

Nechť $\beta > 1$. Pak každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \beta^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a < \beta\};$$

Neceločíselné báze

Rényi 1957

Nechť $\beta > 1$. Pak každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \beta^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a < \beta\};$$

Příklad :

Neceločíselné báze

Rényi 1957

Nechť $\beta > 1$. Pak každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \beta^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a < \beta\};$$

Příklad : báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$ a abeceda $\{0, 1\}$

Neceločíselné báze

Rényi 1957

Nechť $\beta > 1$. Pak každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \beta^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a < \beta\};$$

Příklad : báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$ a abeceda $\{0, 1\}$
 τ je kořen rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

Neceločíselné báze

Rényi 1957

Nechť $\beta > 1$. Pak každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \beta^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a < \beta\};$$

Příklad : báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$ a abeceda $\{0, 1\}$
 τ je kořen rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$(2)_{\tau} = 1 \bullet 11$$

Neceločíselné báze

Rényi 1957

Nechť $\beta > 1$. Pak každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \beta^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a < \beta\};$$

Příklad : báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$ a abeceda $\{0, 1\}$
 τ je kořen rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$(2)_{\tau} = 1 \bullet 11 = 10 \bullet 01$$

Neceločíselné báze

Rényi 1957

Nechť $\beta > 1$. Pak každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \beta^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a < \beta\};$$

Příklad : báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$ a abeceda $\{0, 1\}$
 τ je kořen rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$(2)_{\tau} = 1 \bullet 11 = 10 \bullet 01 = 10 \bullet 0011 = \dots$$

Neceločíselné báze

Rényi 1957

Nechť $\beta > 1$. Pak každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \beta^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a < \beta\};$$

Příklad : báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$ a abeceda $\{0, 1\}$
 τ je kořen rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$(2)_{\tau} = 1 \bullet 11 = 10 \bullet 01 = 10 \bullet 0011 = \dots$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{\tau} = 0 \bullet (010)^{\omega} = 0 \bullet 010010010010010\dots$$

Neceločíselné báze

Rényi 1957

Nechť $\beta > 1$. Pak každé $x \in [0, +\infty)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = \sum_{k=-\infty}^n x_k \beta^k, \quad \text{kde } x_k \in \mathcal{A} = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a < \beta\};$$

Příklad : báze $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$ a abeceda $\{0, 1\}$
 τ je kořen rovnice $\tau^2 = \tau + 1$

$$(2)_{\tau} = 1 \bullet 11 = 10 \bullet 01 = 10 \bullet 0011 = \dots$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{\tau} = 0 \bullet (010)^{\omega} = 0 \bullet 010010010010010\dots$$

Lexikograficky největší reprezentaci lze získat **hladovým** algoritmem

Které báze dovolují paralelní sčítání?

Které báze dovolují paralelní sčítání?

Nutně: $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) + \text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) \subset \text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$

Které báze dovolují paralelní sčítání?

Nutně: $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) + \text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) \subset \text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$

$\implies \alpha$ algebraické číslo

Které báze dovolují paralelní sčítání?

Nutně: $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) + \text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha) \subset \text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$

$\implies \alpha$ algebraické číslo

Frougny, Heller, P., Svobodová, 2015

Nechť báze α je algebraické číslo. Abeceda $\mathcal{A}$, ve které lze sčítání na $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ provádět paralelně existuje právě tehdy, pokud žádný sdružený kořen od α není v absolutní hodnotě roven 1.

Kolik redundance je nutné na paralelní sčítání?

Kolik redundance je nutné na paralelní sčítání?

Proč vadí velká redundance?

Kolik redundance je nutné na paralelní sčítání?

Proč vadí velká redundance?

- $b \in \mathbb{N}$: then $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, \dots, b-1\}$ and $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, b-1, b\}$
allow parallel addition (B. Parhami, 1990)

Kolik redundance je nutné na paralelní sčítání?

Proč vadí velká redundance?

- $b \in \mathbb{N}$: then $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, \dots, b-1\}$ and $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, b-1, b\}$ allow parallel addition (B. Parhami, 1990)
- $\gamma = i - 1$: Muller and Nielsen (1996) gave an algorithm for parallel addition in $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, 2\}$.
They formulated an open question: Can the alphabet be reduced to $\{-1, 0, 1\}$?

Kolik redundance je nutné na paralelní sčítání?

Proč vadí velká redundance?

- $b \in \mathbb{N}$: then $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, \dots, b-1\}$ and $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, b-1, b\}$ allow parallel addition (B. Parhami, 1990)
- $\gamma = i - 1$: Muller and Nielsen (1996) gave an algorithm for parallel addition in $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, 2\}$.
They formulated an open question: Can the alphabet be reduced to $\{-1, 0, 1\}$?
- $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ and $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ then any $x \in \text{Fin}_{\mathcal{A}}(\tau)$ has infinitely many τ -representations,

Kolik redundance je nutné na paralelní sčítání?

Proč vadí velká redundance?

- $b \in \mathbb{N}$: then $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, \dots, b-1\}$ and $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, b-1, b\}$ allow parallel addition (B. Parhami, 1990)
- $\gamma = i - 1$: Muller and Nielsen (1996) gave an algorithm for parallel addition in $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, 2\}$.
They formulated an open question: Can the alphabet be reduced to $\{-1, 0, 1\}$?
- $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ and $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ then any $x \in \text{Fin}_{\mathcal{A}}(\tau)$ has infinitely many τ -representations, but $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ does not allow parallelism (Frougny, 1999)

Kolik redundance je nutné na paralelní sčítání?

Proč vadí velká redundance?

- $b \in \mathbb{N}$: then $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, \dots, b-1\}$ and $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, b-1, b\}$ allow parallel addition (B. Parhami, 1990)
- $\gamma = i - 1$: Muller and Nielsen (1996) gave an algorithm for parallel addition in $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, 2\}$.
They formulated an open question: Can the alphabet be reduced to $\{-1, 0, 1\}$?
- $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ and $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ then any $x \in \text{Fin}_{\mathcal{A}}(\tau)$ has infinitely many τ -representations, but $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ does not allow parallelism (Frougny, 1999)
- $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, Berstel (1986) parallel addition in $\{0, 1, \dots, 12\}$

Kolik redundance je nutné na paralelní sčítání?

Proč vadí velká redundance?

- $b \in \mathbb{N}$: then $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, \dots, b-1\}$ and $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, b-1, b\}$ allow parallel addition (B. Parhami, 1990)
- $\gamma = i - 1$: Muller and Nielsen (1996) gave an algorithm for parallel addition in $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1, 2\}$.
They formulated an open question: Can the alphabet be reduced to $\{-1, 0, 1\}$?
- $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ and $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ then any $x \in \text{Fin}_{\mathcal{A}}(\tau)$ has infinitely many τ -representations, but $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ does not allow parallelism (Frougny, 1999)
- $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, Berstel (1986) parallel addition in $\{0, 1, \dots, 12\}$
- Milena (2010) parallel addition by a 21-local function in alphabet $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1\}$, or $\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$

Dolní mez na velikost abecedy

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, P., Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomem $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze provádět paralelně, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1 , pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, P., Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomem $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze provádět paralelně, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1 , pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, P., Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomem $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze provádět paralelně, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1 , pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Příklad $\gamma = i - 1$: minimální polynom $f(x) = x^2 + 2x + 2$,

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, P., Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomem $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze provádět paralelně, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1 , pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Příklad $\gamma = i - 1$: minimální polynom $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $|f(1)| = 5$,

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, P., Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomem $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze provádět paralelně, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1 , pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Příklad $\gamma = i - 1$: minimální polynom $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $|f(1)| = 5$, paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 5$.

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, P., Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomem $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze provádět paralelně, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1 , pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Příklad $\gamma = i - 1$: minimální polynom $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $|f(1)| = 5$, paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 5$.

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, P., Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomem $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze provádět paralelně, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1 , pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Příklad $\gamma = i - 1$: minimální polynom $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $|f(1)| = 5$, paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 5$.

Příklad zlatý řez τ : minimální polynom $f(x) = x^2 - x - 1$,

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, P., Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomem $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze provádět paralelně, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1 , pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Příklad $\gamma = i - 1$: minimální polynom $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $|f(1)| = 5$, paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 5$.

Příklad zlatý řez τ : minimální polynom $f(x) = x^2 - x - 1$, $|f(1)| = 1$,

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, P., Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomem $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze provádět paralelně, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1 , pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Příklad $\gamma = i - 1$: minimální polynom $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $|f(1)| = 5$, paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 5$.

Příklad zlatý řez τ : minimální polynom $f(x) = x^2 - x - 1$, $|f(1)| = 1$, paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 3$.

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, P., Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomem $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze provádět paralelně, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1 , pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Příklad $\gamma = i - 1$: minimální polynom $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $|f(1)| = 5$, paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 5$.

Příklad zlatý řez τ : minimální polynom $f(x) = x^2 - x - 1$, $|f(1)| = 1$, paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 3$.

Příklad $\gamma = i - 1$:

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, P., Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomem $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze provádět paralelně, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1 , pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Příklad $\gamma = i - 1$: minimální polynom $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $|f(1)| = 5$, paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 5$.

Příklad zlatý řez τ : minimální polynom $f(x) = x^2 - x - 1$, $|f(1)| = 1$, paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 3$.

Příklad $\gamma = i - 1$: $|f(1)| = 5$,

Dolní mez na velikost abecedy

Frougny, P., Svobodová, 2012

Nechť báze α je algebraické celé číslo s minimálním polynomem $f(X)$ a nechť abeceda $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}$. Když sčítání na $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ lze provádět paralelně, pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)|$. Když navíc α je reálné číslo > 1 , pak $\#\mathcal{A} \geq |f(1)| + 2$.

Příklad $\gamma = i - 1$: minimální polynom $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $|f(1)| = 5$, paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 5$.

Příklad zlatý řez τ : minimální polynom $f(x) = x^2 - x - 1$, $|f(1)| = 1$, paralelně lze sčítat v abecedě s $\#\mathcal{A} \geq 3$.

Příklad $\gamma = i - 1$: $|f(1)| = 5$,
(Milena 2014) paralelně lze sčítat v abecedě $\mathcal{A} = \{0, \pm 1, \pm i\}$.

K čemu redundance?

- **Rychlé algoritmy** násobení pro kryptografii

V binární soustavě s abecedou $\{-1, 0, 1\}$ volba rozvoje s minimální Hammingovou váhou (počet nenulových cifer).

– non-adjacent form (Reitwiesner, Booth . . .)

K čemu redundance?

- **Rychlé algoritmy** násobení pro kryptografii

V binární soustavě s abecedou $\{-1, 0, 1\}$ volba rozvoje s minimální Hammingovou váhou (počet nenulových cifer).

- non-adjacent form (Reitwiesner, Booth . . .)

Nestandardní soustavy

- Fibonacciho soustava (Heuberger)

- Báze $\beta > 1$ a minimalita vzhledem k absolutnímu součtu cifer

$\|x\| = \sum_j |x_j|$ (Frougny & Steiner)

K čemu redundancy?

- **Rychlé algoritmy** násobení pro kryptografii

V binární soustavě s abecedou $\{-1, 0, 1\}$ volba rozvoje s minimální Hammingovou váhou (počet nenulových cifer).

- non-adjacent form (Reitwiesner, Booth . . .)

Nestandardní soustavy

- Fibonacciho soustava (Heuberger)

- Báze $\beta > 1$ a minimalita vzhledem k absolutnímu součtu cifer

$\|x\| = \sum_j |x_j|$ (Frougny & Steiner)

- **Robustní ADC** (analogově digitální převodníky)

- The golden ratio encoder (Daubechies, Yilmaz)

- Negative beta encoder (Kohda et al).

Jak chytře násobit?

Jak chytře násobit?

Co je špatně na klasických algoritmech pro $A \times B$?

$$0 \bullet x_1 x_2 \cdots x_n \quad \times \quad 0 \bullet y_1 y_2 \cdots y_n \quad = \quad 0 \bullet z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1} \cdots z_{2n}$$

Jak chytře násobit?

Co je špatně na klasických algoritmech pro $A \times B$?

$$0 \bullet x_1 x_2 \cdots x_n \quad \times \quad 0 \bullet y_1 y_2 \cdots y_n \quad = \quad 0 \bullet z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1} \cdots z_{2n}$$

Jak chytře násobit?

Co je špatně na klasických algoritmech pro $A \times B$?

$$0 \bullet x_1 x_2 \cdots x_n \quad \times \quad 0 \bullet y_1 y_2 \cdots y_n \quad = \quad 0 \bullet z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1} \cdots z_{2n}$$

On-line algoritmus se zpožděním $\delta \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{l} X = 0.\overset{\text{red}}{x_1}\overset{\text{red}}{x_2} \dots \overset{\text{red}}{x_\delta}\overset{\text{red}}{x_{\delta+1}}\overset{\text{green}}{x_{\delta+2}}\overset{\text{green}}{x_{\delta+3}} \dots \\ Y = 0.\overset{\text{red}}{y_1}\overset{\text{red}}{y_2} \dots \underbrace{\overset{\text{red}}{y_\delta}\overset{\text{red}}{y_{\delta+1}}\overset{\text{green}}{y_{\delta+2}}\overset{\text{green}}{y_{\delta+3}}}_{\text{green}} \dots \\ X \cdot Y = 0.\overset{\text{red}}{p_1}\overset{\text{green}}{p_2}\overset{\text{green}}{p_3} \dots \end{array}$$

Jak chytře násobit?

Co je špatně na klasických algoritmech pro $A \times B$?

$$0 \bullet x_1 x_2 \cdots x_n \quad \times \quad 0 \bullet y_1 y_2 \cdots y_n \quad = \quad 0 \bullet z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1} \cdots z_{2n}$$

On-line algoritmus se zpožděním $\delta \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{l} X = 0.\overset{\text{red}}{x_1 x_2 \dots x_6} \overset{\text{green}}{x_7 x_8 x_9} \dots \\ Y = 0.\overset{\text{red}}{y_1 y_2 \dots y_6} \overset{\text{green}}{y_7 y_8 y_9} \dots \\ \hline X \cdot Y = 0.\overset{\text{red}}{p_1} \overset{\text{green}}{p_2 p_3} \dots \end{array}$$

Trivedi a Ercegovic v roce 1974 zavedli on-line algoritmus na násobení a dělení pro redundantní soustavy se základem $b \in \mathbb{N}$.

Jak chytře násobit?

Co je špatně na klasických algoritmech pro $A \times B$?

$$0 \bullet x_1 x_2 \cdots x_n \quad \times \quad 0 \bullet y_1 y_2 \cdots y_n \quad = \quad 0 \bullet z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1} \cdots z_{2n}$$

On-line algoritmus se zpožděním $\delta \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{l} X = 0 \bullet \overset{\text{red}}{x_1} \overset{\text{red}}{x_2} \cdots \overset{\text{red}}{x_6} \overset{\text{red}}{x_4} \overset{\text{green}}{x_8} \overset{\text{green}}{x_5} \cdots \\ Y = 0 \bullet \overset{\text{red}}{y_1} \overset{\text{red}}{y_2} \cdots \underbrace{\overset{\text{red}}{y_6} \overset{\text{red}}{y_4} \overset{\text{green}}{y_8} \overset{\text{green}}{y_5}}_{\text{green}} \cdots \\ X \cdot Y = 0 \bullet \overset{\text{red}}{p_1} \overset{\text{green}}{p_2} \overset{\text{green}}{p_3} \cdots \end{array}$$

Trivedi a Ercegovic v roce 1974 zavedli on-line algoritmus na násobení a dělení pro redundantní soustavy se základem $b \in \mathbb{N}$.

Frougny, Pavelka, P., Svobodová, 2018

Jakmile lze ve $\text{Fin}_{\mathcal{A}}(\alpha)$ paralelně sčítat, pak lze také on-line násobit.

β -celá čísla

$$\mathbb{Z}_\beta = \left\{ \pm x \mid x \text{ má rozvoj } x_k x_{k-1} \cdots x_0 \bullet 0^\omega \right\}.$$

Geometrie množiny $\mathbb{Z}_\beta$:

$\beta \in \mathbb{Z}$	:	$\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}$
$\beta \notin \mathbb{Z}$	:	$\mathbb{Z}_\beta$???

β -celá čísla

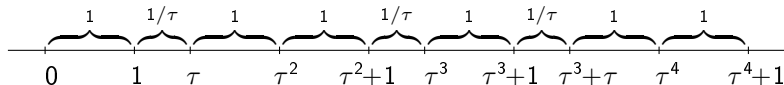
$$\mathbb{Z}_\beta = \left\{ \pm x \mid x \text{ má rozvoj } x_k x_{k-1} \cdots x_0 \bullet 0^\omega \right\}.$$

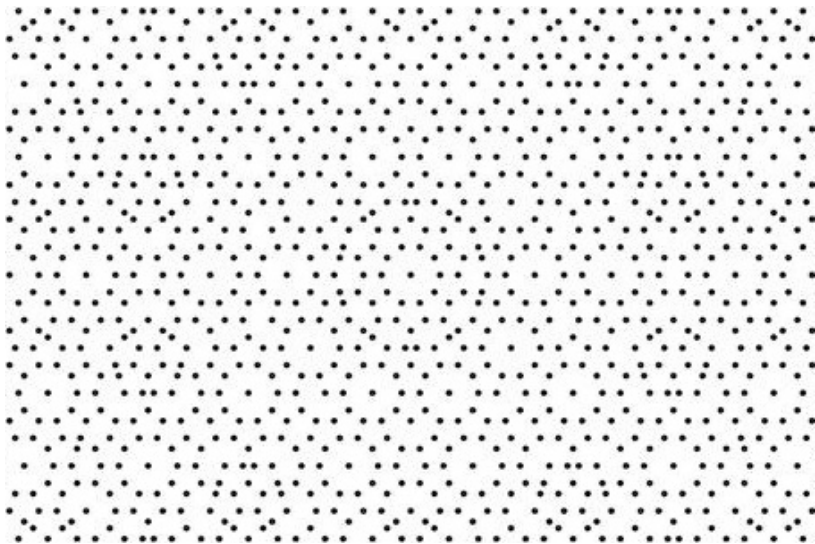
Geometrie množiny $\mathbb{Z}_\beta$:

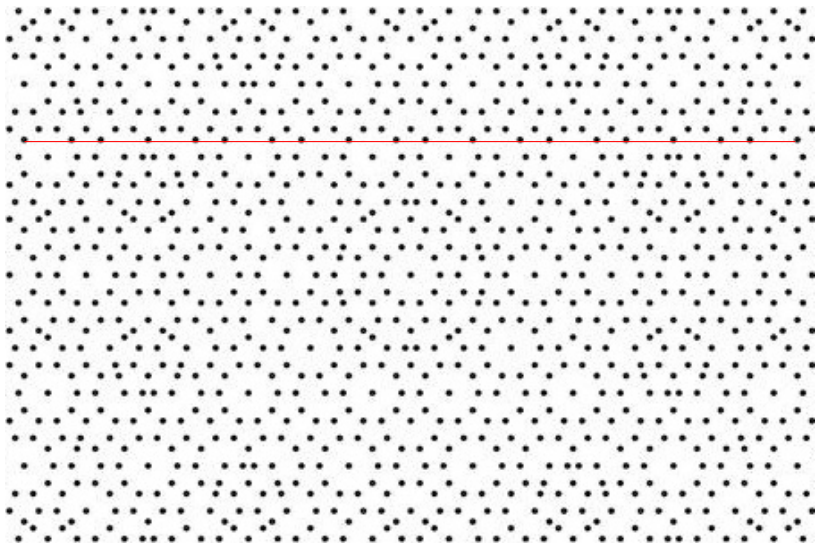
$\beta \in \mathbb{Z}$	:	$\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}$
$\beta \notin \mathbb{Z}$	:	$\mathbb{Z}_\beta$???

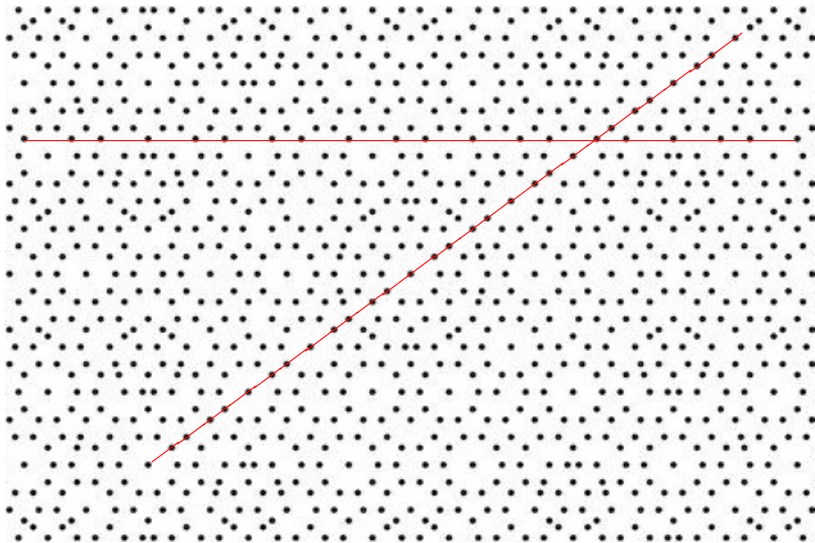
Příklad: Báze $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, cifry $\{0, 1\}$, zakázáno 11.

$$\mathbb{Z}_\tau = \left\{ \pm \sum_{i=0}^k x_i \tau^i \mid x_i \in \{0, 1\}, x_i x_{i+1} = 0 \right\}$$

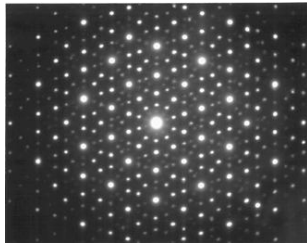
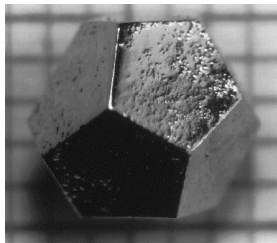




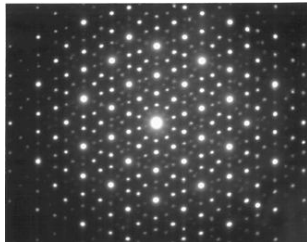
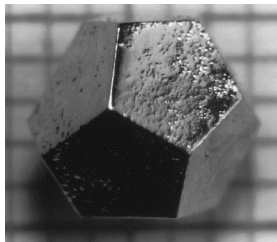




Model kvazikrystalu



Model kvazikrystalu



- V roce 1982 D. Shechtman objevil materiál, s difrakčním obrazem o symetriích 2,3,5. (symetrie icosahedronu).
- Rotační symetrie řádu 5 u periodických 2D a 3D struktur zakázaná.
- Pro 'hezký' difrakční obraz nutné uspořádání na dálku.
- Pozice bodů ve 2D nelze popsat dvěma souřadnicemi v $\mathbb{Z}$.

Metoda 'ukroj a promítání'

$$\begin{array}{ccc} & H \subset \mathbb{R}^d & \\ \swarrow \Pi_1 & & \searrow \Pi_2 \\ \Pi_1(H) \subset V_1 & \xrightarrow{\Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}} & \Pi_2(H) \subset V_2 \end{array}$$
$$H = \{ \sum_{i=1}^d a_i e_i \mid a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Z} \}$$
$$e_1, e_2, \dots, e_d \quad \text{báze } \mathbb{R}^d$$
$$\mathbb{R}^d = V_1 \oplus V_2$$

Projekce: Π_1 zúženo na H prosté; $\Pi_2(H)$ husté ve V_2 .

Metoda 'ukroj a promítání'

$$\begin{array}{ccc} & H \subset \mathbb{R}^d & \\ \swarrow \Pi_1 & & \searrow \Pi_2 \\ \Pi_1(H) \subset V_1 & \xrightarrow{\Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}} & \Pi_2(H) \subset V_2 \end{array}$$

$H = \{ \sum_{i=1}^d a_i e_i \mid a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Z} \}$
 $e_1, e_2, \dots, e_d$ báze $\mathbb{R}^d$
 $\mathbb{R}^d = V_1 \oplus V_2$

Projekce: Π_1 zúženo na H prosté; $\Pi_2(H)$ husté ve V_2 .

Pro omezenou $\Omega \subset V_2$, $\Omega^\circ \neq \emptyset$:

$$\Sigma(\Omega) = \{ \Pi_1(x) \mid x \in H, \Pi_2(x) \in \Omega \}$$

Metoda 'ukroj a promítání'

$$\begin{array}{ccc} & H \subset \mathbb{R}^d & \\ \swarrow \Pi_1 & & \searrow \Pi_2 \\ \Pi_1(H) \subset V_1 & \xrightarrow{\Pi_2 \circ \Pi_1^{-1}} & \Pi_2(H) \subset V_2 \end{array}$$
$$H = \{ \sum_{i=1}^d a_i e_i \mid a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Z} \}$$
$$e_1, e_2, \dots, e_d \quad \text{báze } \mathbb{R}^d$$
$$\mathbb{R}^d = V_1 \oplus V_2$$

Projekce: Π_1 zúženo na H prosté; $\Pi_2(H)$ husté ve V_2 .

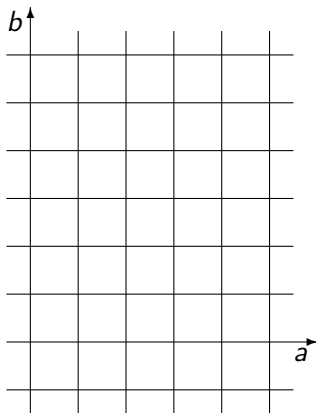
Pro omezenou $\Omega \subset V_2$, $\Omega^\circ \neq \emptyset$:

$$\Sigma(\Omega) = \{ \Pi_1(x) \mid x \in H, \Pi_2(x) \in \Omega \}$$

$\Sigma(\Omega)$ je delonovská, aperiodická, ...

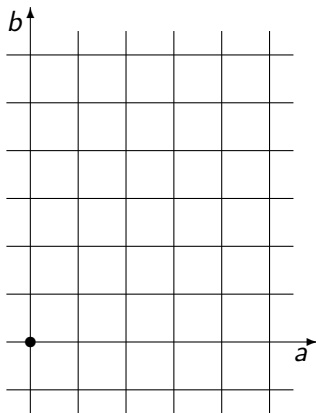
τ -celá čísla

x	$(x)_\tau$	$b\tau + a$



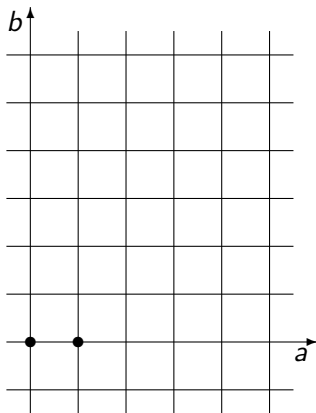
τ -celá čísla

x	$(x)_\tau$	$b\tau + a$
0	0	0



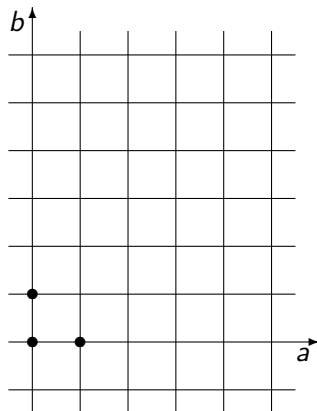
τ -celá čísla

x	$(x)_\tau$	$b\tau + a$
0	0	0
1	1	1



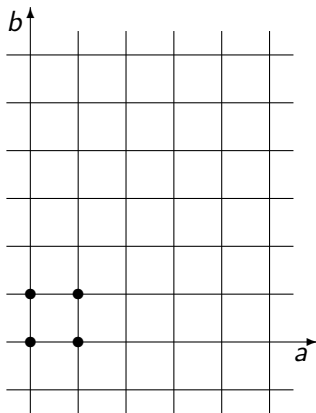
τ -celá čísla

x	$(x)_\tau$	$b\tau + a$
0	0	0
1	1	1
τ	10	τ



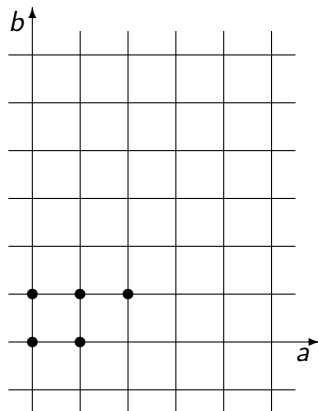
τ -celá čísla

x	$(x)_\tau$	$b\tau + a$
0	0	0
1	1	1
τ	10	τ
τ^2	100	$\tau + 1$



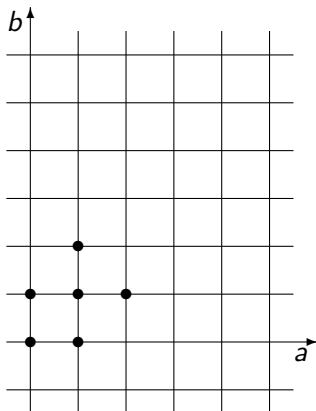
τ -celá čísla

x	$(x)_\tau$	$b\tau + a$
0	0	0
1	1	1
τ	10	τ
τ^2	100	$\tau + 1$
$\tau^2 + 1$	101	$\tau + 2$



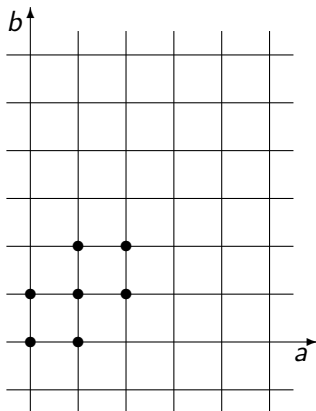
τ -celá čísla

x	$(x)_\tau$	$b\tau + a$
0	0	0
1	1	1
τ	10	τ
τ^2	100	$\tau + 1$
$\tau^2 + 1$	101	$\tau + 2$
τ^3	1000	$2\tau + 1$



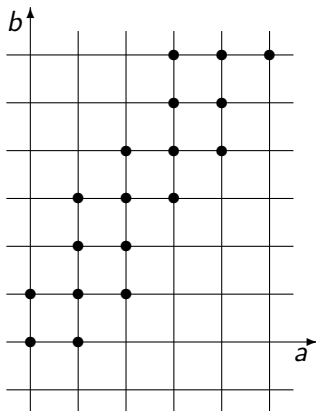
τ -celá čísla

x	$(x)_\tau$	$b\tau + a$
0	0	0
1	1	1
τ	10	τ
τ^2	100	$\tau + 1$
$\tau^2 + 1$	101	$\tau + 2$
τ^3	1000	$2\tau + 1$
$\tau^3 + 1$	1001	$2\tau + 2$



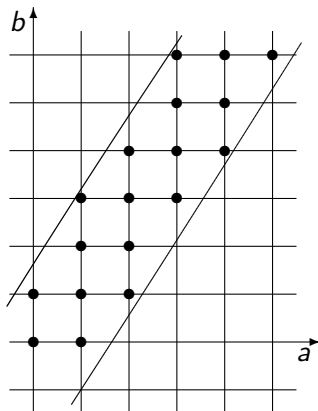
τ -celá čísla

x	$(x)_\tau$	$b\tau + a$
0	0	0
1	1	1
τ	10	τ
τ^2	100	$\tau + 1$
$\tau^2 + 1$	101	$\tau + 2$
τ^3	1000	$2\tau + 1$
$\tau^3 + 1$	1001	$2\tau + 2$
$\tau^3 + \tau$	1010	$3\tau + 1$
τ^4	10000	$3\tau + 2$
$\tau^4 + 1$	10001	$3\tau + 3$
$\tau^4 + \tau$	10010	$4\tau + 2$
$\tau^4 + \tau^2$	10100	$4\tau + 3$
$\tau^4 + \tau^2 + 1$	10101	$4\tau + 4$
τ^5	100000	$5\tau + 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



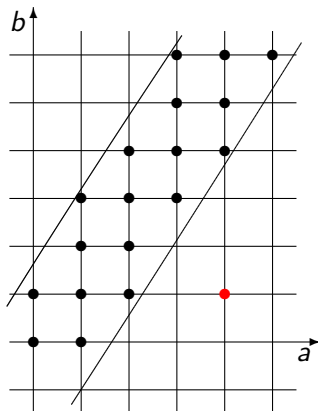
τ -celá čísla

x	$(x)_\tau$	$b\tau + a$
0	0	0
1	1	1
τ	10	τ
τ^2	100	$\tau + 1$
$\tau^2 + 1$	101	$\tau + 2$
τ^3	1000	$2\tau + 1$
$\tau^3 + 1$	1001	$2\tau + 2$
$\tau^3 + \tau$	1010	$3\tau + 1$
τ^4	10000	$3\tau + 2$
$\tau^4 + 1$	10001	$3\tau + 3$
$\tau^4 + \tau$	10010	$4\tau + 2$
$\tau^4 + \tau^2$	10100	$4\tau + 3$
$\tau^4 + \tau^2 + 1$	10101	$4\tau + 4$
τ^5	100000	$5\tau + 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



τ -celá čísla

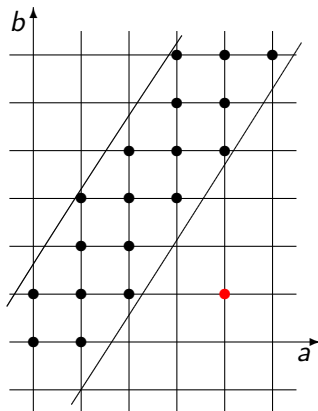
x	$(x)_\tau$	$b\tau + a$
0	0	0
1	1	1
τ	10	τ
τ^2	100	$\tau + 1$
$\tau^2 + 1$	101	$\tau + 2$
τ^3	1000	$2\tau + 1$
$\tau^3 + 1$	1001	$2\tau + 2$
$\tau^3 + \tau$	1010	$3\tau + 1$
τ^4	10000	$3\tau + 2$
$\tau^4 + 1$	10001	$3\tau + 3$
$\tau^4 + \tau$	10010	$4\tau + 2$
$\tau^4 + \tau^2$	10100	$4\tau + 3$
$\tau^4 + \tau^2 + 1$	10101	$4\tau + 4$
τ^5	100000	$5\tau + 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



$$\tau + 4 = 1001 \bullet_\tau 01$$

τ -celá čísla

x	$(x)_\tau$	$b\tau + a$
0	0	0
1	1	1
τ	10	τ
τ^2	100	$\tau + 1$
$\tau^2 + 1$	101	$\tau + 2$
τ^3	1000	$2\tau + 1$
$\tau^3 + 1$	1001	$2\tau + 2$
$\tau^3 + \tau$	1010	$3\tau + 1$
τ^4	10000	$3\tau + 2$
$\tau^4 + 1$	10001	$3\tau + 3$
$\tau^4 + \tau$	10010	$4\tau + 2$
$\tau^4 + \tau^2$	10100	$4\tau + 3$
$\tau^4 + \tau^2 + 1$	10101	$4\tau + 4$
τ^5	100000	$5\tau + 3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



$$\tau + 4 = 1001 \bullet_\tau 01$$

$$\mathbb{Z}_\tau \cap \mathbb{R}^+ = \{a + b\tau \geq 0 \mid a + b\tau' \in (-1, \tau)\}.$$

Obecněji

τ -rozvoje k popisu modelů s 5- a 10-četnou symetrií.

Obecněji

τ -rozvoje k popisu modelů s 5- a 10-četnou symetrií.

Rotace o úhel $\frac{2\pi}{k}$ pro $k \in \mathbb{N}$ vyžaduje iracionalitu $\cos \frac{2\pi}{k}$.

Experimentálně pozorované:

8-, 10- a 12-ti četné symetrie $\rightarrow \cos \frac{2\pi}{k}$ kvadratické číslo.

$2 \cos \frac{2\pi}{8} + 1$	$= 1 + \sqrt{2}$	kořen	$x^2 - 2x - 1$
$2 \cos \frac{2\pi}{10}$	$= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$	kořen	$x^2 - x - 1$
$2 \cos \frac{2\pi}{12} + 2$	$= 2 + \sqrt{3}$	kořen	$x^2 - 4x + 1$

Obecněji

τ -rozvoje k popisu modelů s 5- a 10-četnou symetrií.

Rotace o úhel $\frac{2\pi}{k}$ pro $k \in \mathbb{N}$ vyžaduje iracionalitu $\cos \frac{2\pi}{k}$.

Experimentálně pozorované:

8-, 10- a 12-ti četné symetrie $\rightarrow \cos \frac{2\pi}{k}$ kvadratické číslo.

$2 \cos \frac{2\pi}{8} + 1$	$= 1 + \sqrt{2}$	kořen	$x^2 - 2x - 1$
$2 \cos \frac{2\pi}{10}$	$= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$	kořen	$x^2 - x - 1$
$2 \cos \frac{2\pi}{12} + 2$	$= 2 + \sqrt{3}$	kořen	$x^2 - 4x + 1$

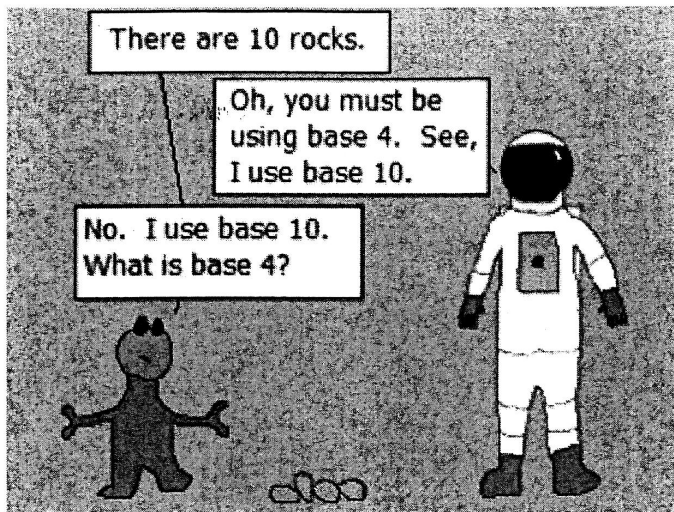
V roce 2011 taky 18-četná symetrie – kubické číslo.

- algebraické aspekty nestandardních soustav
- algoritmy pro práci v nestandardních soustavách
- popis souvisejících geometrických struktur

- algebraické aspekty nestandardních soustav
- algoritmy pro práci v nestandardních soustavách
- popis souvisejících geometrických struktur
- souvislosti s matematickou fyzikou, kombinatorikou na slovech, teorií čísel, . . .

Děkuji za pozornost

Co si odnést z přednášky



Every base is base 10.