

Co to znamená, když někdo tvrdí, že

$$1+2+3+4+\dots = -1/12$$

Občasný Seminář z Matematické Analýzy
12. 12. 2018

KAM FEI VŠB-TU Ostrava
Mirko Rokyta
KMA MFF UK Praha

1. Úvod

Opravdu je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12} ? \quad (1)$$

Opravdu je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12} ? \quad (1)$$

■ Odpověď krátká:

Opravdu je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12} ? \quad (1)$$

■ Odpověď krátká: Samozřejmě, že ne.

Opravdu je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12} ? \quad (1)$$

- Odpověď krátká: Samozřejmě, že ne.

Děkuji za pozornost.

Opravdu je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12} ? \quad (1)$$

- Odpověď krátká: Samozřejmě, že ne.

Děkuji za pozornost.

- Odpověď složitější:

Opravdu je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12} ? \quad (1)$$

- Odpověď krátká: Samozřejmě, že ne.

Děkuji za pozornost.

- Odpověď složitější: Pobavme se o tom, jak v rovnici (1) chápat "sčítání" a "rovnost".

Klasické pojetí: zkoumáme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Klasické pojetí: zkoumáme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Definujeme

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

Klasické pojetí: zkoumáme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Definujeme

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{a klademe} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

Klasické pojetí: zkoumáme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Definujeme

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{a klademe} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

pokud limita vpravo existuje (vlastní nebo nevlastní).

Klasické pojetí: zkoumáme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Definujeme

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{a klademe} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

pokud limita vpravo existuje (vlastní nebo nevlastní).

V našem případě:

$$s_n := 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Klasické pojetí: zkoumáme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Definujeme

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{a klademe} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

pokud limita vpravo existuje (vlastní nebo nevlastní).

V našem případě:

$$s_n := 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Klasické pojetí: zkoumáme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Definujeme

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{a klademe} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

pokud limita vpravo existuje (vlastní nebo nevlastní).

V našem případě:

$$s_n := 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} > \frac{n^2}{2}$$

Klasické pojetí: zkoumáme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Definujeme

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{a klademe} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

pokud limita vpravo existuje (vlastní nebo nevlastní).

V našem případě:

$$s_n := 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} > \frac{n^2}{2} \rightarrow +\infty$$

Klasické pojetí: zkoumáme

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Definujeme

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{a klademe} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

pokud limita vpravo existuje (vlastní nebo nevlastní).

V našem případě:

$$s_n := 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} > \frac{n^2}{2} \rightarrow +\infty$$

a tedy (v klasickém slova smyslu)

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = +\infty.$$

Varovné intermezzo: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Varovné intermezzo: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Do not do this at home:

Varovné intermezzo: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Do not do this at home anywhere:

Varovné intermezzo: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Do not do this at home anywhere:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

Varovné intermezzo: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Do not do this at home anywhere:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

Varovné intermezzo: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Do not do this at home anywhere:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

Numberphille: vezměme průměr z 0 a 1 (!!) $\implies S = \frac{1}{2}$

Varovné intermezzo: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Do not do this at home anywhere:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

Numberphille: vezměme průměr z 0 a 1 (!!) $\implies S = \frac{1}{2}$

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots)$$

Varovné intermezzo: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Do not do this at home anywhere:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

Numberphille: vezměme průměr z 0 a 1 (!!) $\implies S = \frac{1}{2}$

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S$$

Varovné intermezzo: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Do not do this at home anywhere:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

Numberphille: vezměme průměr z 0 a 1 (!!) $\implies S = \frac{1}{2}$

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S$$

$$2S = 1$$

Varovné intermezzo: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Do not do this at home anywhere:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

Numberphille: vezměme průměr z 0 a 1 (!!) $\implies S = \frac{1}{2}$

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S$$

$$2S = 1 \implies S = \frac{1}{2}$$

Varovné intermezzo: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Do not do this at home anywhere:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

Numberphille: vezměme průměr z 0 a 1 (!!) $\implies S = \frac{1}{2}$

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S$$

$$2S = 1 \implies S = \frac{1}{2}$$

Lze ukázat: pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje "metoda" výše uvedeného typu, která ukáže, že $S = \alpha$.

Varovné intermezzo: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Do not do this at home anywhere:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

Numberphille: vezměme průměr z 0 a 1 (!!) $\implies S = \frac{1}{2}$

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S$$

$$2S = 1 \implies S = \frac{1}{2}$$

Lze ukázat: pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje "metoda" výše uvedeného typu, která ukáže, že $S = \alpha$. Princip těchto postupů: s nekonvergentní řadou se zachází jako kdyby byla konvergentní.

Varovné intermezzo: $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Do not do this at home anywhere:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

$$S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1$$

Numberphille: vezměme průměr z 0 a 1 (!!) $\implies S = \frac{1}{2}$

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S$$

$$2S = 1 \implies S = \frac{1}{2}$$

Lze ukázat: pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ existuje "metoda" výše uvedeného typu, která ukáže, že $S = \alpha$. Princip těchto postupů: s nekonvergentní řadou se zachází jako kdyby byla konvergentní. **Again: Do not do this.**

Zobecněné sčítání aneb "sčítání nesčítatelného":

Zobecněné sčítání aneb "sčítání nesčítatelného":

- 1 Metoda aritmetických průměrů (Cesàrova metoda).

Zobecněné sčítání aneb "sčítání nesčítatelného":

- 1 Metoda aritmetických průměrů (Cesàrova metoda).
- 2 Abelova metoda ("pouť k hranici kruhu konvergence")

Zobecněné sčítání aneb "sčítání nesčítatelného":

- 1 Metoda aritmetických průměrů (Cesàrova metoda).
- 2 Abelova metoda ("pouť k hranici kruhu konvergence") a metoda analytického pokračování ("výlet daleko za hranice...").

Zobecněné sčítání aneb "sčítání nesčítatelného":

- 1 Metoda aritmetických průměrů (Cesàrova metoda).
- 2 Abelova metoda ("pouť k hranici kruhu konvergence") a metoda analytického pokračování ("výlet daleko za hranice...").
- 3 Metoda "vyhlazeného sčítání"

Zobecněné sčítání aneb "sčítání nesčítatelného":

- 1 Metoda aritmetických průměrů (Cesàrova metoda).
- 2 Abelova metoda ("pouť k hranici kruhu konvergence") a metoda analytického pokračování ("výlet daleko za hranice...").
- 3 Metoda "vyhlazeného sčítání" ("Smoothed Summability Method" [Terence Tao]).

Zobecněné sčítání aneb "sčítání nesčítatelného":

- 1 Metoda aritmetických průměrů (Cesàrova metoda).
- 2 Abelova metoda ("pouť k hranici kruhu konvergence") a metoda analytického pokračování ("výlet daleko za hranice...").
- 3 Metoda "vyhlazeného sčítání" ("Smoothed Summability Method" [Terence Tao]).

POZOR: Jakákoli zobecněná metoda sčítání řad by měla mít následující vlastnosti:

Zobecněné sčítání aneb "sčítání nesčítatelného":

- 1 Metoda aritmetických průměrů (Cesàrova metoda).
- 2 Abelova metoda ("pouť k hranici kruhu konvergence") a metoda analytického pokračování ("výlet daleko za hranice...").
- 3 Metoda "vyhlazeného sčítání" ("Smoothed Summability Method" [Terence Tao]).

POZOR: Jakákoli zobecněná metoda sčítání řad by měla mít následující vlastnosti:

- Pokud řada v klasickém slova smyslu konverguje (tj. její součet je konečný), musí zobecněná metoda jejího sčítání poskytnout tentýž výsledek.

Zobecněné sčítání aneb "sčítání nesčítatelného":

- 1 Metoda aritmetických průměrů (Cesàrova metoda).
- 2 Abelova metoda ("pouť k hranici kruhu konvergence") a metoda analytického pokračování ("výlet daleko za hranice...").
- 3 Metoda "vyhlazeného sčítání" ("Smoothed Summability Method" [Terence Tao]).

POZOR: Jakákoli zobecněná metoda sčítání řad by měla mít následující vlastnosti:

- Pokud řada v klasickém slova smyslu konverguje (tj. její součet je konečný), musí zobecněná metoda jejího sčítání poskytnout tentýž výsledek.
- Existuje řada, která v klasickém slova smyslu nekonverguje, pro kterou zobecněná metoda jejího sčítání poskytne výsledek.

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$.

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

Zobecněný (Cesàrovský) součet řady:

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

Zobecněný (Cesàrovský) součet řady: pro posloupnost částečných součtů uvažujeme posloupnost jejich aritmetických průměrů.

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

Zobecněný (Cesàrovský) součet řady: pro posloupnost částečných součtů uvažujeme posloupnost jejich aritmetických průměrů.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

Zobecněný (Cesàrovský) součet řady: pro posloupnost částečných součtů uvažujeme posloupnost jejich aritmetických průměrů.

$$\begin{aligned} S &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ s_n &: 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots \end{aligned}$$

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

Zobecněný (Cesàrovský) součet řady: pro posloupnost částečných součtů uvažujeme posloupnost jejich aritmetických průměrů.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$s_n : 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k : 1,$$

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

Zobecněný (Cesàrovský) součet řady: pro posloupnost částečných součtů uvažujeme posloupnost jejich aritmetických průměrů.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$s_n : 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k : 1, \frac{1}{2},$$

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

Zobecněný (Cesàrovský) součet řady: pro posloupnost částečných součtů uvažujeme posloupnost jejich aritmetických průměrů.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$s_n : 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3},$$

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

Zobecněný (Cesàrovský) součet řady: pro posloupnost částečných součtů uvažujeme posloupnost jejich aritmetických průměrů.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$s_n : 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2},$$

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

Zobecněný (Cesàrovský) součet řady: pro posloupnost částečných součtů uvažujeme posloupnost jejich aritmetických průměrů.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$s_n : 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5},$$

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

Zobecněný (Cesàrovský) součet řady: pro posloupnost částečných součtů uvažujeme posloupnost jejich aritmetických průměrů.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$s_n : 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \dots$$

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

Zobecněný (Cesàrovský) součet řady: pro posloupnost částečných součtů uvažujeme posloupnost jejich aritmetických průměrů.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$s_n : 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7},$$

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

Zobecněný (Cesàrovský) součet řady: pro posloupnost částečných součtů uvažujeme posloupnost jejich aritmetických průměrů.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$s_n : 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \dots, \frac{1}{2},$$

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

Zobecněný (Cesàrovský) součet řady: pro posloupnost částečných součtů uvažujeme posloupnost jejich aritmetických průměrů.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$s_n : 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{n}{2n-1}$$

2. Metoda aritmetických průměrů

Tvrzení 2.1

Mějme $s_n \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = s. \quad (2)$$

Zobecněný (Cesàrovský) součet řady: pro posloupnost částečných součtů uvažujeme posloupnost jejich aritmetických průměrů.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$s_n : 1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{n}{2n-1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Jak zafunguje Cesàrovská metoda na řadu

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots ?$$

Jak zafunguje Cesàrovská metoda na řadu

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots ?$

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

Jak zafunguje Cesàrovská metoda na řadu

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots ?$

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Jak zafunguje Cesàrovská metoda na řadu

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots ?$

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k}{2}$$

Jak zafunguje Cesàrovská metoda na řadu

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots ?$

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k}{2} = \frac{1}{n} \left[\mathcal{O}(n^3) + \mathcal{O}(n^2) \right]$$

Jak zafunguje Cesàrovská metoda na řadu

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots ?$

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k}{2} = \frac{1}{n} \left[\mathcal{O}(n^3) + \mathcal{O}(n^2) \right] = \mathcal{O}(n^2) \rightarrow \infty$$

3. Abelova metoda a analytická prodloužení

Ještě jednou zpět k:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

3. Abelova metoda a analytická prodloužení

Ještě jednou zpět k:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Náhrada (mocninnou) řadou:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

3. Abelova metoda a analytická prodloužení

Ještě jednou zpět k:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Náhrada (mocninnou) řadou:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

3. Abelova metoda a analytická prodloužení

Ještě jednou zpět k:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Náhrada (mocninnou) řadou:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x),$$

3. Abelova metoda a analytická prodloužení

Ještě jednou zpět k:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Náhrada (mocninnou) řadou:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

3. Abelova metoda a analytická prodloužení

Ještě jednou zpět k:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Náhrada (mocninnou) řadou:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Limitní přechod k hraničnímu bodu kruhu konvergence:

3. Abelova metoda a analytická prodloužení

Ještě jednou zpět k:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Náhrada (mocninnou) řadou:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Limitní přechod k hraničnímu bodu kruhu konvergence:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$$

3. Abelova metoda a analytická prodloužení

Ještě jednou zpět k:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Náhrada (mocninnou) řadou:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Limitní přechod k hraničnímu bodu kruhu konvergence:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \frac{1}{1 - (-1)}$$

3. Abelova metoda a analytická prodloužení

Ještě jednou zpět k:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Náhrada (mocninnou) řadou:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Limitní přechod k hraničnímu bodu kruhu konvergence:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

3. Abelova metoda a analytická prodloužení

Ještě jednou zpět k:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Náhrada (mocninnou) řadou:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Limitní přechod k hraničnímu bodu kruhu konvergence:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \quad ?$$

3. Abelova metoda a analytická prodloužení

Ještě jednou zpět k:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Náhrada (mocninnou) řadou:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Limitní přechod k hraničnímu bodu kruhu konvergence:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

3. Abelova metoda a analytická prodloužení

Ještě jednou zpět k:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Náhrada (mocninnou) řadou:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Limitní přechod k hraničnímu bodu kruhu konvergence:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

FAQ: nejen jestli je to správné zobecnění součtu (tj. pokud řada konverguje, dostaneme takto její součet?), ale především:

3. Abelova metoda a analytická prodloužení

Ještě jednou zpět k:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Náhrada (mocninnou) řadou:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Limitní přechod k hraničnímu bodu kruhu konvergence:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots$$

FAQ: nejen jestli je to správné zobecnění součtu (tj. pokud řada konverguje, dostaneme takto její součet?), ale především: **nezávisí výsledek na volbě analytické funkce, kterou používáme uvnitř kruhu?**

3. Abelova metoda a analytická prodloužení

Ještě jednou zpět k:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Náhrada (mocninnou) řadou:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Limitní přechod k hraničnímu bodu kruhu konvergence:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots$$

FAQ: nejen jestli je to správné zobecnění součtu (tj. pokud řada konverguje, dostaneme takto její součet?), ale především: **nezavisí výsledek na volbě analytické funkce, kterou používáme uvnitř kruhu? Odpověď: naštěstí ne.**

Tvrzení 3.1

Necht' $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$,

Tvrzení 3.1

Nechť $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$, přičemž uvedená mocninná řada má poloměr konvergence $R > 0$,

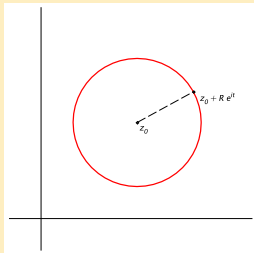
Tvrzení 3.1

Nechť $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$, přičemž uvedená mocninná řada má poloměr konvergence $R > 0$, tj. f je holomorfní uvnitř kruhu $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$.

Tvrzení 3.1

Nechť $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$, přičemž uvedená mocninná řada má poloměr konvergence $R > 0$, tj. f je holomorfní uvnitř kruhu $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$.
Nechť existuje vlastní limita

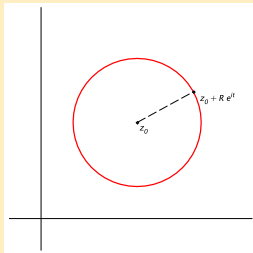
$$A := \lim_{r \rightarrow R-} f(z_0 + re^{it}) = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(re^{it})^n.$$



Tvrzení 3.1

Nechť $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$, přičemž uvedená mocninná řada má poloměr konvergence $R > 0$, tj. f je holomorfní uvnitř kruhu $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$.
Nechť existuje vlastní limita

$$A := \lim_{r \rightarrow R-} f(z_0 + re^{it}) = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(re^{it})^n.$$

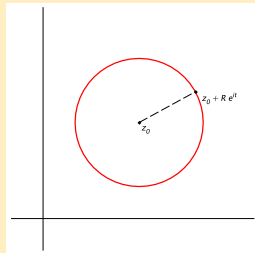


Potom platí: pokud
číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(R e^{it})^n$
konverguje,

Tvrzení 3.1

Nechť $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$, přičemž uvedená mocninná řada má poloměr konvergence $R > 0$, tj. f je holomorfní uvnitř kruhu $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$.
Nechť existuje vlastní limita

$$A := \lim_{r \rightarrow R-} f(z_0 + re^{it}) = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(re^{it})^n.$$



Potom platí: pokud číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(Re^{it})^n$ konverguje, je její součet roven A .

Abelova sumační metoda: i v případě, kdy číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n$ nekonverguje, přiřadíme jí (zobecněný Abelovský) součet $A = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n$.

Abelova sumační metoda: i v případě, kdy číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n$ nekonverguje, přiřadíme jí (zobecněný Abelovský) součet $A = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n$.
V našem případě: $a_n (Re^{it})^n = (-1)^n$.

Abelova sumační metoda: i v případě, kdy číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n$ nekonverguje, přiřadíme jí (zobecněný Abelovský) součet $A = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n$.

V našem případě: $a_n (Re^{it})^n = (-1)^n$. Tedy:

Abelova sumační metoda: i v případě, kdy číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n$ nekonverguje, přiřadíme jí (zobecněný Abelovský) součet $A = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n$.

V našem případě: $a_n (Re^{it})^n = (-1)^n$. Tedy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n$$

Abelova sumační metoda: i v případě, kdy číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n$ nekonverguje, přiřadíme jí (zobecněný Abelovský) součet $A = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n$.

V našem případě: $a_n (Re^{it})^n = (-1)^n$. Tedy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

Abelova sumační metoda: i v případě, kdy číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n$ nekonverguje, přiřadíme jí (zobecněný Abelovský) součet $A = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n$.

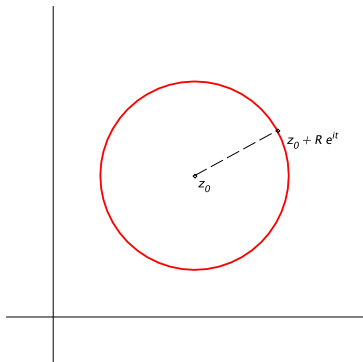
V našem případě: $a_n (Re^{it})^n = (-1)^n$. Tedy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n \left(\frac{r}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

Abelova sumační metoda: i v případě, kdy číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n$ nekonverguje, přiřadíme jí (zobecněný Abelovský) součet $A = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n$.

V našem případě: $a_n (Re^{it})^n = (-1)^n$. Tedy:

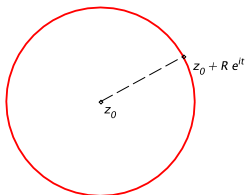
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n \left(\frac{r}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$



Abelova sumační metoda: i v případě, kdy číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n$ nekonverguje, přiřadíme jí (zobecněný Abelovský) součet $A = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n$.

V našem případě: $a_n (Re^{it})^n = (-1)^n$. Tedy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n \left(\frac{r}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

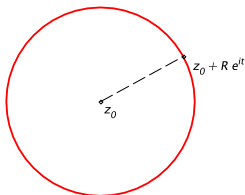


$$A = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{r}{R}\right)^n$$

Abelova sumační metoda: i v případě, kdy číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n$ nekonverguje, přiřadíme jí (zobecněný Abelovský) součet $A = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n$.

V našem případě: $a_n (Re^{it})^n = (-1)^n$. Tedy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n \left(\frac{r}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

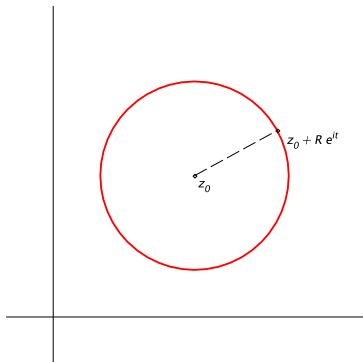


$$\begin{aligned} A &= \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{r}{R}\right)^n \\ &= \lim_{r \rightarrow R-} \frac{1}{1 + \frac{r}{R}} \quad (0 < r < R) \end{aligned}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n$ nekonverguje, přiřadíme jí (zobecněný Abelovský) součet $A = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n$.

V našem případě: $a_n(Re^{it})^n = (-1)^n$. Tedy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(re^{it})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(Re^{it})^n \left(\frac{r}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

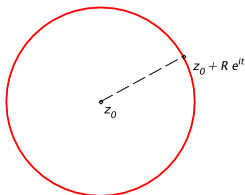


$$\begin{aligned} A &= \lim_{r \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{r}{R}\right)^n \\ &= \lim_{r \rightarrow R^-} \frac{1}{1 + \frac{r}{R}} \quad (0 < r < R) \\ &= \lim_{r \rightarrow R^-} \frac{R}{R + r} = \end{aligned}$$

Abelova sumační metoda: i v případě, kdy číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n$ nekonverguje, přiřadíme jí (zobecněný Abelovský) součet $A = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n$.

V našem případě: $a_n (Re^{it})^n = (-1)^n$. Tedy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n \left(\frac{r}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

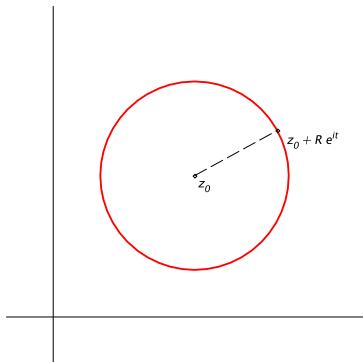


$$\begin{aligned} A &= \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{r}{R}\right)^n \\ &= \lim_{r \rightarrow R-} \frac{1}{1 + \frac{r}{R}} \quad (0 < r < R) \\ &= \lim_{r \rightarrow R-} \frac{R}{R + r} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Abelova sumační metoda: i v případě, kdy číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n$ nekonverguje, přiřadíme jí (zobecněný Abelovský) součet $A = \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n$.

V našem případě: $a_n (Re^{it})^n = (-1)^n$. Tedy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (re^{it})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (Re^{it})^n \left(\frac{r}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$



$$\begin{aligned} A &= \lim_{r \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{r}{R}\right)^n \\ &= \lim_{r \rightarrow R-} \frac{1}{1 + \frac{r}{R}} \quad (0 < r < R) \\ &= \lim_{r \rightarrow R-} \frac{R}{R + r} = \frac{1}{2} \approx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n. \end{aligned}$$

Zásadní rozhodnutí:

Zásadní rozhodnutí: Máme se vydat i za hranici kruhu konvergence?

Zásadní rozhodnutí: Máme se vydat i za hranici kruhu konvergence?

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Zásadní rozhodnutí: Máme se vydat i za hranici kruhu konvergence?

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x}$$

Zásadní rozhodnutí: Máme se vydat i za hranici kruhu konvergence?

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x),$$

Zásadní rozhodnutí: Máme se vydat i za hranici kruhu konvergence?

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Zásadní rozhodnutí: Máme se vydat i za hranici kruhu konvergence?

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ má ovšem smysl pro všechna $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$,

Zásadní rozhodnutí: Máme se vydat i za hranici kruhu konvergence?

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ má ovšem smysl pro všechna $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$, tedy například pro $x = 2$ můžeme uvažovat:

Zásadní rozhodnutí: Máme se vydat i za hranici kruhu konvergence?

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ má ovšem smysl pro všechna $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$, tedy například pro $x = 2$ můžeme uvažovat:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

Zásadní rozhodnutí: Máme se vydat i za hranici kruhu konvergence?

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ má ovšem smysl pro všechna $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$, tedy například pro $x = 2$ můžeme uvažovat:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots \stackrel{?}{\approx} \frac{1}{1-2}$$

Zásadní rozhodnutí: Máme se vydat i za hranici kruhu konvergence?

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ má ovšem smysl pro všechna $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$, tedy například pro $x = 2$ můžeme uvažovat:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots \stackrel{?}{\approx} \frac{1}{1-2} = -1 \quad (?)$$

Zásadní rozhodnutí: Máme se vydat i za hranici kruhu konvergence?

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ má ovšem smysl pro všechna $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$, tedy například pro $x = 2$ můžeme uvažovat:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots \stackrel{?}{\approx} \frac{1}{1-2} = -1 \quad (?)$$

Dává to dobrý smysl?

Zásadní rozhodnutí: Máme se vydat i za hranici kruhu konvergence?

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ má ovšem smysl pro všechna $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$, tedy například pro $x = 2$ můžeme uvažovat:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots \stackrel{?}{\approx} \frac{1}{1-2} = -1 \quad (?)$$

Dává to dobrý smysl?

Pokud respektujeme princip jednoznačnosti analytického prodloužení holomorfní funkce, tak to jistý dobrý smysl dává.

Zásadní rozhodnutí: Máme se vydat i za hranici kruhu konvergence?

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} =: f(x), \quad x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1.$$

Funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ má ovšem smysl pro všechna $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 1$, tedy například pro $x = 2$ můžeme uvažovat:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots \stackrel{?}{\approx} \frac{1}{1-2} = -1 \quad (?)$$

Dává to dobrý smysl?

Pokud respektujeme princip jednoznačnosti analytického prodloužení holomorfní funkce, tak to jistý dobrý smysl dává. Ale pokud máte jisté pochyby o smysluplnosti takového "zobecněného sčítání", tak je nezapomeňte, protože se chystáme analyticky prodlužovat Riemannovu zeta funkci.

4. Riemannova zeta funkce a její analytické prodloužení

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1. \quad (3)$$

4. Riemannova zeta funkce a její analytické prodloužení

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1. \quad (3)$$

■ $s \in \mathbb{C}, s = \alpha + i\beta$:

4. Riemannova zeta funkce a její analytické prodloužení

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1. \quad (3)$$

■ $s \in \mathbb{C}, s = \alpha + i\beta: |n^s|$

4. Riemannova zeta funkce a její analytické prodloužení

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1. \quad (3)$$

■ $s \in \mathbb{C}, s = \alpha + i\beta: |n^s| = n^{\Re(s)}.$

4. Riemannova zeta funkce a její analytické prodloužení

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1. \quad (3)$$

- $s \in \mathbb{C}, s = \alpha + i\beta: |n^s| = n^{\Re(s)}.$
- Lze ukázat, že $\zeta \in \mathcal{H}(\Re(s) > 1)$

4. Riemannova zeta funkce a její analytické prodloužení

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1. \quad (3)$$

- $s \in \mathbb{C}, s = \alpha + i\beta: |n^s| = n^{\Re(s)}.$
- Lze ukázat, že $\zeta \in \mathcal{H}(\Re(s) > 1)$ a lze analyticky rozšířit na $\mathbb{C} \setminus \{1\}.$
- $\zeta(1) = \infty$

4. Riemannova zeta funkce a její analytické prodloužení

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1. \quad (3)$$

- $s \in \mathbb{C}, s = \alpha + i\beta: |n^s| = n^{\Re(s)}.$
- Lze ukázat, že $\zeta \in \mathcal{H}(\Re(s) > 1)$ a lze analyticky rozšířit na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- $\zeta(1) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$

4. Riemannova zeta funkce a její analytické prodloužení

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1. \quad (3)$$

- $s \in \mathbb{C}, s = \alpha + i\beta: |n^s| = n^{\Re(s)}.$
- Lze ukázat, že $\zeta \in \mathcal{H}(\Re(s) > 1)$ a lze analyticky rozšířit na $\mathbb{C} \setminus \{1\}.$
- $\zeta(1) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$ přičemž $\lim_{s \rightarrow 0, s \in \mathbb{C}} s \zeta(1-s) = -1.$

4. Riemannova zeta funkce a její analytické prodloužení

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1. \quad (3)$$

- $s \in \mathbb{C}, s = \alpha + i\beta: |n^s| = n^{\Re(s)}.$
- Lze ukázat, že $\zeta \in \mathcal{H}(\Re(s) > 1)$ a lze analyticky rozšířit na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- $\zeta(1) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, přičemž $\lim_{s \rightarrow 0, s \in \mathbb{C}} s \zeta(1-s) = -1.$
- Riemann: pokud uvažujeme výše uvedené analytické rozšíření ζ a analyticky rozšířenou funkci Γ , pak platí

4. Riemannova zeta funkce a její analytické prodloužení

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1. \quad (3)$$

- $s \in \mathbb{C}, s = \alpha + i\beta: |n^s| = n^{\Re(s)}.$
- Lze ukázat, že $\zeta \in \mathcal{H}(\Re(s) > 1)$ a lze analyticky rozšířit na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- $\zeta(1) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, přičemž $\lim_{s \rightarrow 0, s \in \mathbb{C}} s \zeta(1-s) = -1.$
- Riemann: pokud uvažujeme výše uvedené analytické rozšíření ζ a analyticky rozšířenou funkci Γ , pak platí

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \quad (4)$$

4. Riemannova zeta funkce a její analytické prodloužení

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1. \quad (3)$$

- $s \in \mathbb{C}, s = \alpha + i\beta: |n^s| = n^{\Re(s)}.$
- Lze ukázat, že $\zeta \in \mathcal{H}(\Re(s) > 1)$ a lze analyticky rozšířit na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- $\zeta(1) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, přičemž $\lim_{s \rightarrow 0, s \in \mathbb{C}} s \zeta(1-s) = -1.$
- Riemann: pokud uvažujeme výše uvedené analytické rozšíření ζ a analyticky rozšířenou funkci Γ , pak platí

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \quad (4)$$

$$s \in \mathbb{C} \setminus \{1\},$$

4. Riemannova zeta funkce a její analytické prodloužení

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1. \quad (3)$$

- $s \in \mathbb{C}, s = \alpha + i\beta: |n^s| = n^{\Re(s)}.$
- Lze ukázat, že $\zeta \in \mathcal{H}(\Re(s) > 1)$ a lze analyticky rozšířit na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- $\zeta(1) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, přičemž $\lim_{s \rightarrow 0, s \in \mathbb{C}} s \zeta(1-s) = -1.$
- Riemann: pokud uvažujeme výše uvedené analytické rozšíření ζ a analyticky rozšířenou funkci Γ , pak platí

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \quad (4)$$

$s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, (pro $s = 0, 1, 2, \dots$ ve smyslu limity).

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

- Pro $\zeta(0)$ je potřeba vpravo použít limitní přechod, protože $\zeta(1-0) = \zeta(1) = \infty$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

- Pro $\zeta(0)$ je potřeba vpravo použít limitní přechod, protože $\zeta(1-0) = \zeta(1) = \infty$:

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1)$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

- Pro $\zeta(0)$ je potřeba vpravo použít limitní přechod, protože $\zeta(1-0) = \zeta(1) = \infty$:

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1) \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{\frac{\pi s}{2}}}_{\rightarrow 1}$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

- Pro $\zeta(0)$ je potřeba vpravo použít limitní přechod, protože $\zeta(1-0) = \zeta(1) = \infty$:

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1) \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{\frac{\pi s}{2}}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\pi}{2} s \zeta(1-s)}_{\rightarrow -1}$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

- Pro $\zeta(0)$ je potřeba vpravo použít limitní přechod, protože $\zeta(1-0) = \zeta(1) = \infty$:

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1) \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{\frac{\pi s}{2}}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\pi}{2} s \zeta(1-s)}_{\rightarrow -1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

- Pro $\zeta(0)$ je potřeba vpravo použít limitní přechod, protože $\zeta(1-0) = \zeta(1) = \infty$:

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1) \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{\frac{\pi s}{2}}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\pi}{2} s \zeta(1-s)}_{\rightarrow -1} = -\frac{1}{2}.$$

- Hodnotu $\zeta(-1)$ je možné počítat přímo, s využitím $\Gamma(2) = 1! = 1$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

- Pro $\zeta(0)$ je potřeba vpravo použít limitní přechod, protože $\zeta(1-0) = \zeta(1) = \infty$:

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1) \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{\frac{\pi s}{2}}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\pi}{2} s \zeta(1-s)}_{\rightarrow -1} = -\frac{1}{2}.$$

- Hodnotu $\zeta(-1)$ je možné počítat přímo, s využitím $\Gamma(2) = 1! = 1$ a $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

- Pro $\zeta(0)$ je potřeba vpravo použít limitní přechod, protože $\zeta(1-0) = \zeta(1) = \infty$:

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1) \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{\frac{\pi s}{2}}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\pi}{2} s \zeta(1-s)}_{\rightarrow -1} = -\frac{1}{2}.$$

- Hodnotu $\zeta(-1)$ je možné počítat přímo, s využitím $\Gamma(2) = 1! = 1$ a $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

- Pro $\zeta(0)$ je potřeba vpravo použít limitní přechod, protože $\zeta(1-0) = \zeta(1) = \infty$:

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1) \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{\frac{\pi s}{2}}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\pi}{2} s \zeta(1-s)}_{\rightarrow -1} = -\frac{1}{2}.$$

- Hodnotu $\zeta(-1)$ je možné počítat přímo, s využitím $\Gamma(2) = 1! = 1$ a $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$:

$$\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi^2}$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

- Pro $\zeta(0)$ je potřeba vpravo použít limitní přechod, protože $\zeta(1-0) = \zeta(1) = \infty$:

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1) \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{\frac{\pi s}{2}}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\pi}{2} s \zeta(1-s)}_{\rightarrow -1} = -\frac{1}{2}.$$

- Hodnotu $\zeta(-1)$ je možné počítat přímo, s využitím $\Gamma(2) = 1! = 1$ a $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$:

$$\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi^2} \sin \frac{(-\pi)}{2} \Gamma(2) \zeta(2)$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

- Pro $\zeta(0)$ je potřeba vpravo použít limitní přechod, protože $\zeta(1-0) = \zeta(1) = \infty$:

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1) \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{\frac{\pi s}{2}}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\pi}{2} s \zeta(1-s)}_{\rightarrow -1} = -\frac{1}{2}.$$

- Hodnotu $\zeta(-1)$ je možné počítat přímo, s využitím $\Gamma(2) = 1! = 1$ a $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$:

$$\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi^2} \sin \frac{(-\pi)}{2} \Gamma(2) \zeta(2) = \frac{1}{2\pi^2}$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

- Pro $\zeta(0)$ je potřeba vpravo použít limitní přechod, protože $\zeta(1-0) = \zeta(1) = \infty$:

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1) \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{\frac{\pi s}{2}}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\pi}{2} s \zeta(1-s)}_{\rightarrow -1} = -\frac{1}{2}.$$

- Hodnotu $\zeta(-1)$ je možné počítat přímo, s využitím $\Gamma(2) = 1! = 1$ a $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$:

$$\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi^2} \sin \frac{(-\pi)}{2} \Gamma(2) \zeta(2) = \frac{1}{2\pi^2} (-1)$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

- Pro $\zeta(0)$ je potřeba vpravo použít limitní přechod, protože $\zeta(1-0) = \zeta(1) = \infty$:

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1) \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{\frac{\pi s}{2}}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\pi}{2} s \zeta(1-s)}_{\rightarrow -1} = -\frac{1}{2}.$$

- Hodnotu $\zeta(-1)$ je možné počítat přímo, s využitím $\Gamma(2) = 1! = 1$ a $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$:

$$\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi^2} \sin \frac{(-\pi)}{2} \Gamma(2) \zeta(2) = \frac{1}{2\pi^2} (-1) \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

- Pro $\zeta(0)$ je potřeba vpravo použít limitní přechod, protože $\zeta(1-0) = \zeta(1) = \infty$:

$$\zeta(0) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1) \lim_{s \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{\frac{\pi s}{2}}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{\pi}{2} s \zeta(1-s)}_{\rightarrow -1} = -\frac{1}{2}.$$

- Hodnotu $\zeta(-1)$ je možné počítat přímo, s využitím $\Gamma(2) = 1! = 1$ a $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$:

$$\zeta(-1) = \frac{1}{2\pi^2} \sin \frac{(-\pi)}{2} \Gamma(2) \zeta(2) = \frac{1}{2\pi^2} (-1) \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}.$$

Přihořívá: víme, že pro $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$ platí

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

Přihořívá: víme, že pro $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$ platí

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

a přitom

$$-\frac{1}{2} = \zeta(0)$$

Přihořívá: víme, že pro $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$ platí

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

a přitom

$$-\frac{1}{2} = \zeta(0) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0}$$

Přihořívá: víme, že pro $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$ platí

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

a přitom

$$-\frac{1}{2} = \zeta(0) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

Přihořívá: víme, že pro $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$ platí

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

a přitom

$$-\frac{1}{2} = \zeta(0) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

a také

$$-\frac{1}{12} = \zeta(-1)$$

Přihořívá: víme, že pro $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$ platí

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

a přitom

$$-\frac{1}{2} = \zeta(0) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

a také

$$-\frac{1}{12} = \zeta(-1) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}}$$

Přihořívá: víme, že pro $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$ platí

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

a přitom

$$-\frac{1}{2} = \zeta(0) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

a také

$$-\frac{1}{12} = \zeta(-1) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

Přihořívá: víme, že pro $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$ platí

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

a přitom

$$-\frac{1}{2} = \zeta(0) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

a také

$$-\frac{1}{12} = \zeta(-1) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

Přihořívá: víme, že pro $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$ platí

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

a přitom

$$-\frac{1}{2} = \zeta(0) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

a také

$$-\frac{1}{12} = \zeta(-1) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

Tady by mohla přednáška skončit, ale ...

Sám přednášející se cítí poněkud nekomfortně v situaci, kdy se hodnoty analytického prodloužení do oblasti, kde už není žádná souvislost s původní definicí, vztahují k oné původní definici.

Sám přednášející se cítí poněkud nekomfortně v situaci, kdy se hodnoty analytického prodloužení do oblasti, kde už není žádná souvislost s původní definicí, vztahují k oné původní definici.

Srov.:

$$1+x+x^2+x^3+\dots = \frac{1}{1-x}$$

Sám přednášející se cítí poněkud nekomfortně v situaci, kdy se hodnoty analytického prodloužení do oblasti, kde už není žádná souvislost s původní definicí, vztahují k oné původní definici.

Srov.:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

Sám přednášející se cítí poněkud nekomfortně v situaci, kdy se hodnoty analytického prodloužení do oblasti, kde už není žádná souvislost s původní definicí, vztahují k oné původní definici.

Srov.:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$$

Sám přednášející se cítí poněkud nekomfortně v situaci, kdy se hodnoty analytického prodloužení do oblasti, kde už není žádná souvislost s původní definicí, vztahují k oné původní definici.

Srov.:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \zeta(s)$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$$

Sám přednášející se cítí poněkud nekomfortně v situaci, kdy se hodnoty analytického prodloužení do oblasti, kde už není žádná souvislost s původní definicí, vztahují k oné původní definici.

Srov.:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \zeta(s)$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \zeta(1) = \infty$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$$

Sám přednášející se cítí poněkud nekomfortně v situaci, kdy se hodnoty analytického prodloužení do oblasti, kde už není žádná souvislost s původní definicí, vztahují k oné původní definici.

Srov.:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \zeta(s)$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \zeta(1) = \infty$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1 \quad 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

Sám přednášející se cítí poněkud nekomfortně v situaci, kdy se hodnoty analytického prodloužení do oblasti, kde už není žádná souvislost s původní definicí, vztahují k oné původní definici.

Srov.:

$$1+x+x^2+x^3+\dots = \frac{1}{1-x} \quad \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \zeta(s)$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \zeta(1) = \infty$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1 \quad 1+2+3+4+\dots = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

Rozšíření "zevnitř na hranici" lze dát jakýsi rozumný smysl, ale dál?

Sám přednášející se cítí poněkud nekomfortně v situaci, kdy se hodnoty analytického prodloužení do oblasti, kde už není žádná souvislost s původní definicí, vztahují k oné původní definici.

Srov.:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \zeta(s)$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \zeta(1) = \infty$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1 \quad 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}$$

Rozšíření "zevnitř na hranici" lze dát jakýsi rozumný smysl, ale dál?

Neexistuje přece jen nějaké jiné "odvození" hodnoty $-\frac{1}{12}$, které by (z matematického hlediska) více souviselo s tím, jak se chová součet $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$?

5. Metoda "vyhlazeného sčítání" (Smoothed Summability Method)

(Courtesy of Terence Tao, <https://terrytao.wordpress.com>)

5. Metoda "vyhlazeného sčítání" (Smoothed Summability Method)

(Courtesy of Terence Tao, <https://terrytao.wordpress.com>)

Příklad.

5. Metoda "vyhlazeného sčítání" (Smoothed Summability Method)

(Courtesy of Terence Tao, <https://terrytao.wordpress.com>)

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

5. Metoda "vyhlazeného sčítání" (Smoothed Summability Method)

(Courtesy of Terence Tao, <https://terrytao.wordpress.com>)

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\rightsquigarrow$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - R_N$$

5. Metoda "vyhlazeného sčítání" (Smoothed Summability Method)

(Courtesy of Terence Tao, <https://terrytao.wordpress.com>)

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\rightsquigarrow$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - R_N$$

$$|R_N| = \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \dots$$

5. Metoda "vyhlazeného sčítání" (Smoothed Summability Method)

(Courtesy of Terence Tao, <https://terrytao.wordpress.com>)

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\rightsquigarrow$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - R_N$$

$$|R_N| = \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \dots$$

$$< \frac{1}{(N+1)N} + \frac{1}{(N+2)(N+1)} + \dots$$

5. Metoda "vyhlazeného sčítání" (Smoothed Summability Method)

(Courtesy of Terence Tao, <https://terrytao.wordpress.com>)

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\rightsquigarrow$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - R_N$$

$$|R_N| = \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \dots$$

$$< \frac{1}{(N+1)N} + \frac{1}{(N+2)(N+1)} + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) + \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) + \dots$$

5. Metoda "vyhlazeného sčítání" (Smoothed Summability Method)

(Courtesy of Terence Tao, <https://terrytao.wordpress.com>)

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\rightsquigarrow$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - R_N$$

$$\begin{aligned} |R_N| &= \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \dots \\ &< \frac{1}{(N+1)N} + \frac{1}{(N+2)(N+1)} + \dots \\ &= \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) + \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right) + \dots \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

5. Metoda "vyhlazeného sčítání" (Smoothed Summability Method)

(Courtesy of Terence Tao, <https://terrytao.wordpress.com>)

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \rightsquigarrow$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\begin{aligned} |R_N| &= \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+2)^2} + \dots \\ &< \frac{1}{(N+1)N} + \frac{1}{(N+2)(N+1)} + \dots \\ &= \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) + \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) + \dots \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

kde $\eta(x) = 1$ pro $x \leq 1$ a $\eta(x) = 0$ pro $x > 1$.

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

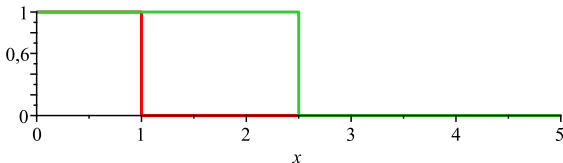
kde $\eta(x) = 1$ pro $x \leq 1$ a $\eta(x) = 0$ pro $x > 1$.

Tedy $\eta\left(\frac{n}{N}\right) = 1 \iff n \leq N$.

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

kde $\eta(x) = 1$ pro $x \leq 1$ a $\eta(x) = 0$ pro $x > 1$.
 Tedy $\eta\left(\frac{n}{N}\right) = 1 \iff n \leq N$.



$\eta(x)$ a $\eta\left(\frac{x}{2.5}\right)$ v případě "klasického" částečného součtu.

Lze tušit, k čemu se schyluje: nahraďme "skokovou" η její vyhlazenou variantou:

Lze tušit, k čemu se schyluje: nahraďme "skokovou" η její vyhlazenou variantou:

$\eta(x) = 1$ pro $x \leq 1$, $\eta(x) = 0$ pro $x > 2$, η nezáporná, nerostoucí a dostatečně hladká (ideálně $\mathcal{C}^\infty$, s omezenou normou všech derivací).

Lze tušit, k čemu se schyluje: nahraďme "skokovou" η její vyhlazenou variantou:

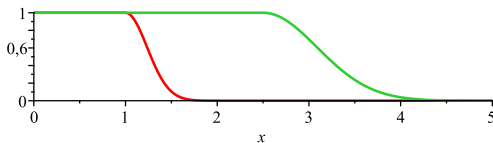
$\eta(x) = 1$ pro $x \leq 1$, $\eta(x) = 0$ pro $x > 2$, η nezáporná, nerostoucí a dostatečně hladká (ideálně $\mathcal{C}^\infty$, s omezenou normou všech derivací).

Tedy opět $\eta\left(\frac{n}{N}\right) = 1 \iff n \leq N$, ale navíc k zobecněnému částečnému součtu přispívají (se stále menší vahou) i členy $a_{N+1}, \dots, a_{2N}$.

Lze tušit, k čemu se schyluje: nahraďme "skokovou" η její vyhlazenou variantou:

$\eta(x) = 1$ pro $x \leq 1$, $\eta(x) = 0$ pro $x > 2$, η nezáporná, nerostoucí a dostatečně hladká (ideálně $\mathcal{C}^\infty$, s omezenou normou všech derivací).

Tedy opět $\eta\left(\frac{n}{N}\right) = 1 \iff n \leq N$, ale navíc k zobecněnému částečnému součtu přispívají (se stále menší vahou) i členy $a_{N+1}, \dots, a_{2N}$.

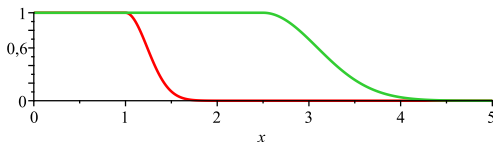


$\eta(x)$ a $\eta\left(\frac{x}{2.5}\right)$ v případě "vyhlazeného" částečného součtu.

Lze tušit, k čemu se schyluje: nahraďme "skokovou" η její vyhlazenou variantou:

$\eta(x) = 1$ pro $x \leq 1$, $\eta(x) = 0$ pro $x > 2$, η nezáporná, nerostoucí a dostatečně hladká (ideálně $\mathcal{C}^\infty$, s omezenou normou všech derivací).

Tedy opět $\eta\left(\frac{n}{N}\right) = 1 \iff n \leq N$, ale navíc k zobecněnému částečnému součtu přispívají (se stále menší vahou) i členy $a_{N+1}, \dots, a_{2N}$.



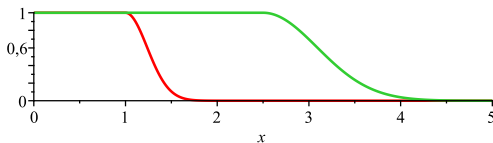
$\eta(x)$ a $\eta\left(\frac{x}{2.5}\right)$ v případě "vyhlazeného" částečného součtu.

Schéma práce: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Lze tušit, k čemu se schyluje: nahradíme "skokovou" η její vyhlazenou variantou:

$\eta(x) = 1$ pro $x \leq 1$, $\eta(x) = 0$ pro $x > 2$, η nezáporná, nerostoucí a dostatečně hladká (ideálně $\mathcal{C}^\infty$, s omezenou normou všech derivací).

Tedy opět $\eta\left(\frac{n}{N}\right) = 1 \iff n \leq N$, ale navíc k zobecněnému částečnému součtu přispívají (se stále menší vahou) i členy $a_{N+1}, \dots, a_{2N}$.



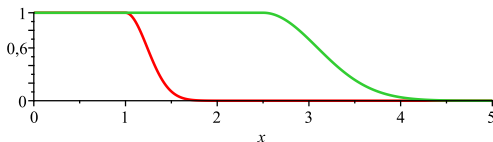
$\eta(x)$ a $\eta\left(\frac{x}{2.5}\right)$ v případě "vyhlazeného" částečného součtu.

Schéma práce:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) a_n$$

Lze tušit, k čemu se schyluje: nahradíme "skokovou" η její vyhlazenou variantou:

$\eta(x) = 1$ pro $x \leq 1$, $\eta(x) = 0$ pro $x > 2$, η nezáporná, nerostoucí a dostatečně hladká (ideálně $\mathcal{C}^\infty$, s omezenou normou všech derivací).

Tedy opět $\eta\left(\frac{n}{N}\right) = 1 \iff n \leq N$, ale navíc k zobecněnému částečnému součtu přispívají (se stále menší vahou) i členy $a_{N+1}, \dots, a_{2N}$.



$\eta(x)$ a $\eta\left(\frac{x}{2.5}\right)$ v případě "vyhlazeného" částečného součtu.

Schéma práce: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) a_n$

... a studium chování pro velká N .

Příklad.

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1}$$

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1} \quad (\text{konečná suma!})$$

Příklad.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} &\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1} \quad (\text{konečná suma!}) \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \dots\end{aligned}$$

Příklad.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} &\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1} \quad (\text{konečná suma!}) \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{m=\mathcal{O}(N)} \frac{\eta\left(\frac{2m-1}{N}\right) - 2\eta\left(\frac{2m}{N}\right) + \eta\left(\frac{2m+1}{N}\right)}{2}\end{aligned}$$

Příklad.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} &\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1} \quad (\text{konečná suma!}) \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{m=\mathcal{O}(N)} \frac{\eta\left(\frac{2m-1}{N}\right) - 2\eta\left(\frac{2m}{N}\right) + \eta\left(\frac{2m+1}{N}\right)}{2}\end{aligned}$$

$$\eta(x+h) = \eta(x) + h\eta'(x) + \underbrace{\frac{1}{2}h^2\eta''(x+\xi)}_{\text{omez.}}$$

Příklad.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} &\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1} \quad (\text{konečná suma!}) \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{m=\mathcal{O}(N)} \frac{\eta\left(\frac{2m-1}{N}\right) - 2\eta\left(\frac{2m}{N}\right) + \eta\left(\frac{2m+1}{N}\right)}{2}\end{aligned}$$

$$\eta(x+h) = \eta(x) + h\eta'(x) + \underbrace{\frac{1}{2}h^2\eta''(x+\xi)}_{\text{omez.}}$$

$$\eta\left(\frac{2m\pm 1}{N}\right) = \eta\left(\frac{2m}{N}\right) \pm \frac{1}{N}\eta'\left(\frac{2m}{N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

Příklad.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} &\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1} \quad (\text{konečná suma!}) \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{m=\mathcal{O}(N)} \frac{\eta\left(\frac{2m-1}{N}\right) - 2\eta\left(\frac{2m}{N}\right) + \eta\left(\frac{2m+1}{N}\right)}{2}\end{aligned}$$

$$\eta(x+h) = \eta(x) + h\eta'(x) + \underbrace{\frac{1}{2}h^2\eta''(x+\xi)}_{\text{omez.}}$$

$$\eta\left(\frac{2m\pm 1}{N}\right) = \eta\left(\frac{2m}{N}\right) \pm \frac{1}{N}\eta'\left(\frac{2m}{N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$\dots = \frac{1}{2} + \sum_{m=\mathcal{O}(N)} \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

Příklad.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} &\rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1} \quad (\text{konečná suma!}) \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{m=\mathcal{O}(N)} \frac{\eta\left(\frac{2m-1}{N}\right) - 2\eta\left(\frac{2m}{N}\right) + \eta\left(\frac{2m+1}{N}\right)}{2}\end{aligned}$$

$$\eta(x+h) = \eta(x) + h\eta'(x) + \underbrace{\frac{1}{2}h^2 \eta''(x+\xi)}_{\text{omez.}}$$

$$\eta\left(\frac{2m\pm 1}{N}\right) = \eta\left(\frac{2m}{N}\right) \pm \frac{1}{N}\eta'\left(\frac{2m}{N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$\dots = \frac{1}{2} + \sum_{m=\mathcal{O}(N)} \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) = \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1} = \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1} = \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \quad \Bigg| \quad N \rightarrow \infty$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1} = \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \quad \left| \quad N \rightarrow \infty\right.$$
$$(\eta) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = \frac{1}{2}$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1} = \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \quad \left| \quad N \rightarrow \infty\right.$$

$$(\eta) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = \frac{1}{2} \quad \dots \text{i když předchozí řádek dává více informací}$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1} = \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \quad \left| \quad N \rightarrow \infty\right.$$
$$(\eta) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = \frac{1}{2} \quad \dots \text{i když předchozí řádek dává více informací}$$

Dlouhé čekání na pointu se vyplatilo: Co asi tak dostaneme při aplikaci této metody na řadu

$$\sum n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots ?$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1} = \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \quad \left| \quad N \rightarrow \infty \right.$$

$$(\eta) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = \frac{1}{2} \quad \dots \text{i když předchozí řádek dává více informací}$$

Dlouhé čekání na pointu se vyplatilo: Co asi tak dostaneme při aplikaci této metody na řadu

$$\sum n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n = C_{\eta,1} N^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\text{kde } C_{\eta,1} = \int_0^{\infty} x \eta(x) dx.$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) (-1)^{n+1} = \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \quad \left| \quad N \rightarrow \infty\right.$$
$$(\eta) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = \frac{1}{2} \quad \dots \text{i když předchozí řádek dává více informací}$$

Dlouhé čekání na pointu se vyplatilo: Co asi tak dostaneme při aplikaci této metody na řadu

$$\sum n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n = -\frac{1}{12} + C_{\eta,1} N^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\text{kde } C_{\eta,1} = \int_0^{\infty} x \eta(x) dx.$$

Podobně:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) 1 = -\frac{1}{2} + C_{\eta,0}N + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

Podobně:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) 1 = -\frac{1}{2} + C_{\eta,0}N + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n = -\frac{1}{12} + C_{\eta,1}N^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

Podobně:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) 1 = -\frac{1}{2} + C_{\eta,0}N + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n = -\frac{1}{12} + C_{\eta,1}N^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$\vdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s = -\frac{B_{s+1}}{s+1} + C_{\eta,s}N^{s+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad s \in \mathbb{N}$$

Podobně:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) 1 = -\frac{1}{2} + C_{\eta,0}N + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n = -\frac{1}{12} + C_{\eta,1}N^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$\vdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s = -\frac{B_{s+1}}{s+1} + C_{\eta,s}N^{s+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right), \quad s \in \mathbb{N}$$

kde $C_{\eta,s} = \int_0^1 x^s \eta(x) dx$, a B_n jsou tzv. **Bernoulliho čísla**.

6. Důkaz? Souvislosti?

Bernoulliho čísla jsou definovaná takto:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

6. Důkaz? Souvislosti?

Bernoulliho čísla jsou definovaná takto:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$$

Existuje pro ně rekurentní vzorec, který dává (např.)

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2},$$

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0,$$

$$B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0,$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{13} = 0.$$

Co je potřeba ke kompletnímu důkazu

Co je potřeba ke kompletnímu důkazu

Eulerova-MacLaurinova formule:

Co je potřeba ke kompletnímu důkazu

Eulerova-MacLaurinova formule:

$$\sum_{n=a}^b f(n) \approx \int_a^b f(x) + \frac{f(b)+f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right)$$

Co je potřeba ke kompletnímu důkazu

Eulerova-MacLaurinova formule:

$$\sum_{n=a}^b f(n) \approx \int_a^b f(x) + \frac{f(b)+f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right)$$

Bernoulliho-Faulhaberův vzorec ($s \in \mathbb{N}$):

Co je potřeba ke kompletnímu důkazu

Eulerova-MacLaurinova formule:

$$\sum_{n=a}^b f(n) \approx \int_a^b f(x) + \frac{f(b)+f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right)$$

Bernoulliho-Faulhaberův vzorec ($s \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{n=1}^N n^s = \frac{N^{s+1}}{s+1} + \frac{N^s}{2} + \frac{1}{s+1} \sum_{k=2}^s \binom{s+1}{k} B_k N^{s-k+1}$$

Co je potřeba ke kompletnímu důkazu

Eulerova-MacLaurinova formule:

$$\sum_{n=a}^b f(n) \approx \int_a^b f(x) + \frac{f(b)+f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right)$$

Bernoulliho-Faulhaberův vzorec ($s \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{n=1}^N n^s = \frac{N^{s+1}}{s+1} + \frac{N^s}{2} + \frac{1}{s+1} \sum_{k=2}^s \binom{s+1}{k} B_k N^{s-k+1}$$

Některé hodnoty zeta funkce (kvůli finálnímu odhalení souvislosti):

Co je potřeba ke kompletnímu důkazu

Eulerova-MacLaurinova formule:

$$\sum_{n=a}^b f(n) \approx \int_a^b f(x) + \frac{f(b)+f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right)$$

Bernoulliho-Faulhaberův vzorec ($s \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{n=1}^N n^s = \frac{N^{s+1}}{s+1} + \frac{N^s}{2} + \frac{1}{s+1} \sum_{k=2}^s \binom{s+1}{k} B_k N^{s-k+1}$$

Některé hodnoty zeta funkce (kvůli finálnímu odhalení souvislosti):

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1} |B_{2k}|}{(2k)!} \pi^{2k} \xrightarrow{\text{Riemann}}$$

Co je potřeba ke kompletnímu důkazu

Eulerova-MacLaurinova formule:

$$\sum_{n=a}^b f(n) \approx \int_a^b f(x) + \frac{f(b)+f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right)$$

Bernoulliho-Faulhaberův vzorec ($s \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{n=1}^N n^s = \frac{N^{s+1}}{s+1} + \frac{N^s}{2} + \frac{1}{s+1} \sum_{k=2}^s \binom{s+1}{k} B_k N^{s-k+1}$$

Některé hodnoty zeta funkce (kvůli finálnímu odhalení souvislosti):

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1} |B_{2k}|}{(2k)!} \pi^{2k} \xrightarrow{\text{Riemann}} \zeta(-s) = -\frac{B_{s+1}}{s+1}, s = 1, 2, \dots$$

Pro $s \in \mathbb{N}$ zde už bylo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s = -\frac{B_{s+1}}{s+1} + C_{\eta,s} N^{s+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

Pro $s \in \mathbb{N}$ zde už bylo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s = -\frac{B_{s+1}}{s+1} + C_{\eta,s} N^{s+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

neboli

Pro $s \in \mathbb{N}$ zde už bylo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s = -\frac{B_{s+1}}{s+1} + C_{\eta,s} N^{s+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

neboli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s = \zeta(-s) + C_{\eta,s} N^{s+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

Pro $s \in \mathbb{N}$ zde už bylo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s = -\frac{B_{s+1}}{s+1} + C_{\eta,s} N^{s+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

neboli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s = \zeta(-s) + C_{\eta,s} N^{s+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

A konečně:

Pro $s \in \mathbb{N}$ zde už bylo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s = -\frac{B_{s+1}}{s+1} + C_{\eta,s} N^{s+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

neboli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s = \zeta(-s) + C_{\eta,s} N^{s+1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

A konečně:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s - C_{\eta,s} N^{s+1} = \zeta(-s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$s = 1, 2, 3, \dots$$

Další varianty zápisu téhož (pro $s \in \mathbb{N}$):

Další varianty zápisu téhož (pro $s \in \mathbb{N}$):

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s - C_{\eta,s} N^{s+1} = \zeta(-s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

(... před chvílí prezentováno)

Další varianty zápisu téhož (pro $s \in \mathbb{N}$):

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s - C_{\eta,s} N^{s+1} = \zeta(-s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

(... před chvílí prezentováno)

$$2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s - C_{\eta,s} N^{s+1} \right) = \zeta(-s)$$

(... fyzikální "renormalizace" součtu $\sum_{n=1}^{\infty} n^s$?)

Další varianty zápisu téhož (pro $s \in \mathbb{N}$):

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s - C_{\eta,s} N^{s+1} = \zeta(-s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

(... před chvílí prezentováno)

$$2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s - C_{\eta,s} N^{s+1} \right) = \zeta(-s)$$

(... fyzikální "renormalizace" součtu $\sum_{n=1}^{\infty} n^s$?)

... což lze případně pro $s = -1, -2, \dots$ přepsat:

Další varianty zápisu téhož (pro $s \in \mathbb{N}$):

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s - C_{\eta,s} N^{s+1} = \zeta(-s) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

(... před chvílí prezentováno)

$$2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) n^s - C_{\eta,s} N^{s+1} \right) = \zeta(-s)$$

(... fyzikální "renormalizace" součtu $\sum_{n=1}^{\infty} n^s$?)

... což lze případně pro $s = -1, -2, \dots$ přepsat:

$$3) \quad \zeta(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(\frac{n}{N}\right) \frac{1}{n^s} - C_{\eta,-s} N^{1-s} \right)$$

(... matematická souvislost mezi funkcí zeta a číselnou řadou, která ji definuje pro $\Re(s) > 1$).

A to je pro dnešek vše. . .

Mirko Rokyta
KMA MFF Praha
Sokolovská 83
Praha 8 - Karlín

`mirko.rokyta@mff.cuni.cz`