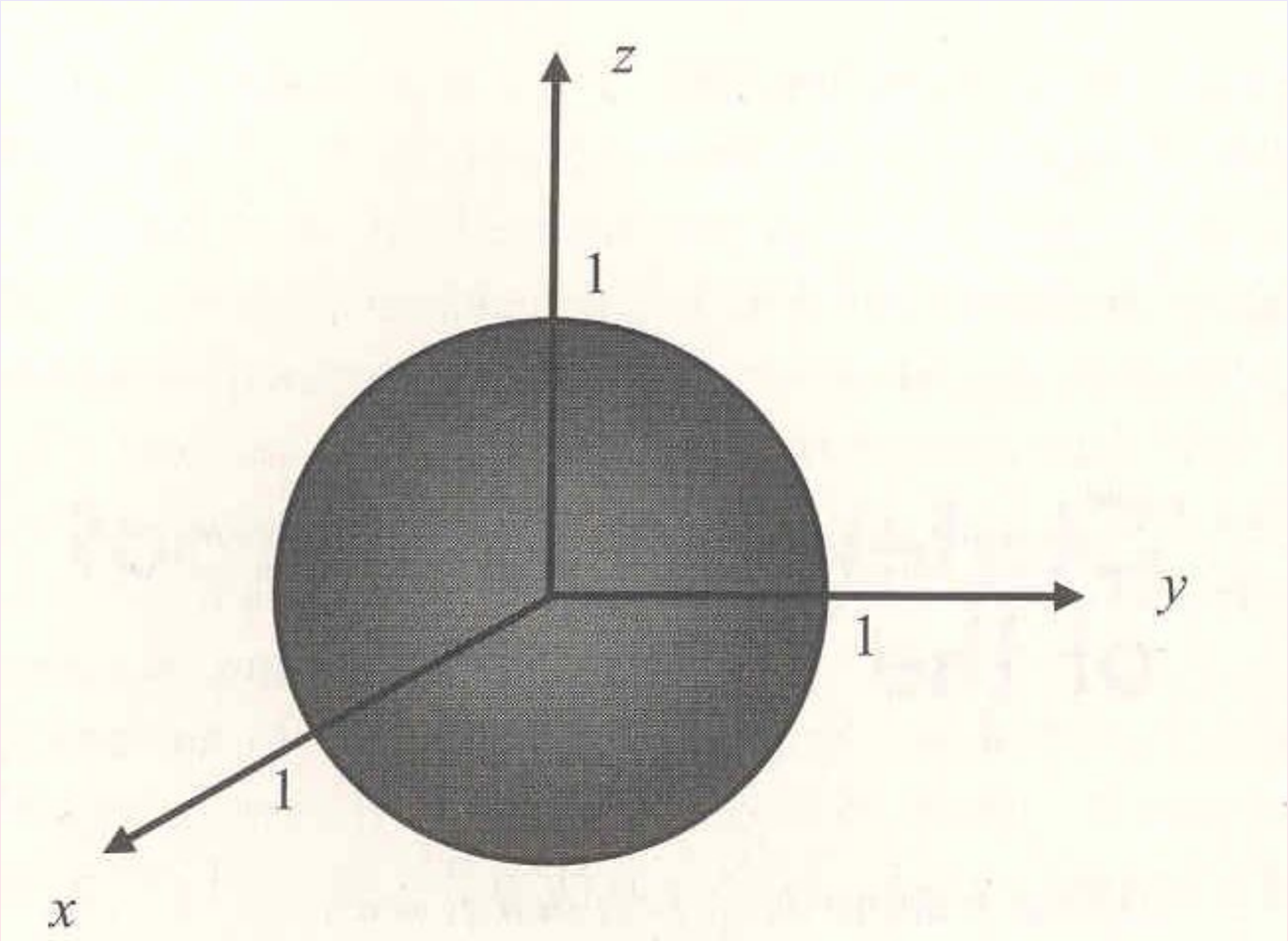
Hrášek a sluníčko aneb Jak pohněvat veřejnost matematikou

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

OSMA, 21.11.2018

Začneme s jednotkovou koulí v 3D

Začneme s jednotkovou koulí v 3D



Věta Stefana Banacha a Alfreda Tarského (1924)

Věta Stefana Banacha a Alfreda Tarského (1924)

Jednotkovou kouli v 3D lze rozložit na sjednocení pěti podmnožin a z nich potom složit dvě koule, obě identické s původní koulí.

Věta Stefana Banacha a Alfreda Tarského (1924)

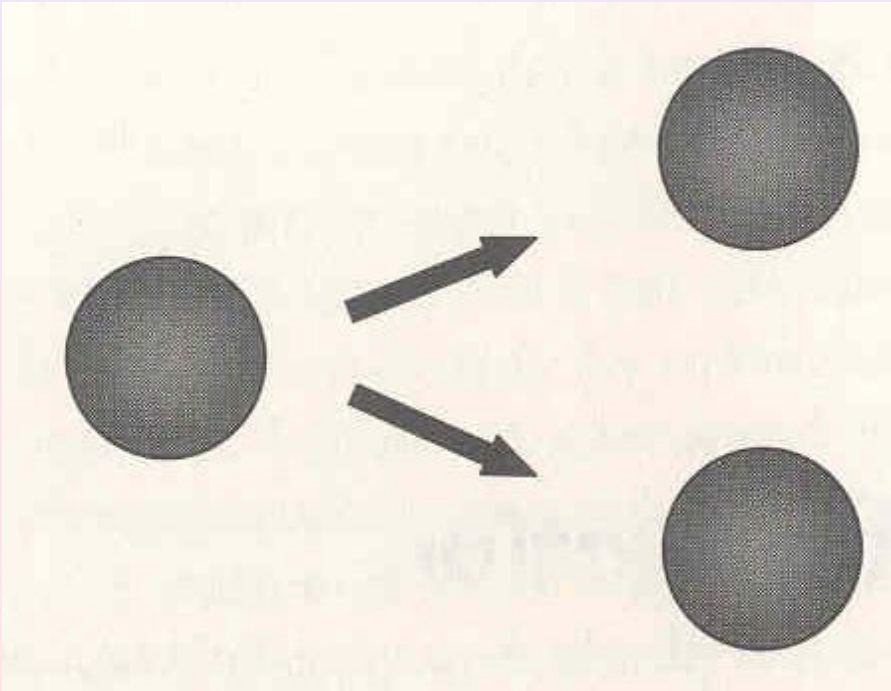
Jednotkovou kouli v 3D lze rozložit na sjednocení pěti podmnožin a z nich potom složit dvě koule, obě identické s původní koulí.

A to ještě jedna z oněch pěti množin je jednobodová.

Věta Stefana Banacha a Alfreda Tarského (1924)

Jednotkovou kouli v 3D lze rozložit na sjednocení pěti podmnožin a z nich potom složit dvě koule, obě identické s původní koulí.

A to ještě jedna z oněch pěti množin je jednobodová.



Důsledek B–T věty: hrášek a sluníčko

Důsledek B–T věty: hrášek a sluníčko

Každé dvě množiny v 3D s neprázdnými vnitřky jsou **po částech kongruentní**.

Důsledek B–T věty: hrášek a sluníčko

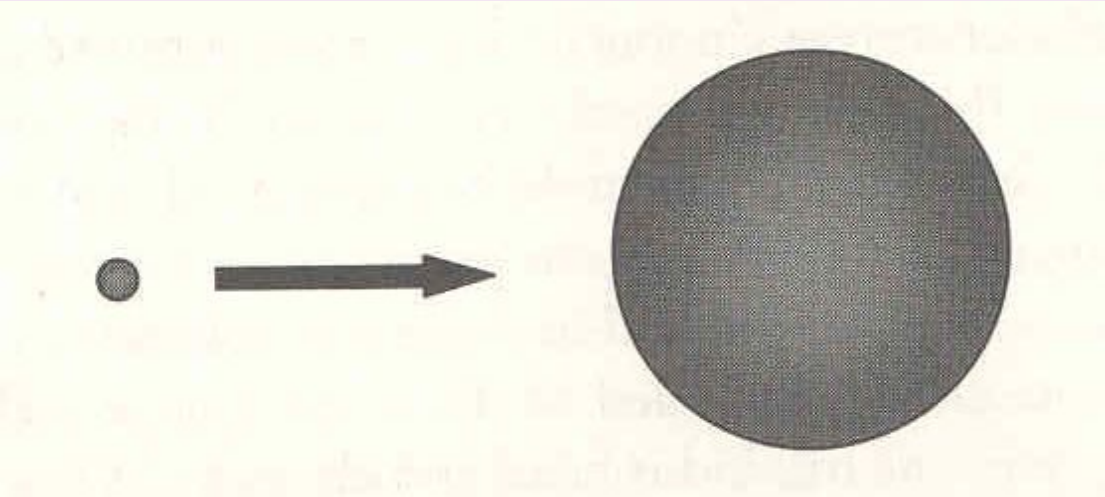
Každé dvě množiny v 3D s neprázdnými vnitřky jsou **po částech kongruentní**.

Tedy jednu lze rozstříhat na konečně mnoho kousků, a z nich potom sestavit druhou.

Důsledek B–T věty: hrášek a sluníčko

Každé dvě množiny v 3D s neprázdnými vnitřky jsou **po částech kongruentní**.

Tedy jednu lze rozstříhat na konečně mnoho kousků, a z nich potom sestavit druhou.



Námitky

Námitky

Že to nedává smysl?

Námitky

Že to nedává smysl?

Máte na mysli *fyzikální* smysl?

Námitky

Že to nedává smysl?

Máte na mysli *fyzikální* smysl?

A musí vůbec vše, co děláme, dávat fyzikální smysl?

Námitky

Že to nedává smysl?

Máte na mysli *fyzikální* smysl?

A musí vůbec vše, co děláme, dávat fyzikální smysl?

My nejsme fyzici, my jsme *matematikové*!

Obrana proti námitkám

Obrana proti námitkám

V matematice se pohybujeme ve světě *axiomů*.

Obrana proti námitkám

V matematice se pohybujeme ve světě *axiomů*.

Všechno, co v matematice tvrdíme, s nimi musí být v souladu.

Obrana proti námitkám

V matematice se pohybujeme ve světě *axiomů*.

Všechno, co v matematice tvrdíme, s nimi musí být v souladu.

To nevyhnutelně vede ke vzniku rozličných *paradoxů*.

Přiléhavá přezdívka

Přiléhavá přezdívka

Ne nadarmo se Banachově–Tarského větě často říká
Banachův–Tarského paradox.

Banachova–Tarského věta: propagační verze

Banachova–Tarského věta: propagační verze

Když se přihlásíte na matfyz

Banachova–Tarského věta: propagační verze

Když se přihlásíte na matfyz

a vydržíte aspoň do třetího semestru,

Banachova–Tarského věta: propagační verze

Když se přihlásíte na matfyz

a vydržíte aspoň do třetího semestru,

budete se učit **teorii míry**!

Banachova–Tarského věta: propagační verze

Když se přihlásíte na matfyz

a vydržíte aspoň do třetího semestru,

budete se učit **teorii míry**!

A tam vás naučíme následující užitečnou dovednost.

Banachova–Tarského věta: propagační verze

Banachova–Tarského věta: propagační verze

Libovolnou bankovku, například 100 Euro je možné rozstříhat na konečně mnoho kousků, z nichž potom lze sestavit bankovku jinou, například 500 Euro.

Banachova–Tarského věta: propagační verze

Libovolnou bankovku, například 100 Euro je možné rozstříhat na konečně mnoho kousků, z nichž potom lze sestavit bankovku jinou, například 500 Euro.

K tomu stačí vlastnit velice speciální nůžky.

Banachova–Tarského věta: verze pro exoty

Banachova–Tarského věta: verze pro exoty

Libovolnou bankovku, například 500 Euro je možné rozstříhat na konečně mnoho kousků, z nichž potom lze sestavit bankovku jinou, například 100 Euro.

Publikace věty: 1924

Publikace věty: 1924

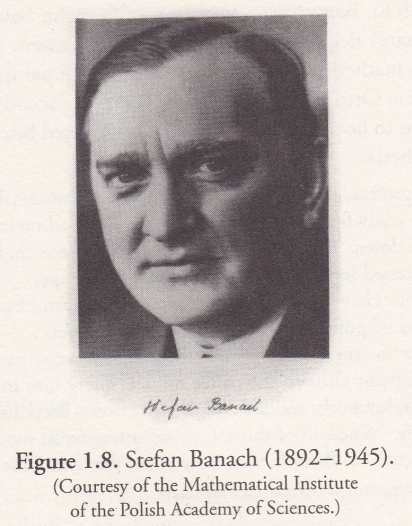
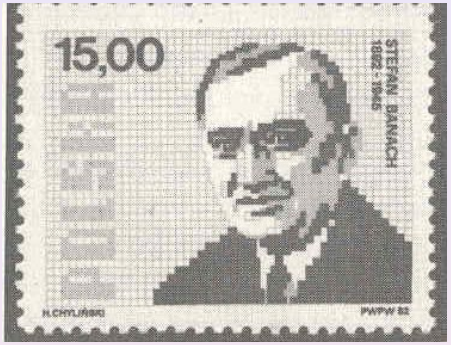


Figure 1.8. Stefan Banach (1892–1945).
(Courtesy of the Mathematical Institute
of the Polish Academy of Sciences.)

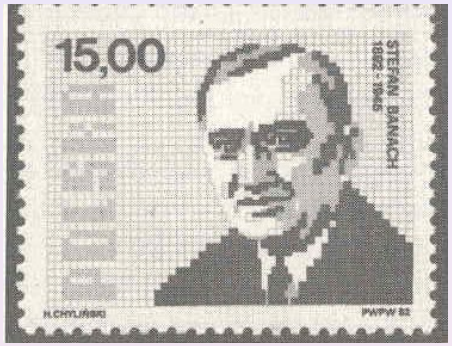




Publikace věty: 1924



Figure 1.8. Stefan Banach (1892–1945).
(Courtesy of the Mathematical Institute of the Polish Academy of Sciences.)





Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.

Par

St. Banach (Lwów) et A. Tarski (Varsovie).

Nous étudions dans cette Note les notions de *l'équivalence des ensembles de points par décomposition finie*, resp. *dénombrable*. Deux ensembles de points situés dans un espace métrique sont dits équivalents par décomposition finie (ou dénombrable), lorsqu'ils peuvent être décomposés en un nombre fini et égal (ou une infinité dénombrable) de parties disjointes respectivement congruentes.

Les principaux résultats contenus dans le présent article sont les suivants:

Dans un espace euclidien à $n \geqslant 3$ dimensions deux ensembles arbitraires, bornés et contenant des points intérieurs (p. ex. deux sphères à rayons différents), sont équivalents par décomposition finie.

Un théorème analogue subsiste pour les ensembles situés sur la surface d'une sphère; mais le théorème correspondant concernant l'espace euclidien à 1 ou 2 dimensions est faux.

D'autre part:

Dans un espace euclidien à $n \geqslant 1$ dimensions deux ensembles arbi-

Ohlasy

Ohlasy

Následovala vlna kontroverze mezi matematiky.

Ohlasy

Následovala vlna kontroverze mezi matematiky.

Studenti se chodili ptát: *opravdu matematici umějí zdvojnásobovat objem?*

Ohlasy

Následovala vlna kontroverze mezi matematiky.

Studenti se chodili ptát: *opravdu matematici umějí zdvojnásobovat objem?*

Na zastupitele státu Illinois se rozzlobený počestný občan obrátil se žádostí o okamžité přijetí zákona, který by výuku takových nesmyslů zakazoval, alespoň na školách ve státě Illinois.

Kdo za to může?

Kdo za to může?

samozřejmě **matematici**

Kdo za to může?

samozřejmě **matematici**

jejich **teorie míry**

Kdo za to může?

samozřejmě **matematici**

jejich **teorie míry**

existence **neměřitelných množin**

Kdo za to může?

samozřejmě **matematici**

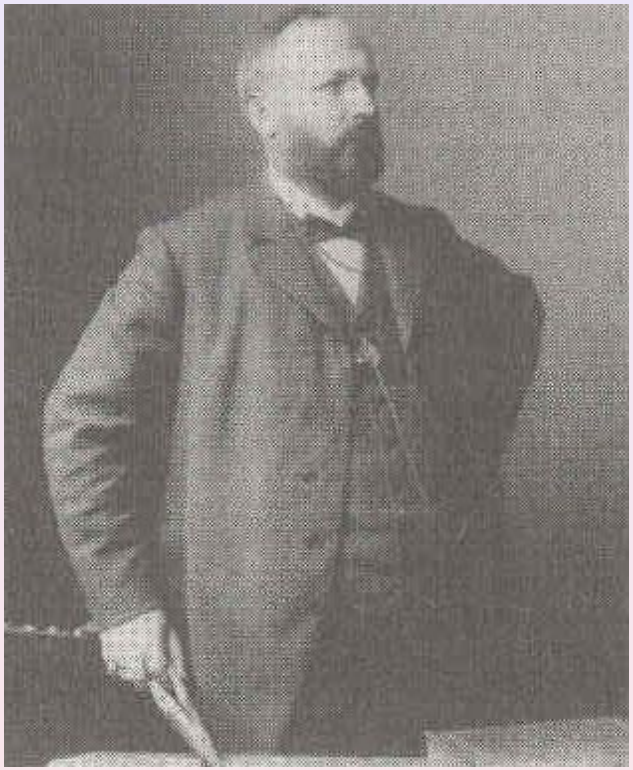
jejich **teorie míry**

existence **neměřitelných množin**

a hlavně **axiom výběru**

Georg Cantor (1845–1918)

Georg Cantor (1845–1918)



Cantor a nekonečno

Cantor a nekonečno

Cantorův objev: *kardinalita* množiny

Cantor a nekonečno

Cantorův objev: *kardinalita* množiny

U konečných množin je to počet jejich prvků.

Cantor a nekonečno

Cantorův objev: *kardinalita* množiny

U konečných množin je to počet jejich prvků.

Pravá zábava začíná pro nekonečné množiny.

Cantor a nekonečno

Cantorův objev: *kardinalita* množiny

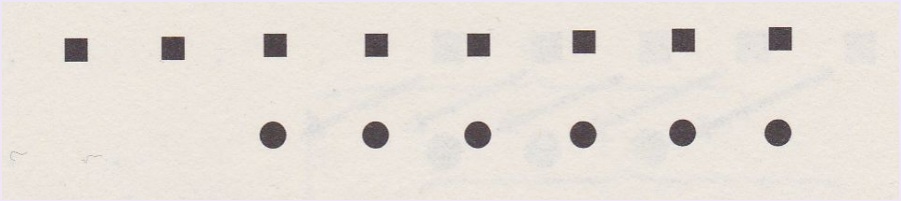
U konečných množin je to počet jejich prvků.

Pravá zábava začíná pro nekonečné množiny.

Dvě množiny jsou *ekvivalentní*, jestliže mezi nimi existuje *bijekce*.

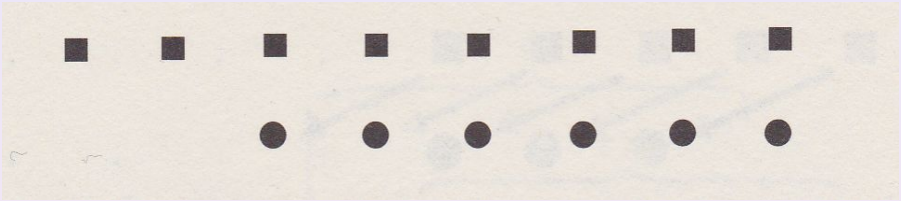
Úskalí práce s nekonečnem

Úskalí práce s nekonečnem

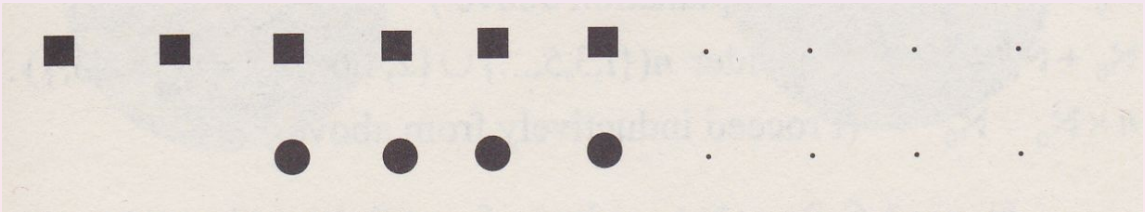


Máme více kostiček než koleček.

Úskalí práce s nekonečnem



Máme více kostiček než koleček.



Máme více kostiček než koleček?

První Cantorův šok

První Cantorův šok

Množina může být ekvivalentní své vlastní podmnožině!

První Cantorův šok

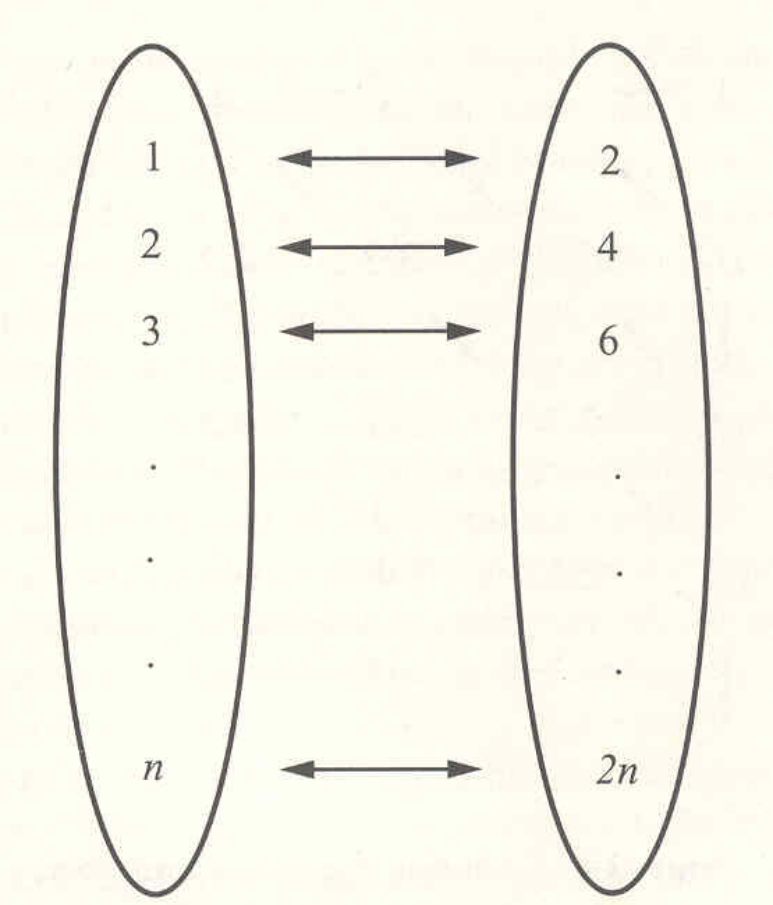
Množina může být ekvivalentní své vlastní podmnožině!

Příklad: přirozená čísla a sudá čísla.

První Cantorův šok

Množina může být ekvivalentní své vlastní podmnožině!

Příklad: přirozená čísla a sudá čísla.



Spočetné množiny

Spočetné množiny

Množiny, mající nejvýše tolik prvků jako $\mathbb{N}$, nazýváme **spočetné**.

Druhý Cantorův šok

Druhý Cantorův šok

Racionálních čísel není více, než přirozených!

Druhý Cantorův šok

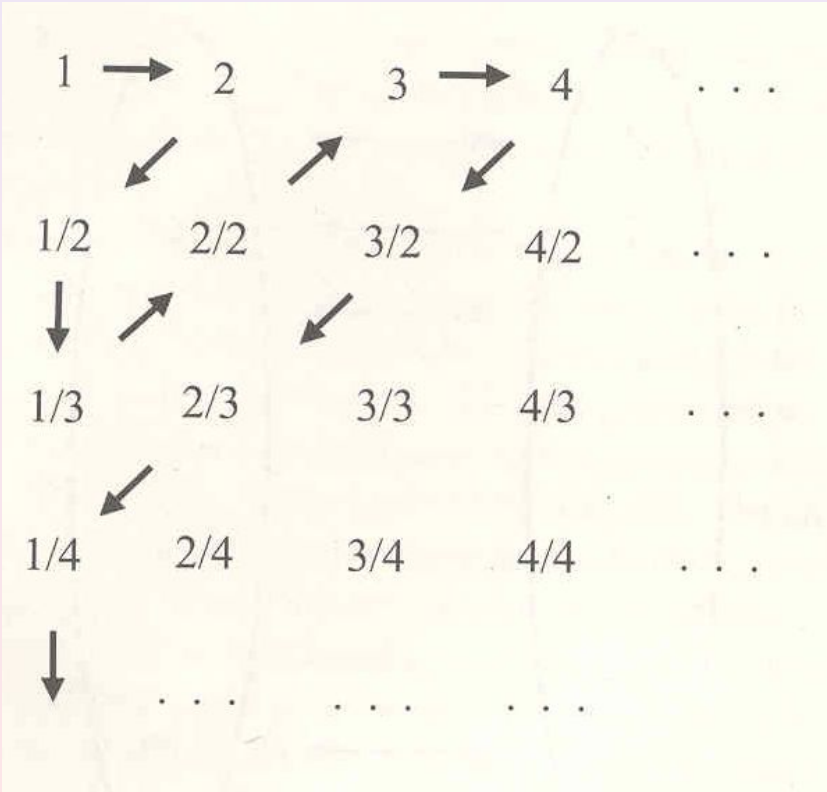
Racionálních čísel není více, než přirozených!

Racionální čísla jsou *spočetná*.

Druhý Cantorův šok

Racionálních čísel není více, než přirozených!

Racionální čísla jsou *spočetná*.



Třetí Cantorův šok

Třetí Cantorův šok

Reálných čísel je podstatně více než přirozených!

Třetí Cantorův šok

Reálných čísel je podstatně více než přirozených!

Reálná čísla jsou **nespočetná**.

Třetí Cantorův šok

Reálných čísel je podstatně více než přirozených!

Reálná čísla jsou **nespočetná**.

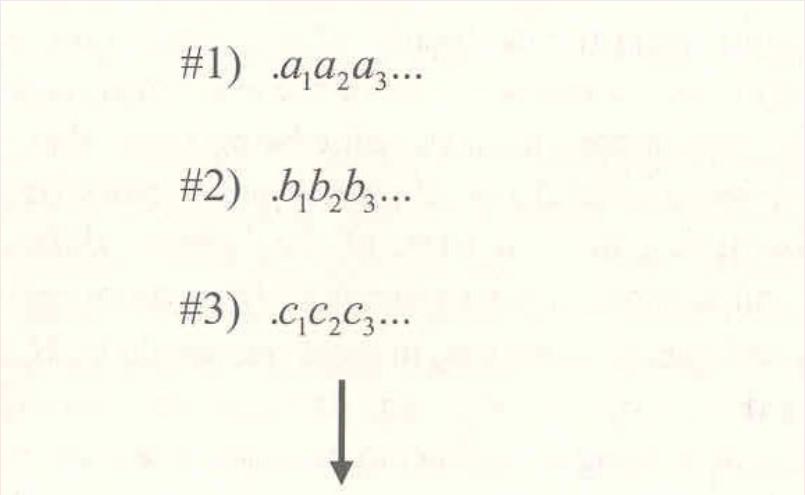
To vyplývá z *diagonalizační metody*, kterou Cantor vyvinul.

Třetí Cantorův šok

Reálných čísel je podstatně více než přirozených!

Reálná čísla jsou **nespočetná**.

To vyplývá z *diagonalizační metody*, kterou Cantor vyvinul.



Čtvrtý Cantorův šok

Čtvrtý Cantorův šok

Existuje více druhů nekonečen!

Čtvrtý Cantorův šok

Existuje více druhů nekonečen!

Cantor předpověděl existenci *hierarchie* nekonečen.

Existuje více druhů nekonečen!

Cantor předpověděl existenci *hierarchie* nekonečen.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

Existuje více druhů nekonečen!

Cantor předpověděl existenci *hierarchie* nekonečen.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

Hypotéza kontinua:

$$c = 2^{\aleph_0} = \aleph_1?$$

Existuje více druhů nekonečen!

Cantor předpověděl existenci *hierarchie* nekonečen.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$$

Hypotéza kontinua:

$$c = 2^{\aleph_0} = \aleph_1?$$

Cantor věřil, že ano, ale nedokázal to.

Hilbertův seznam

Hilbertův seznam

David Hilbert (Paříž 1900): 23 nejdůležitějších neřešených matematických problémů.

Hilbertův seznam

David Hilbert (Paříž 1900): 23 nejdůležitějších neřešených matematických problémů.

První místo na seznamu: *hypotéza kontinua*.

Axiomy teorie množin

Axiomy teorie množin

Cantor, Zermelo, Fränkel (1908) (dle Eukleidova vzoru)

Axiomy teorie množin

Cantor, Zermelo, Fränkel (1908) (dle Eukleidova vzoru)

1) axiom existence množiny
2) axiom extenzionality
3) axiom vydělení
4) axiom dvojice
5) axiom sumy
6) axiom potence
7) axiom nahrazení
8) axiom nekonečna
9) axiom výběru

Pozor, na seznamu je ukryt škodič!

Pozor, na seznamu je ukryt škodič!

S jedním z axiomů budou problémy.

Pozor, na seznamu je ukryt škodič!

S jedním z axiomů budou problémy.

Který to je?

Pozor, na seznamu je ukryt škodič!

S jedním z axiomů budou problémy.

Který to je?

1) axiom existence množiny
2) axiom extenzionality
3) axiom vydělení
4) axiom dvojice
5) axiom sumy
6) axiom potence
7) axiom nahrazení
8) axiom nekonečna
9) **axiom výběru**

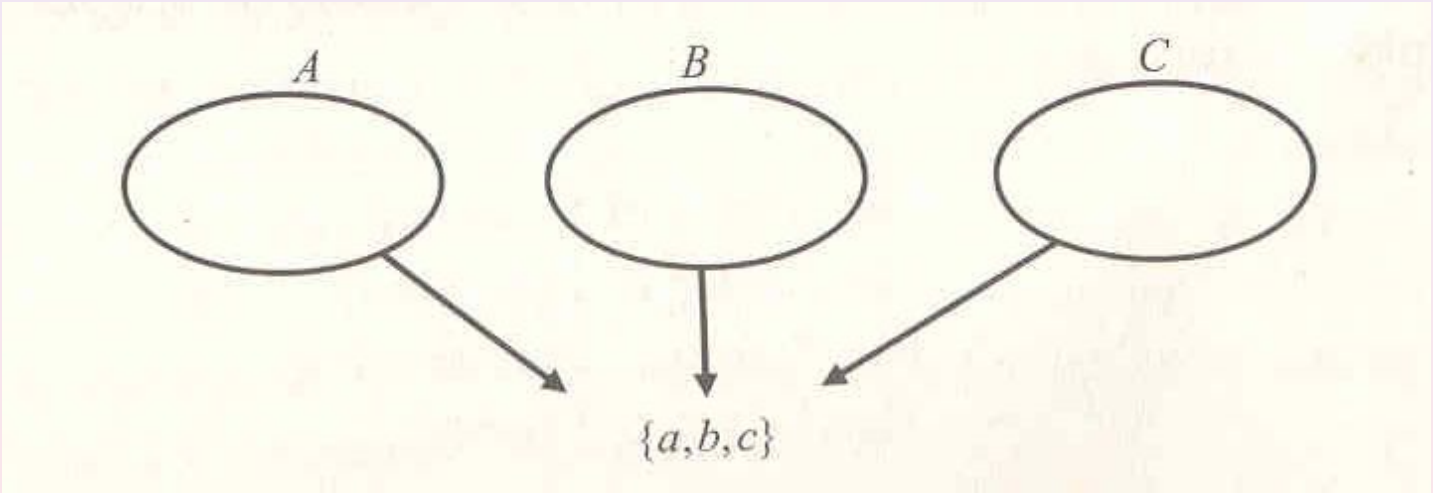
Axiom výběru

Axiom výběru

Axiom výběru: *Pro libovolný soubor množin existuje výběrová množina, která obsahuje po jednom prvku z každé množiny v daném souboru.*

Axiom výběru

Axiom výběru: *Pro libovolný soubor množin existuje výběrová množina, která obsahuje po jednom prvku z každé množiny v daném souboru.*



Axiom výběru v praxi

Axiom výběru v praxi

Pro konečný počet množin je to snadné.

Axiom výběru v praxi

Pro konečný počet množin je to snadné.

Pro nekonečné soubory množin začínají problémy.

Axiom výběru v praxi

Pro konečný počet množin je to snadné.

Pro nekonečné soubory množin začínají problémy.

Příklad Bertranda Russella:

Axiom výběru v praxi

Pro konečný počet množin je to snadné.

Pro nekonečné soubory množin začínají problémy.

Příklad Bertranda Russella:

- *nekonečná množina párů bot*

Axiom výběru v praxi

Pro konečný počet množin je to snadné.

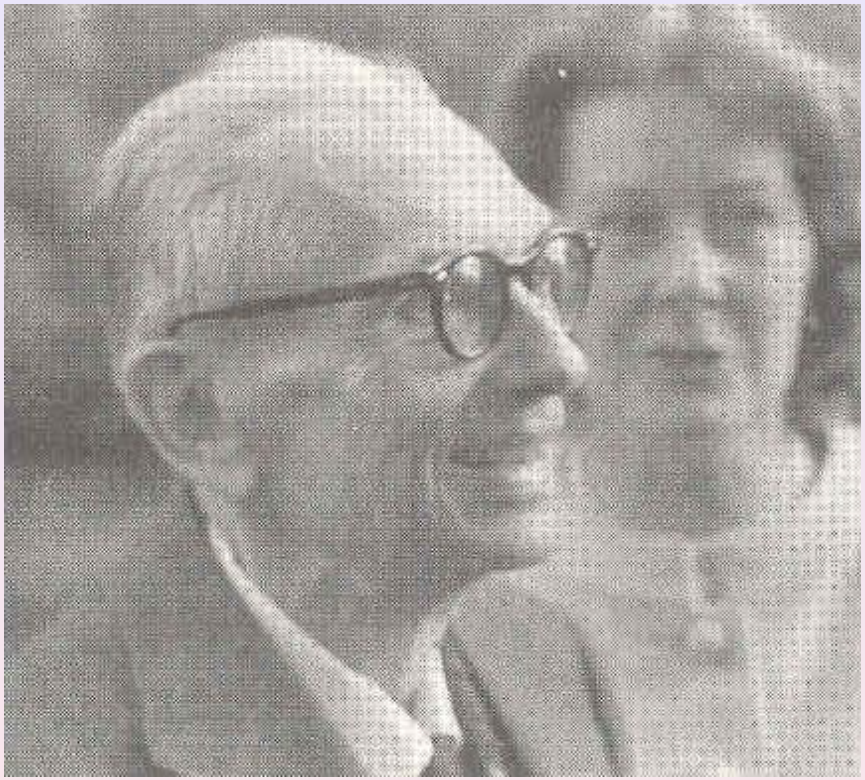
Pro nekonečné soubory množin začínají problémy.

Příklad Bertranda Russella:

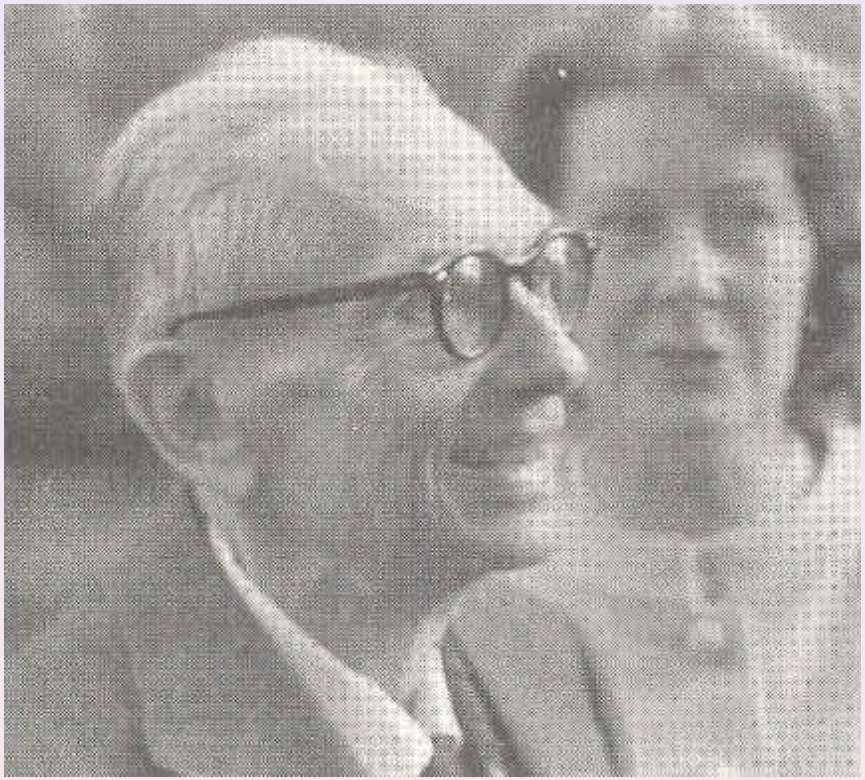
- *nekonečná množina párů bot*
- *nekonečná množina párů ponožek*

Na scénu vstupuje Kurt Gödel

Na scénu vstupuje Kurt Gödel



Na scénu vstupuje Kurt Gödel



Kurt Gödel v roce 1931 dokázal existenci tzv. *nerozhodnutelných tvrzení*.

Axiom výběru – konzistence a nezávislost

Axiom výběru – konzistence a nezávislost

Otázky kolem axiomu výběru: jeho *konzistence* a *nezávislost* na ostatních axiomech.

Axiom výběru – konzistence a nezávislost

Otázky kolem axiomu výběru: jeho *konzistence* a *nezávislost* na ostatních axiomech.

Kurt Gödel 1940: Axiom výběru nelze vyvrátit

Axiom výběru – konzistence a nezávislost

Otázky kolem axiomu výběru: jeho *konzistence* a *nezávislost* na ostatních axiomech.
Kurt Gödel 1940: Axiom výběru nelze vyvrátit

(tedy je konzistetní s ostatními axiomy).

Axiom výběru – konzistence a nezávislost

Otázky kolem axiomu výběru: jeho *konzistence* a *nezávislost* na ostatních axiomech.
Kurt Gödel 1940: Axiom výběru nelze vyvrátit

(tedy je konzistetní s ostatními axiomy).

Zároveň dokázal *konzistenci hypotézy kontinua*.

Axiom výběru – konzistence a nezávislost

Otázky kolem axiomu výběru: jeho *konzistence* a *nezávislost* na ostatních axiomech.
Kurt Gödel 1940: Axiom výběru nelze vyvrátit

(tedy je konzistetní s ostatními axiomy).

Zároveň dokázal *konzistenci hypotézy kontinua*.

Snažil se dokázat jejich **nezávislost**, ale nepodařilo se.

Axiom výběru – konzistence a nezávislost

Otázky kolem axiomu výběru: jeho *konzistence* a *nezávislost* na ostatních axiomech.
Kurt Gödel 1940: Axiom výběru nelze vyvrátit

(tedy je konzistetní s ostatními axiomy).

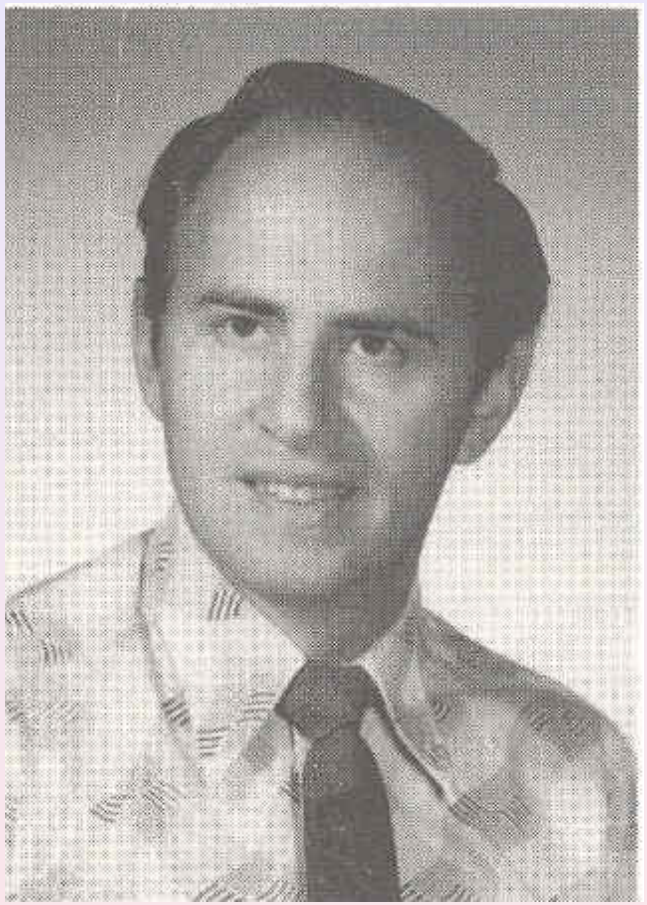
Zároveň dokázal *konzistenci hypotézy kontinua*.

Snažil se dokázat jejich **nezávislost**, ale nepodařilo se.

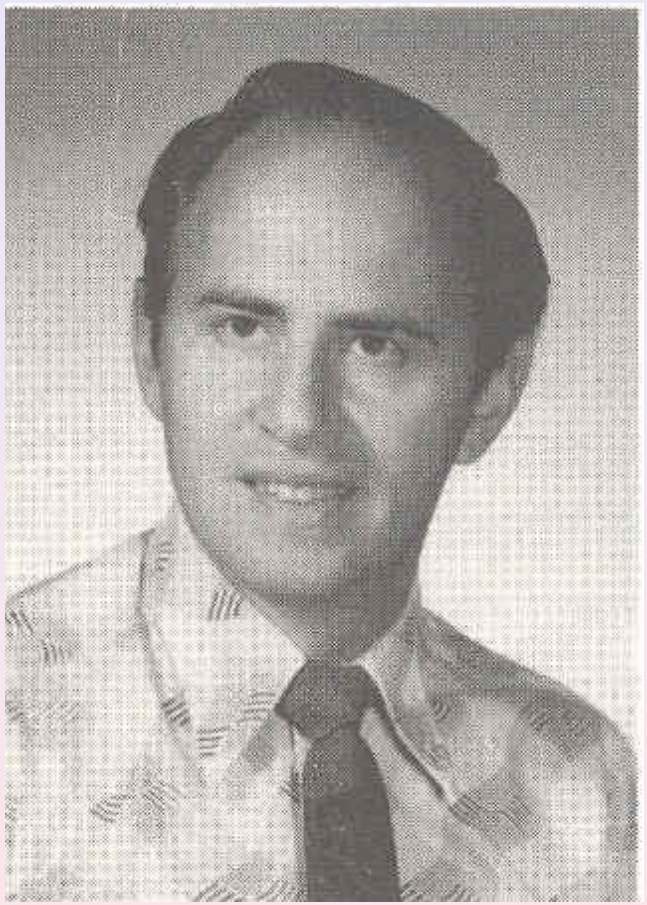
Na tu bylo třeba počkat ještě dalších 25 let.

Paul Cohen

Paul Cohen



Paul Cohen



dokázal (1965) **nezávislost** axiomu výběru a hypotézy kontinua.

Matematické paradoxy

Matematické paradoxy

Existují tři typy paradoxů:

Matematické paradoxy

Existují tři typy paradoxů:

paradoxy *typu 1*: tvrzení vypadá absurdně, ale platí;

Matematické paradoxy

Existují tři typy paradoxů:

paradoxy *typu 1*: tvrzení vypadá absurdně, ale platí;

paradoxy *typu 2*: tvrzení vypadá věrohodně, ale neplatí;

Matematické paradoxy

Existují tři typy paradoxů:

paradoxy *typu 1*: tvrzení vypadá absurdně, ale platí;

paradoxy *typu 2*: tvrzení vypadá věrohodně, ale neplatí;

(obvykle jde o nějaký švindl)

Matematické paradoxy

Existují tři typy paradoxů:

paradoxy *typu 1*: tvrzení vypadá absurdně, ale platí;

paradoxy *typu 2*: tvrzení vypadá věrohodně, ale neplatí;

(obvykle jde o nějaký švindl)

paradoxy *typu 3* (antinomy): výroky vedoucí ke sporným důsledkům

Paradoxy typu 3 (antinomy - logické paradoxy)

Paradoxy typu 3 (antinomy - logické paradoxy)

Burali-Fortiův paradox (1897): Množina všech ordinálních čísel definuje ordinální číslo větší, než libovolný její prvek. Takže množina všech ordinálních čísel není množina.

Paradoxy typu 3 (antinomy - logické paradoxy)

Burali-Fortiův paradox (1897): Množina všech ordinálních čísel definuje ordinální číslo větší, než libovolný její prvek. Takže množina všech ordinálních čísel není množina.

Cantorův paradox (1899): Nechť S je množina všech množin. Potom $P(S)$ je její podmnožina, takže má nejvýše stejnou mohutnost, jako S.

Paradoxy typu 3 (antinomy - logické paradoxy)

Burali-Fortiův paradox (1897): Množina všech ordinálních čísel definuje ordinální číslo větší, než libovolný její prvek. Takže množina všech ordinálních čísel není množina.

Cantorův paradox (1899): Nechť S je množina všech množin. Potom $P(S)$ je její podmnožina, takže má nejvýše stejnou mohutnost, jako S.

Russellův paradox (1901): Definujeme množinu všech množin, které nejsou samy sobě svým prvkem. Je tato množina svým vlastním prvkem?

Paradoxy typu 3

Paradoxy typu 3

Všechny uvedené paradoxy obsahují *samovztažnost* (množina všech množin apod.).

Paradoxy typu 3

Všechny uvedené paradoxy obsahují *samovztažnost* (množina všech množin apod.).

Ta se objevuje i jinde, například ve fyzice, umění a humanitních vědách.

Paradoxy typu 3

Všechny uvedené paradoxy obsahují *samovztažnost* (množina všech množin apod.).

Ta se objevuje i jinde, například ve fyzice, umění a humanitních vědách.

počátek 19. století: Pierre Simon Laplace - vědecký determinismus (vše se dá předpovědět)

Paradoxy typu 3

Všechny uvedené paradoxy obsahují *samovztažnost* (množina všech množin apod.).

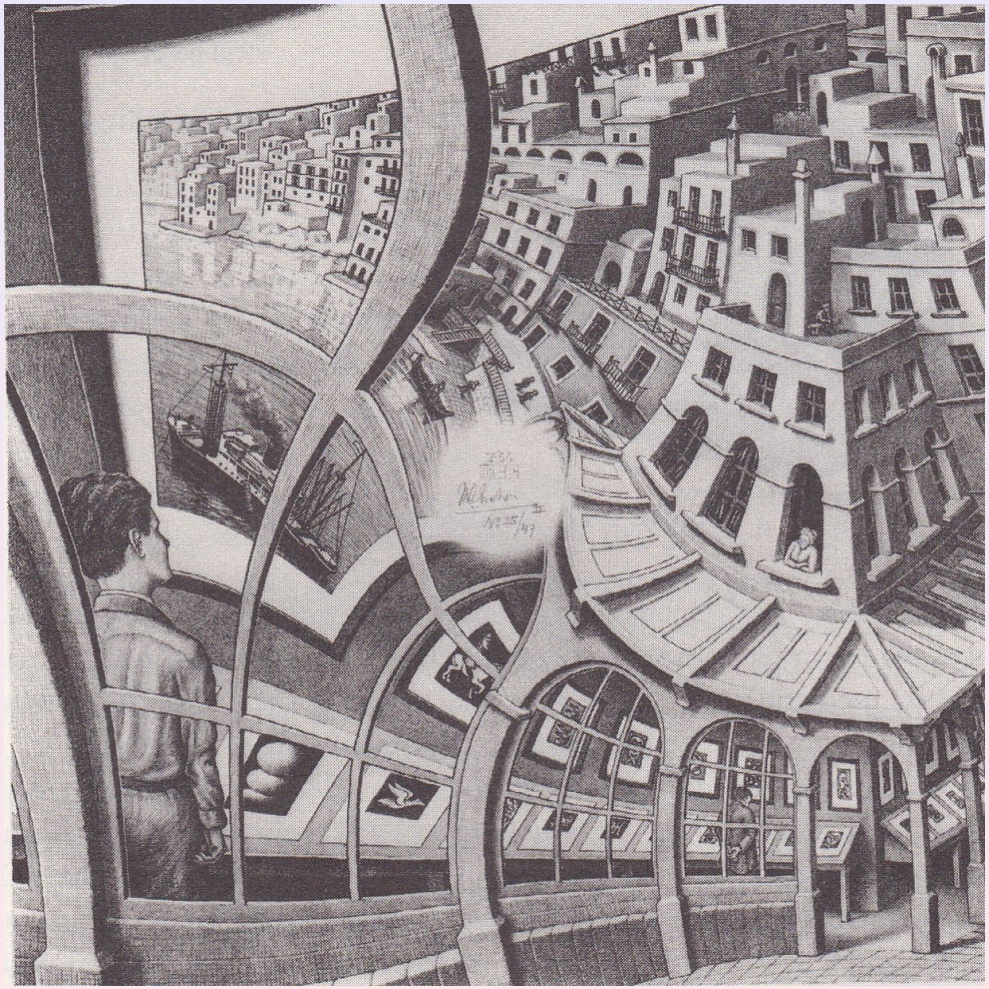
Ta se objevuje i jinde, například ve fyzice, umění a humanitních vědách.

počátek 19. století: Pierre Simon Laplace - vědecký determinismus (vše se dá předpovědět)

1927 Werner Heisenberg: blbost (princip neurčitosti)

Samovztažnost v umění

Samovztažnost v umění



Escher: Print Gallery

Richardův paradox

Richardův paradox

OTÁZKA:

Richardův paradox

OTÁZKA: Určete číslo definované následujícím slovním spojením.

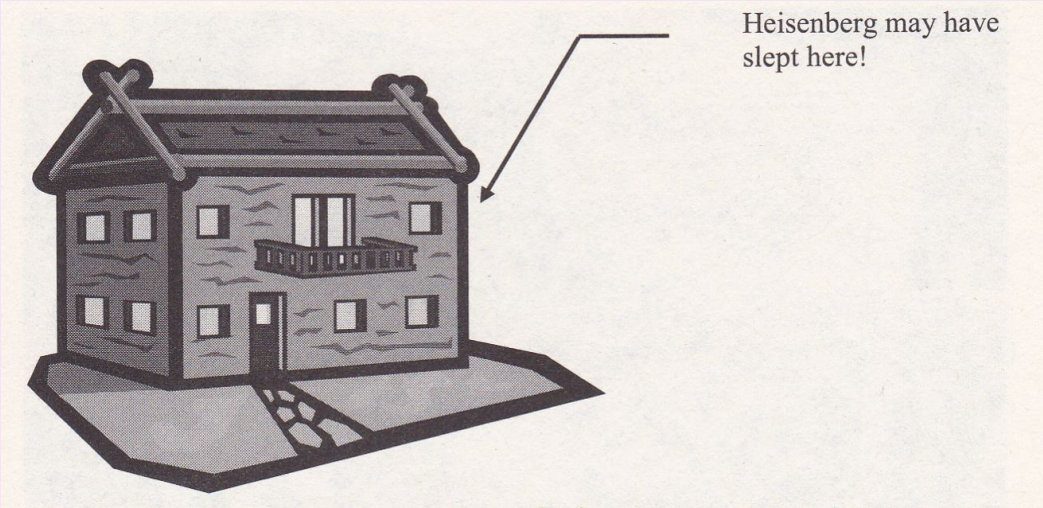
Richardův paradox

OTÁZKA: Určete číslo definované následujícím slovním spojením.

“Nejmenší přirozené číslo, které není možné žádným způsobem definovat slovním útvarem v češtině obsahujícím menší počet slov než dvacet.”

Princip neurčitosti v praxi

Princip neurčitosti v praxi



Road attraction

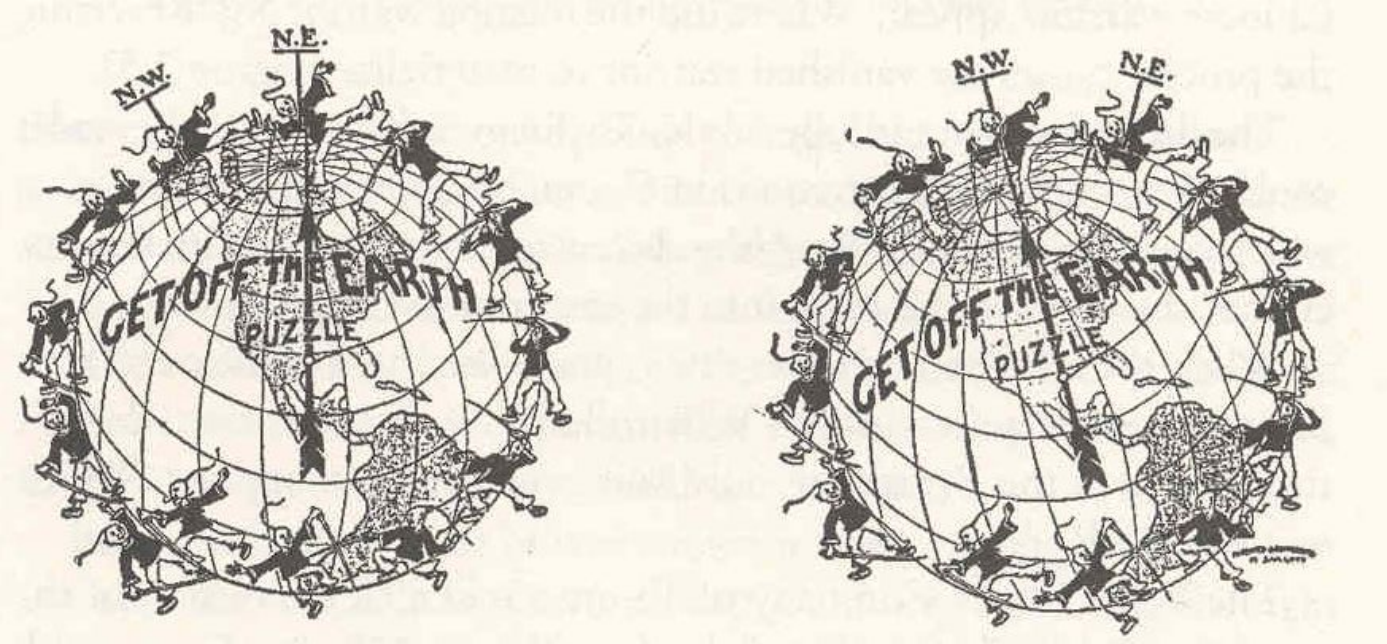
Paradoxy typu 2 (švindly)

Paradoxy typu 2 (švindly)

Sam Loyd.

Paradoxy typu 2 (švindly)

Sam Loyd.



The Vanishing Astronaut

The Vanishing Astronaut

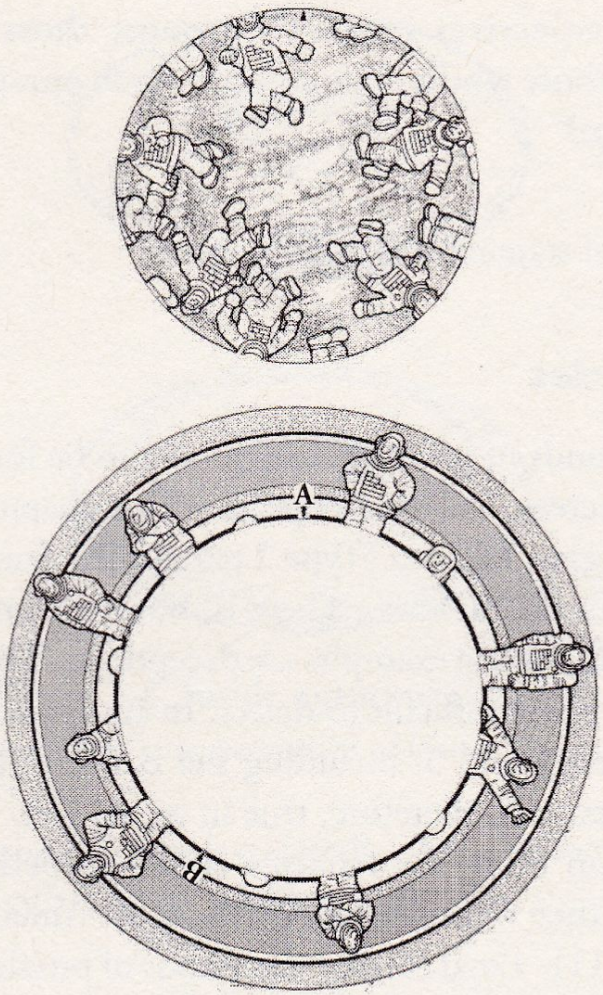
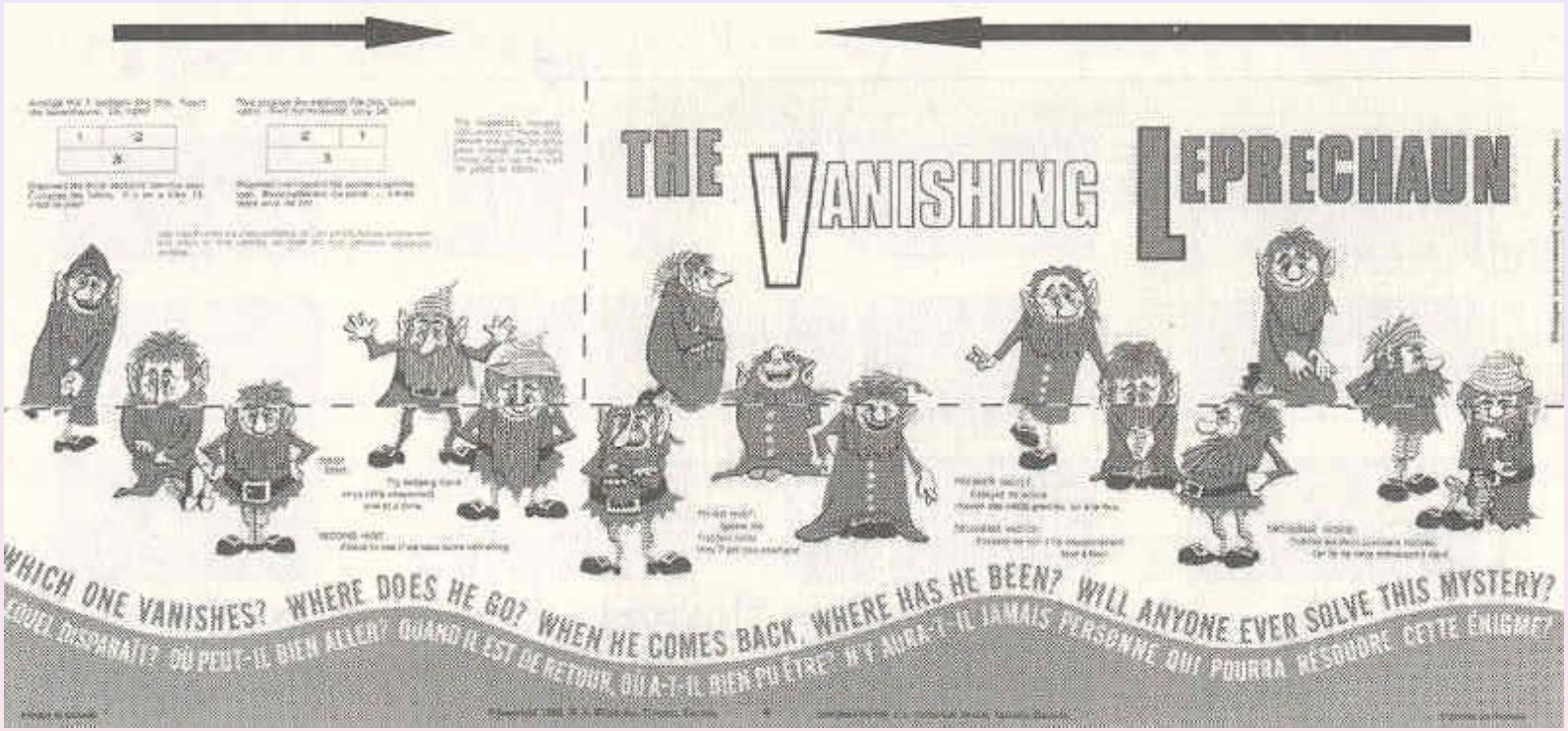


Figure 2.6. *The Vanishing Astronaut.*

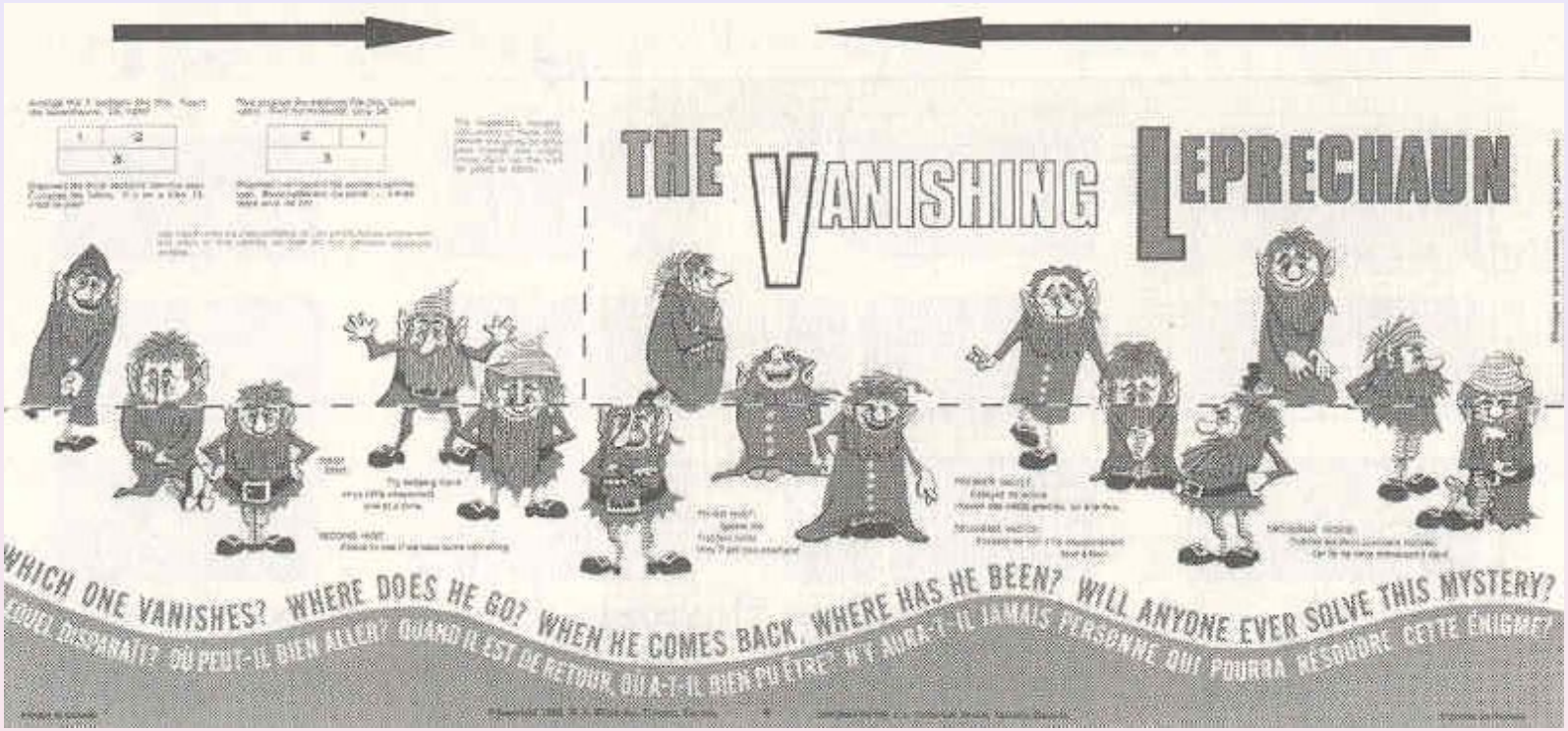
(reprinted by permission of the AIMS Education Foundation from *Puzzle Play*
© 2001 AIMS Education Foundation. All rights reserved.)

W.A. Elliott Company (Toronto): The Vanishing Leprechaun

W.A. Elliott Company (Toronto): The Vanishing Leprechaun



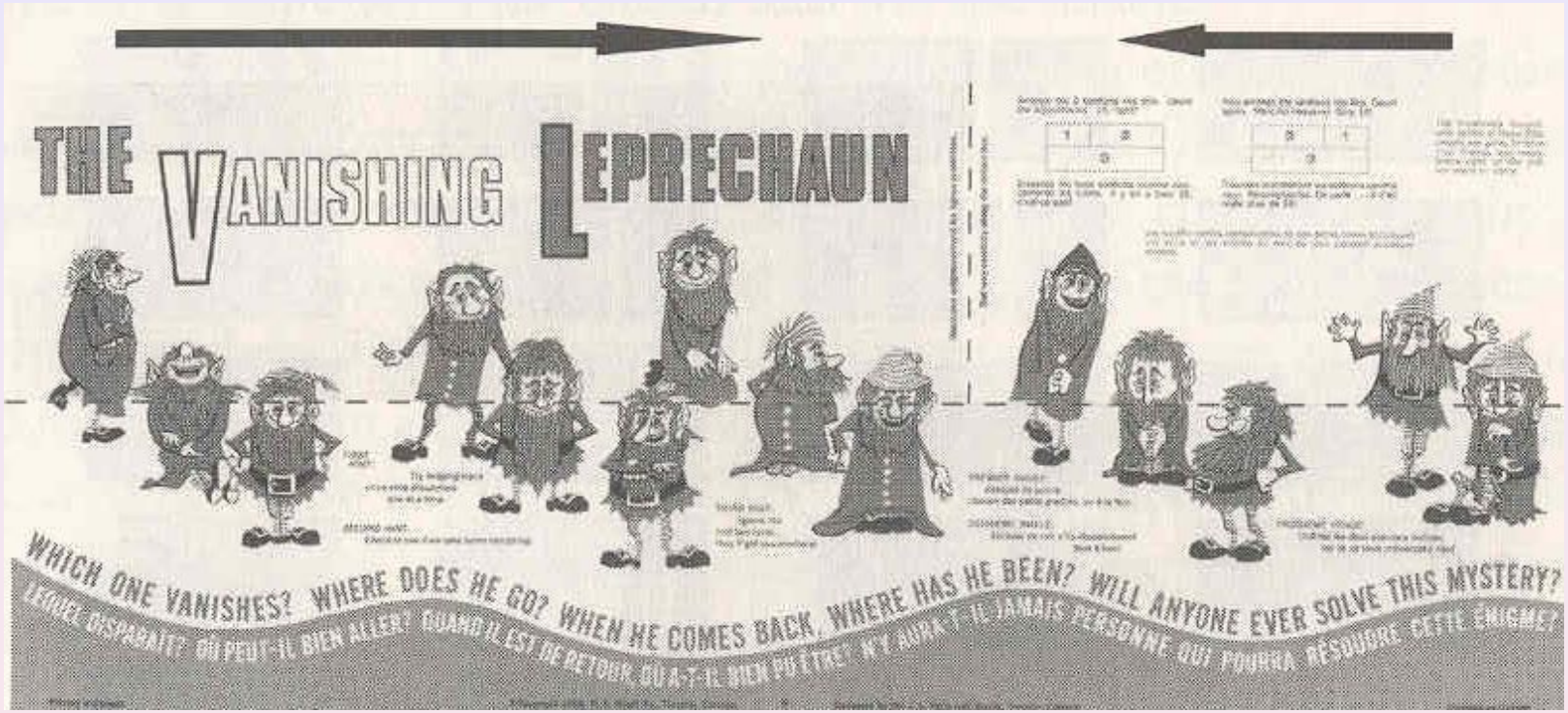
W.A. Elliott Company (Toronto): The Vanishing Leprechaun



Máme patnáct pidižvýků.

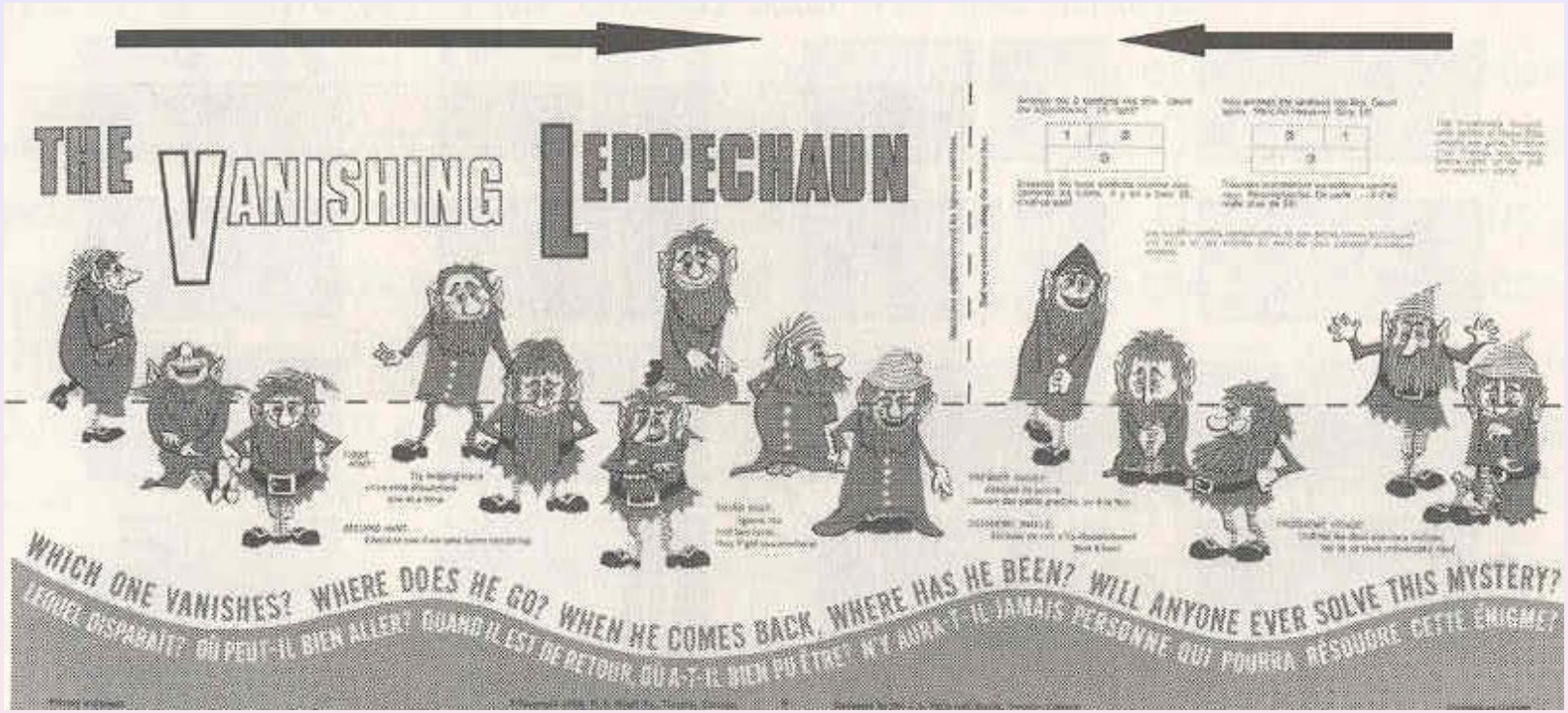
Zmizelý pidižvýk

Zmizelý pidižvýk



Po záměně horních dílů jich je jen 14.

Zmizelý pidižvýk

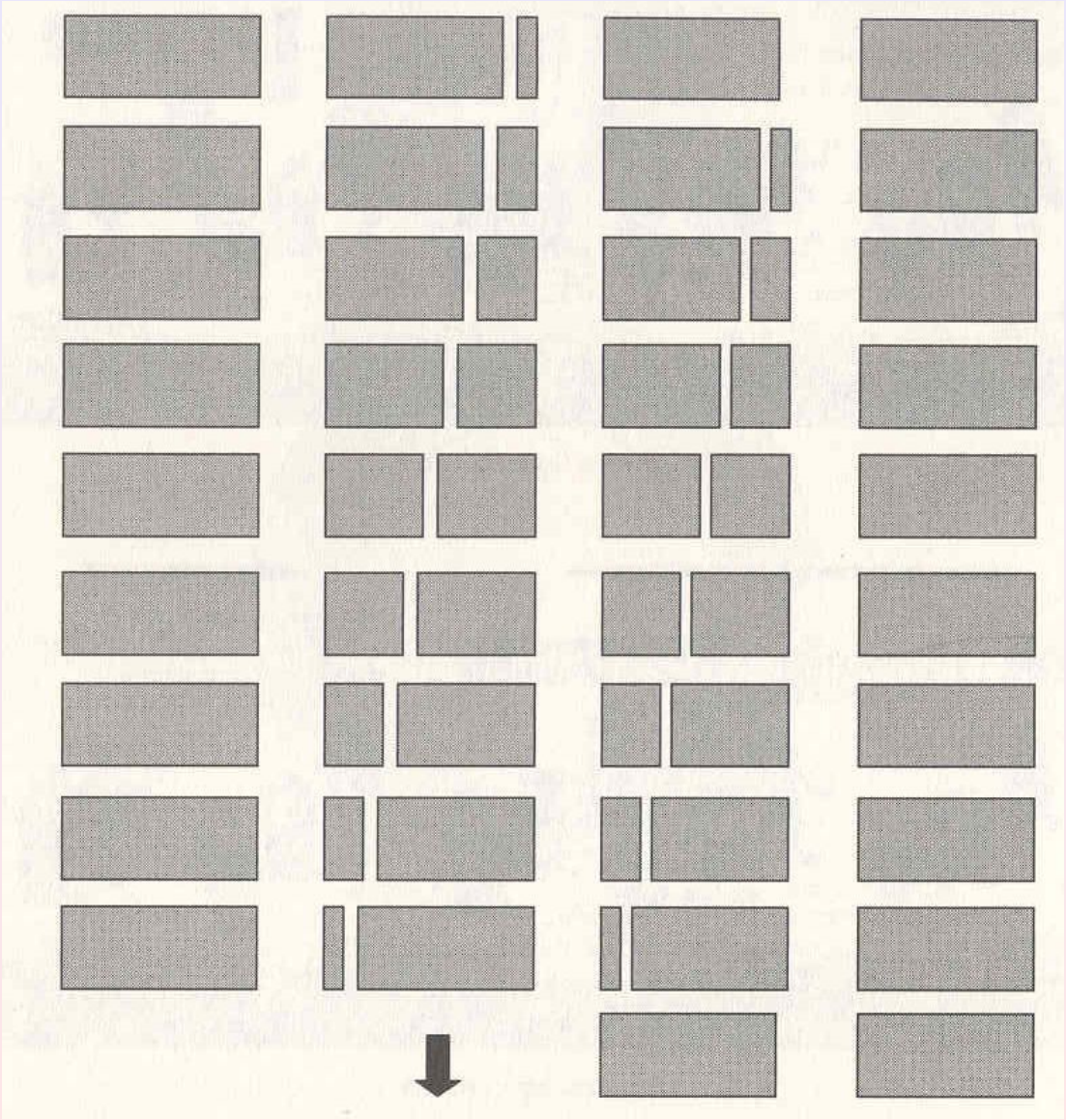


Po záměně horních dílů jich je jen 14.

Kam zmizel patnáctý pidižvýk?

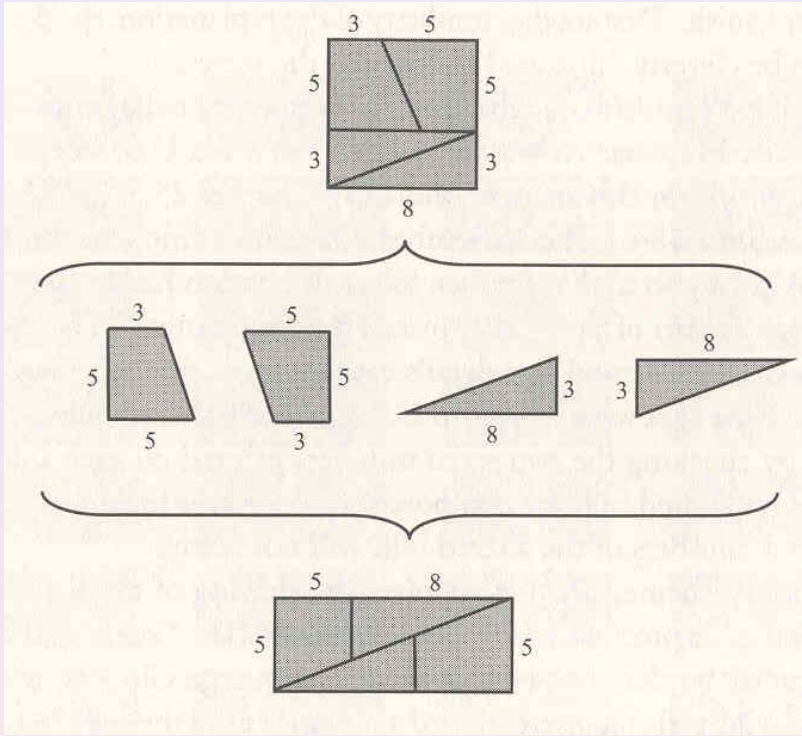
Jak se obohatit pomocí matematiky

Jak se obohatit pomocí matematiky

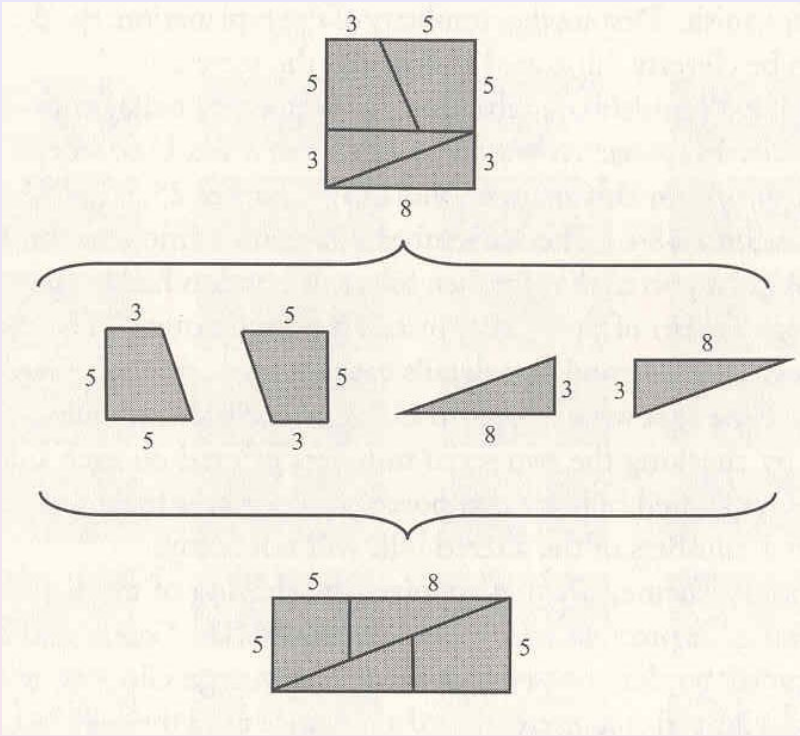


Fígl se čtvercem

Fígl se čtvercem

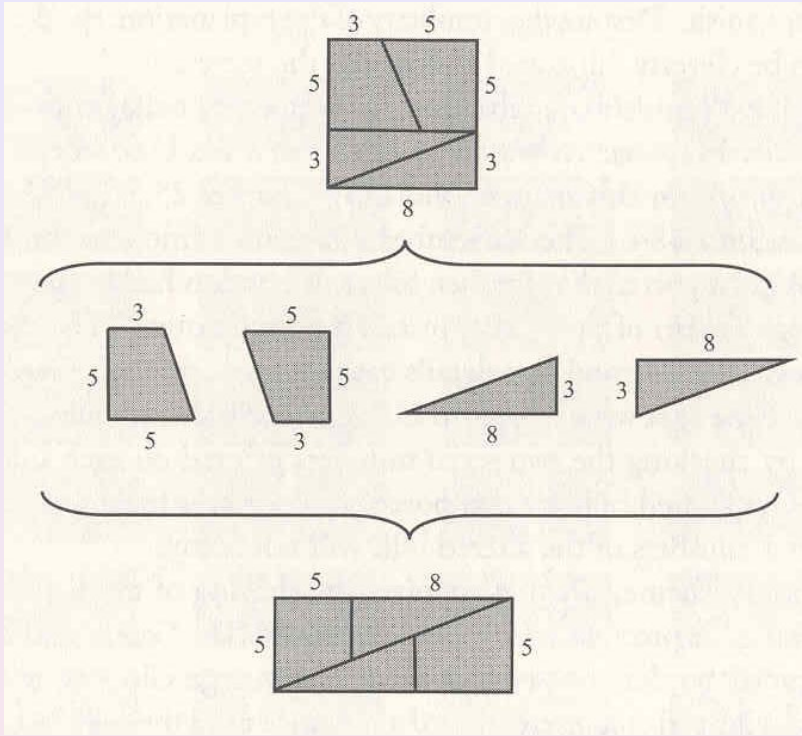


Fígl se čtvercem

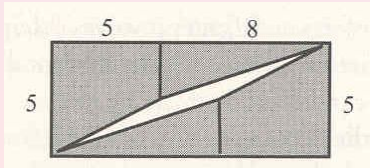


a jeho vysvětlení:

Fígl se čtvercem



a jeho vysvětlení:



Něco podobného se šachovnicí

Něco podobného se šachovnicí

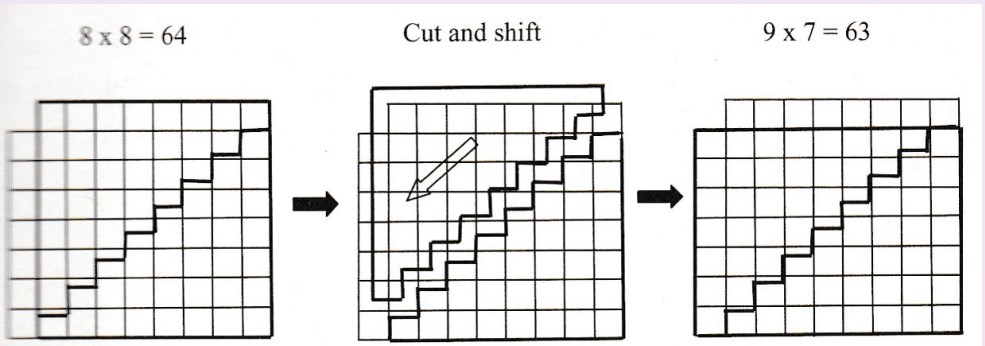


Figure 2.11. Another chessboard dissection.

Trojúhelník Mylese Curryho

Trojúhelník Mylese Curryho

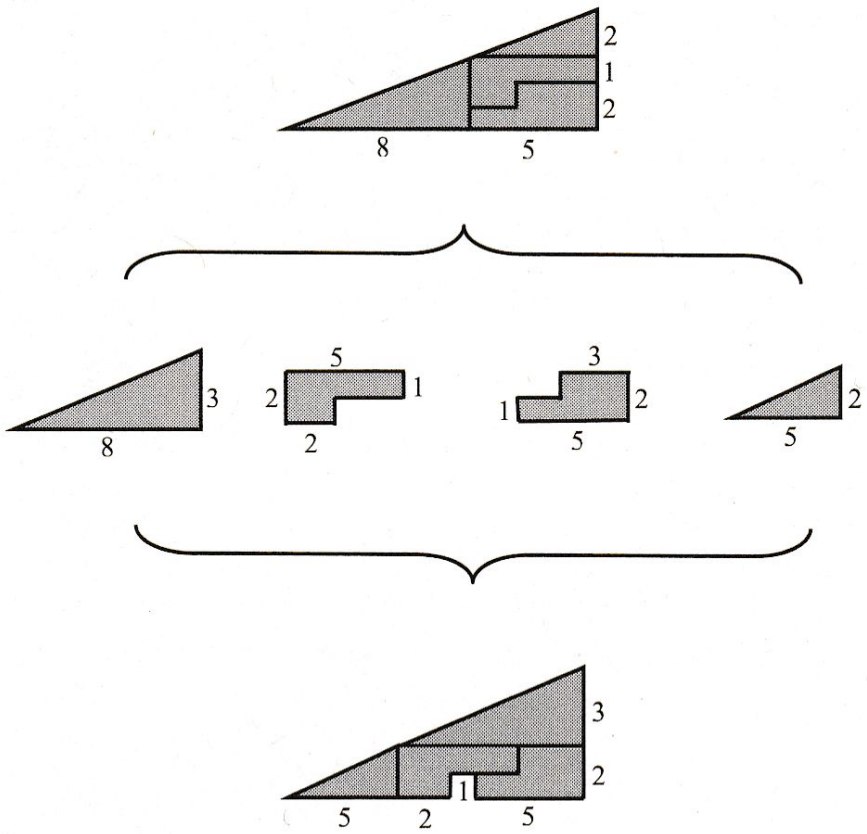


Figure 2.12. Curry triangle.

Zločin v králíkárně

Zločin v králíkárně

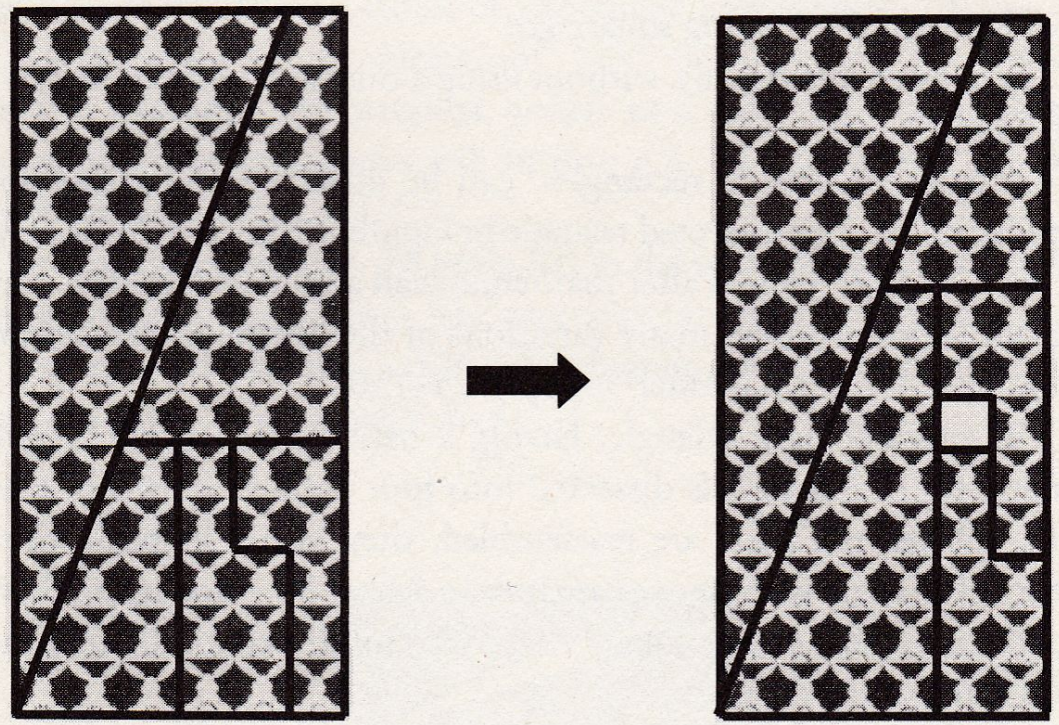


Figure 2.13. The Disappearing Rabbit Paradox.
(Courtesy of Myles Curry.)

Paradoxy typu 1

Paradoxy typu 1

Braessův paradox (každý si může ověřit)

Paradoxy typu 1

Braessův paradox (každý si může ověřit)

Zavěsíme závaží na pružinu přerušenou strunou, obě části pružiny přichytíme dvěma dalšími strunami a původní strunu přestřihneme.

Paradoxy typu 1

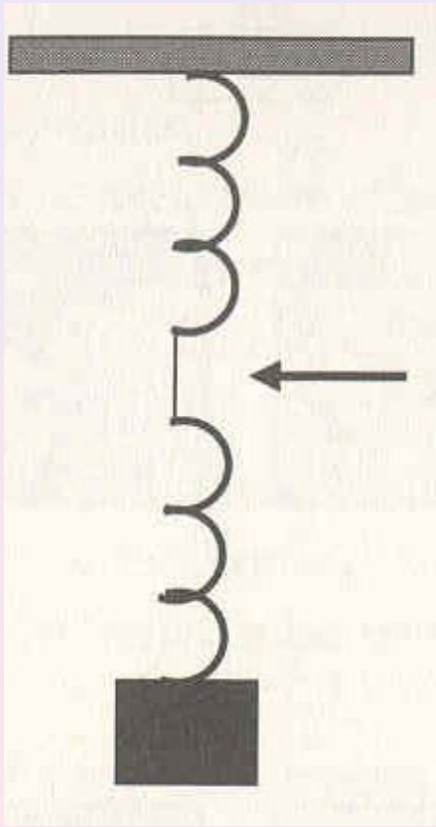
Braessův paradox (každý si může ověřit)

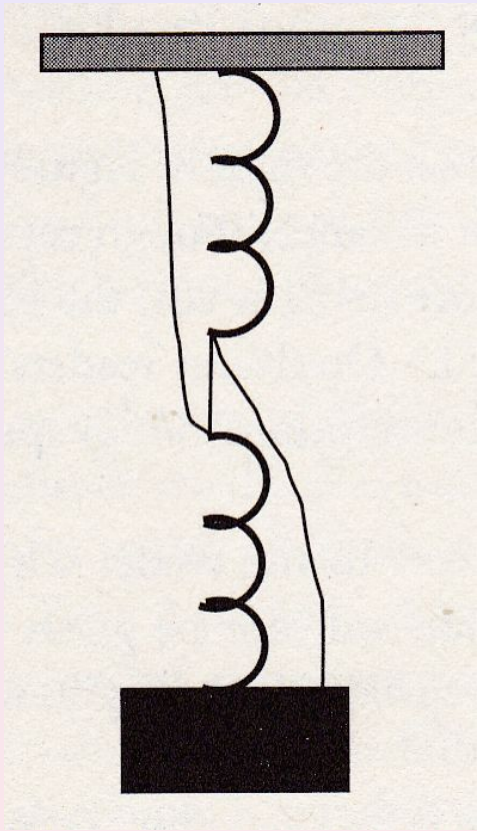
Zavěsíme závaží na pružinu přerušenou strunou, obě části pružiny přichytíme dvěma dalšími strunami a původní strunu přestřihneme.

Je zřejmé, že závaží klesne?

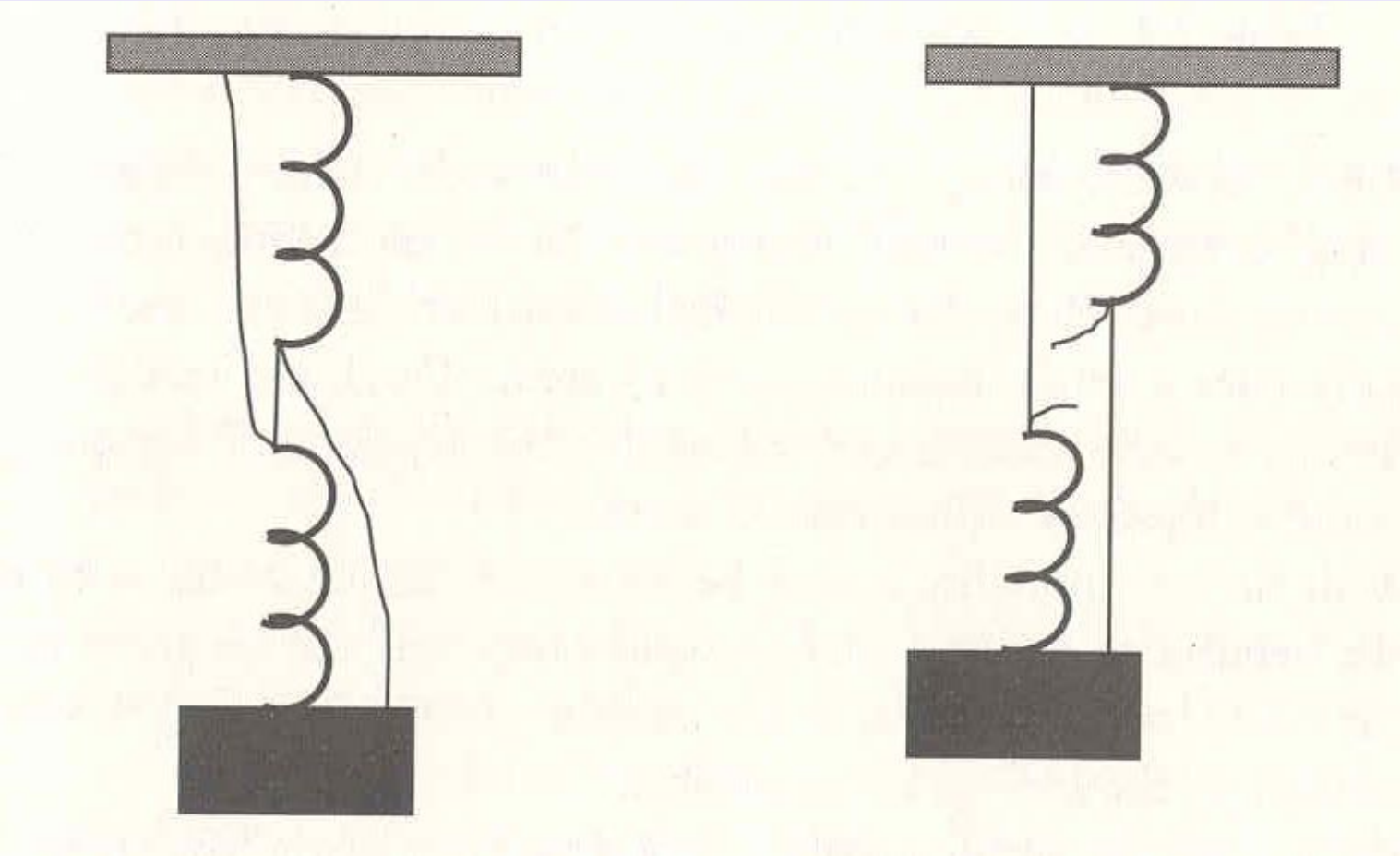
Klesne závaží?

Klesne závaží?





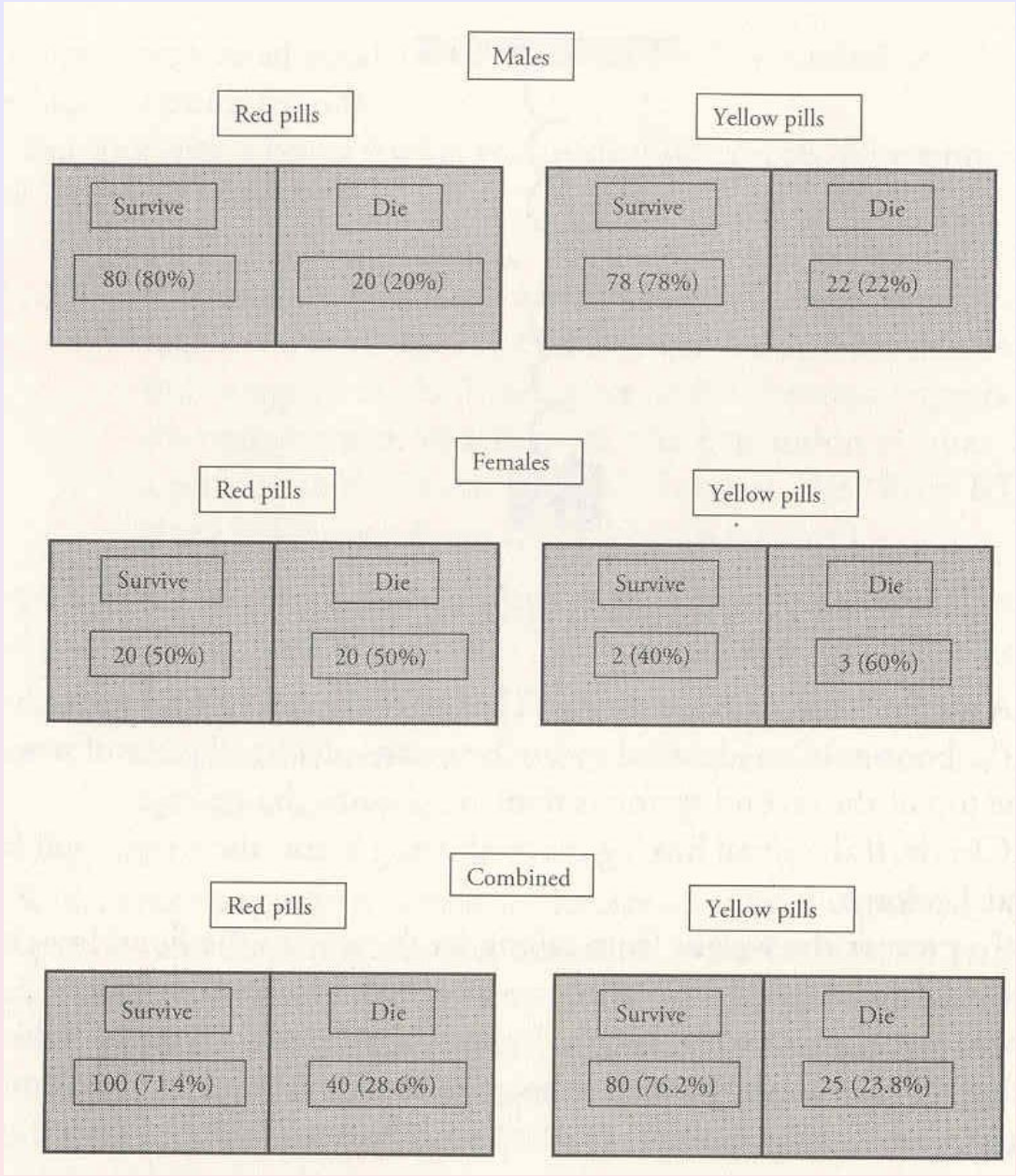
Opak je pravdou!



Simpsonův paradox

Simpsonův paradox

Posuzujeme efektivnost dvou druhů léku proti zákeřné chorobě.
Máme k dispozici data aplikace léků na **245**


Males
Red pills
Survive
80 (80%)
Die
20 (20%)
Yellow pills
Survive
78 (78%)
Die
22 (22%)
Females
Red pills
Survive
20 (50%)
Die
20 (50%)
Yellow pills
Survive
2 (40%)
Die
3 (60%)
Combined
Red pills
Survive
100 (71.4%)
Die
40 (28.6%)
Yellow pills
Survive
80 (76.2%)
Die
25 (23.8%)

Simpsonův paradox

Simpsonův paradox

Položte si dvě otázky:

Simpsonův paradox

Položte si dvě otázky:

1) *jste-li pacient, kterému léku dáte přednost?*

Simpsonův paradox

Položte si dvě otázky:

1) *jste-li pacient, kterému léku dáte přednost?*

2) *jste-li lékař, jaký lék nabídnete pacientovi, jestliže nevíte, zda je to muž nebo žena?*

Kongruence

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **izometrie**.

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **izometrie**.

Izometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **izometrie**.

Izometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Příklady izometrií:

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **izometrie**.

Izometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Příklady izometrií: posun

Kongruence

Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **izometrie**.

Izometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Příklady izometrií: posun, pootočení

Kongruence

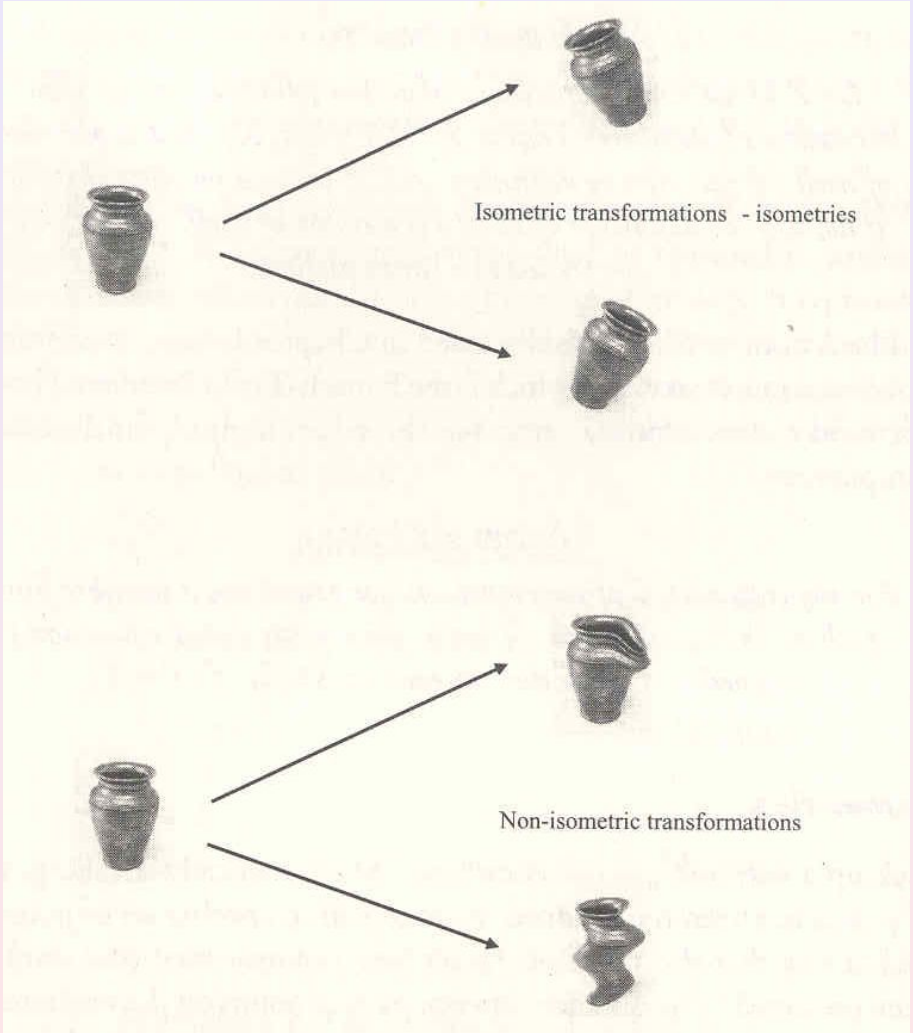
Dva objekty se nazývají **kongruentní**, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí **izometrie**.

Izometrie je rigidní pohyb tělesa zachovávající vzdálenosti mezi body.

Příklady izometrií: posun, pootočení, zrcadlení.

Kongruence – ilustrace

Kongruence – ilustrace



Nůžková kongruence

Nůžková kongruence

Dva rovinné objekty jsou **nůžkově kongruentní**, jestliže lze jeden rozstříhat na konečně mnoho částí a z nich složit druhý.

Nůžková kongruence

Dva rovinné objekty jsou **nůžkově kongruentní**, jestliže lze jeden rozstříhat na konečně mnoho částí a z nich složit druhý.

Věta (Wallace–Bólyai–Borwein): Dva mnohoúhelníky jsou nůžkově kongruentní právě tehdy, když mají stejný obsah.

Nůžková kongruence

Dva rovinné objekty jsou **nůžkově kongruentní**, jestliže lze jeden rozstříhat na konečně mnoho částí a z nich složit druhý.

Věta (Wallace–Bólyai–Borwein): Dva mnohoúhelníky jsou nůžkově kongruentní právě tehdy, když mají stejný obsah.

Hilbertův **třetí** problém: *existuje 3D verze této věty?*

Nůžková kongruence

Dva rovinné objekty jsou **nůžkově kongruentní**, jestliže lze jeden rozstříhat na konečně mnoho částí a z nich složit druhý.

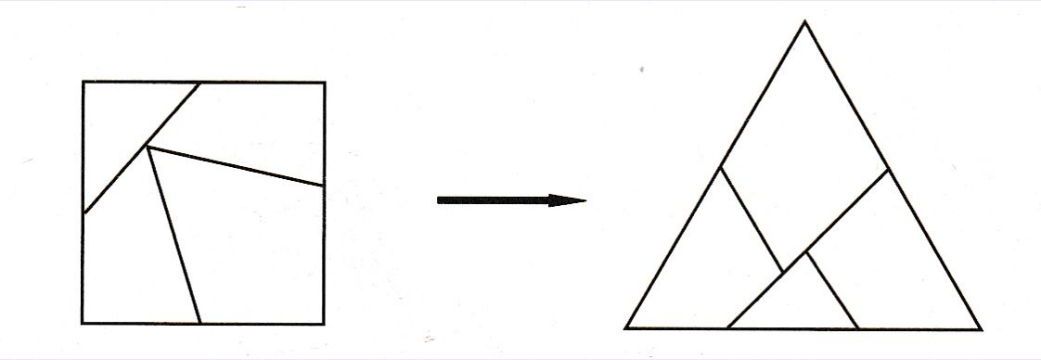
Věta (Wallace–Bólyai–Borwein): Dva mnohoúhelníky jsou nůžkově kongruentní právě tehdy, když mají stejný obsah.

Hilbertův **třetí** problém: *existuje 3D verze této věty?*

Max Dehn (1900): **NE**

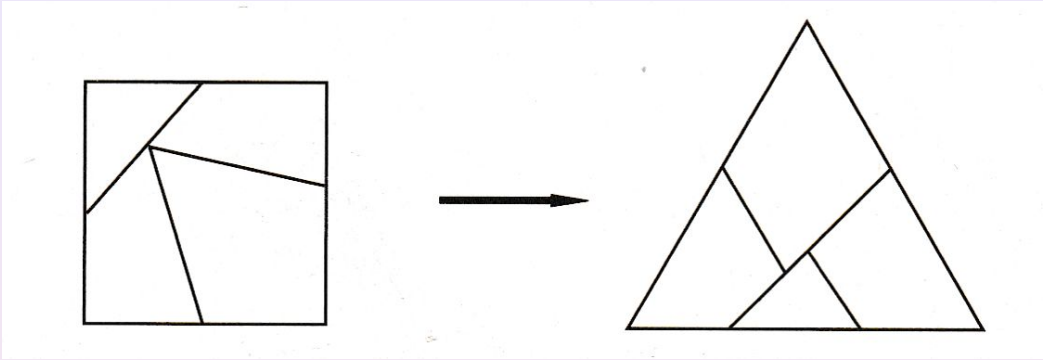
Nůžková kongruence – příklady

Nůžková kongruence – příklady



čtverec a trojúhelník

Nůžková kongruence – příklady



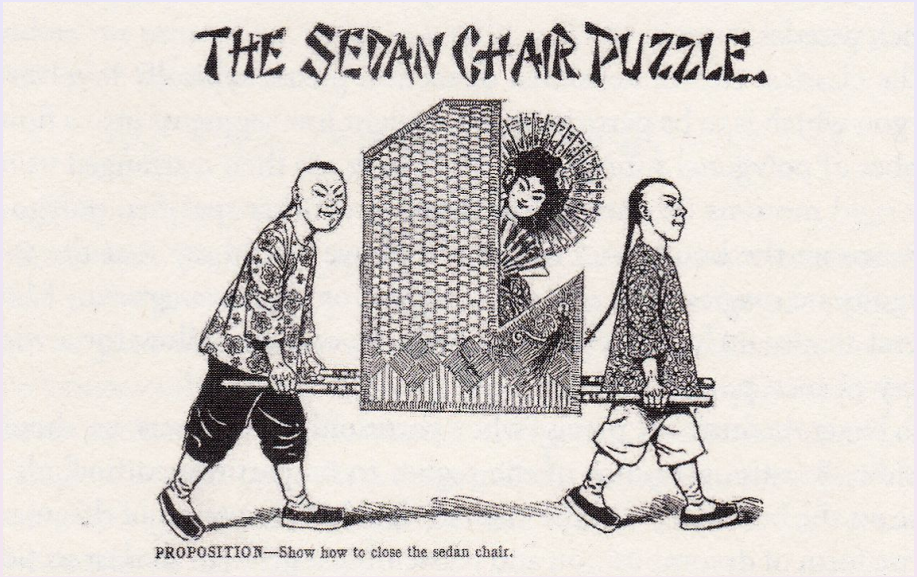
čtverec a trojúhelník



oktagon a čtverec

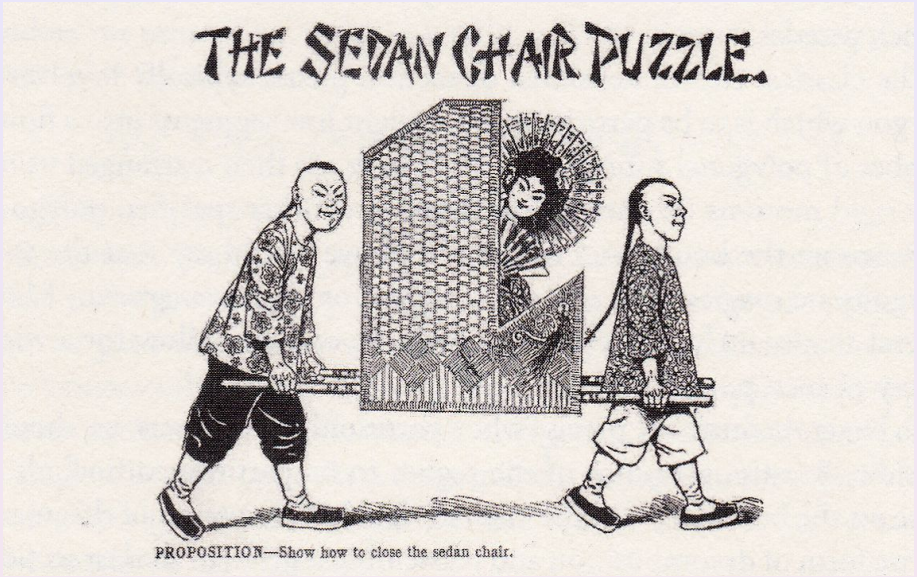
Nůžková kongruence – příklady

Nůžková kongruence – příklady



Loydova židle

Nůžková kongruence – příklady



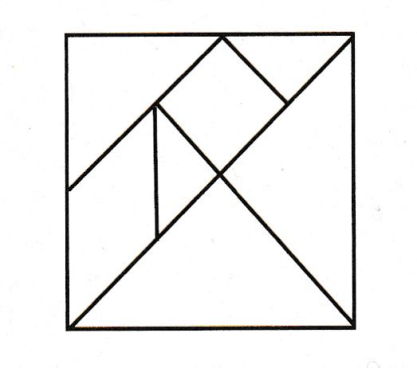
Loydova židle



Loydova židle - řešení

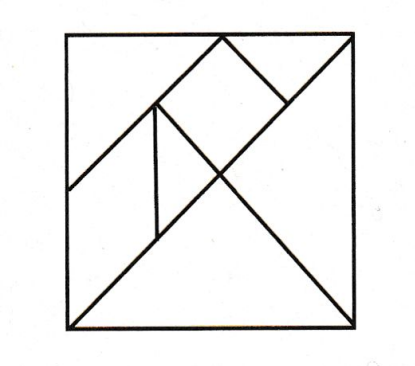
Nůžková kongruence – příklady

Nůžková kongruence – příklady

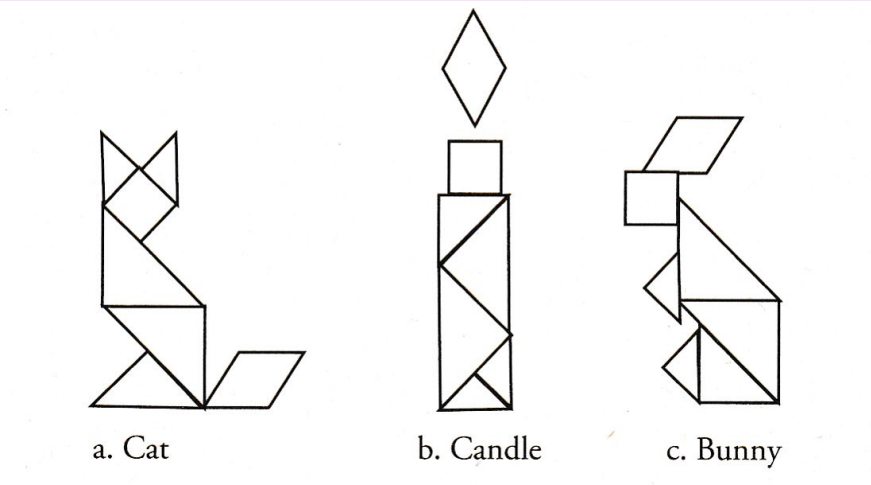


čínský tangram

Nůžková kongruence – příklady



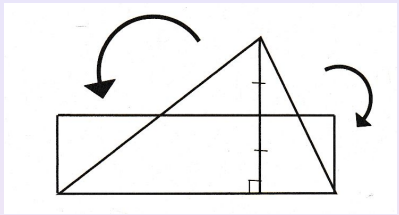
čínský tangram



tangramové figurky

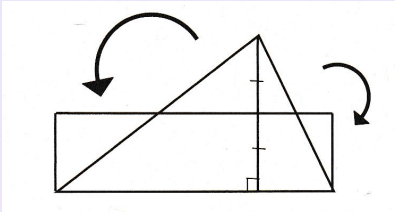
Aplikace Wallaceovy-Bolyaiovy-Gerweinovy věty

Aplikace Wallaceovy-Bolyaiovy-Gerweinovy věty

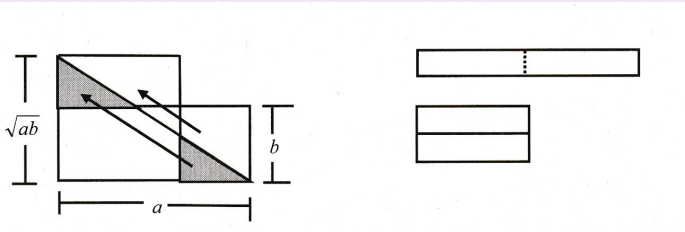


obdélník a trojúhelník

Aplikace Wallaceovy-Bolyaiovy-Gerweinovy věty

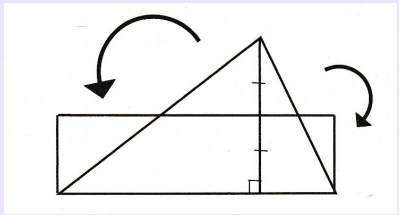


obdélník a trojúhelník

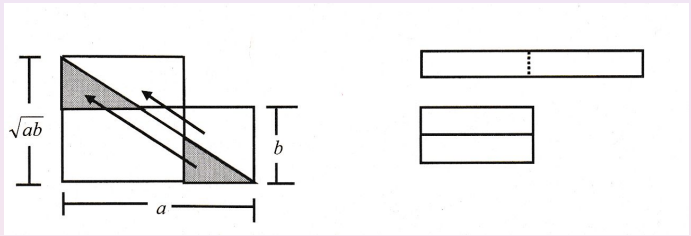


obdélník a čtverec

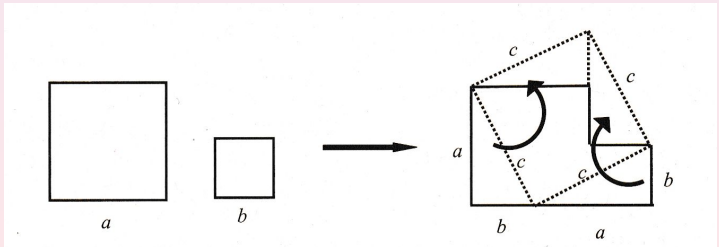
Aplikace Wallaceovy-Bolyaiovy-Gerweinovy věty



obdélník a trojúhelník



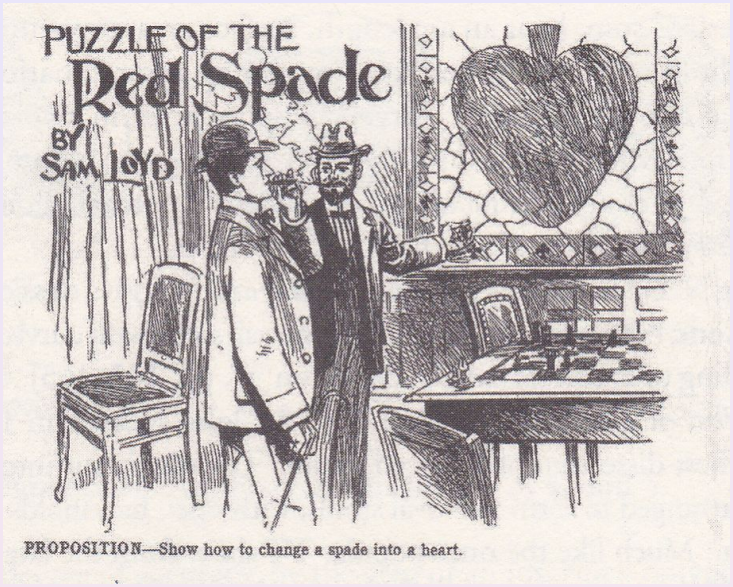
obdélník a čtverec



dva čtverce a jeden čtverec

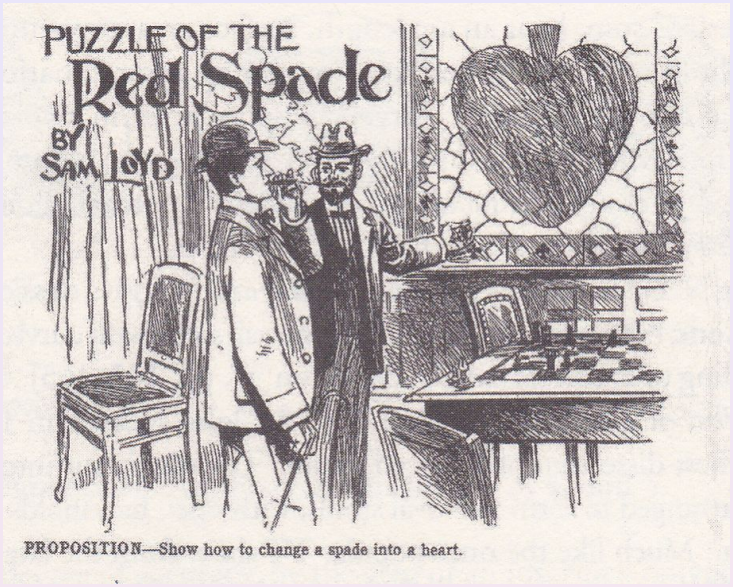
Loyd a pik

Loyd a pik

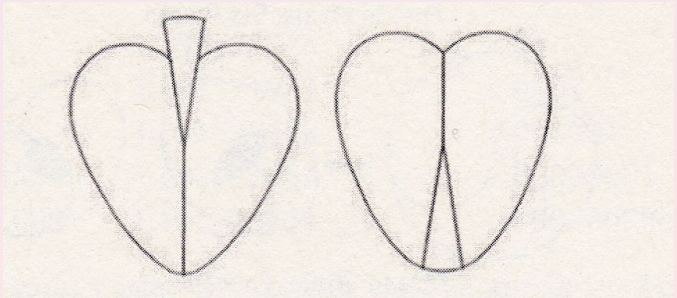


pik a srdce

Loyd a pik



pik a srdce



řešení

Úskalí nůžkové kongruence

Úskalí nůžkové kongruence

Pozor na body na okraji střihu!

Úskalí nůžkové kongruence

Pozor na body na okraji střihu!

Příklad: čtverec a trojúhelník.

Úskalí nůžkové kongruence

Pozor na body na okraji střihu!

Příklad: čtverec a trojúhelník.

Co se děje s *diagonálou*?

Úskalí nůžkové kongruence

Pozor na body na okraji střihu!

Příklad: čtverec a trojúhelník.

Co se děje s *diagonálou*?

A které body se zobrazí do místa *slepu*?

Úskalí nůžkové kongruence

Pozor na body na okraji střihu!

Příklad: čtverec a trojúhelník.

Co se děje s *diagonálou*?

A které body se zobrazí do místa *slepu*?

Čtverec a trojúhelník *nejsou kongruentní*.

Úskalí nůžkové kongruence

Pozor na body na okraji střihu!

Příklad: čtverec a trojúhelník.

Co se děje s *diagonálou*?

A které body se zobrazí do místa *slepu*?

Čtverec a trojúhelník *nejsou kongruentní*.

Jsou však **kongruentní po částech**.

Kongruence po částech

Kongruence po částech

Dva objekty jsou **kongruentní po částech**, lze-li jeden rozložit na sjednocení konečně mnoha částí a z množin jim kongruentních sestavit druhý.

Kongruence po částech – příklady

Kongruence po částech – příklady

- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní

Kongruence po částech – příklady

- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{2, 4, 6, \dots\}$ *nejsou* kongruentní

Kongruence po částech – příklady

- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{2, 4, 6, \dots\}$ *nejsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{1, 2, 3\} \cup \{5, 6, 7 \dots\}$

nejsou kongruentní, ale jsou kongruentní po částech,

Kongruence po částech – příklady

- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{2, 4, 6, \dots\}$ *nejsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{1, 2, 3\} \cup \{5, 6, 7 \dots\}$

nejsou kongruentní, ale jsou kongruentní po částech,

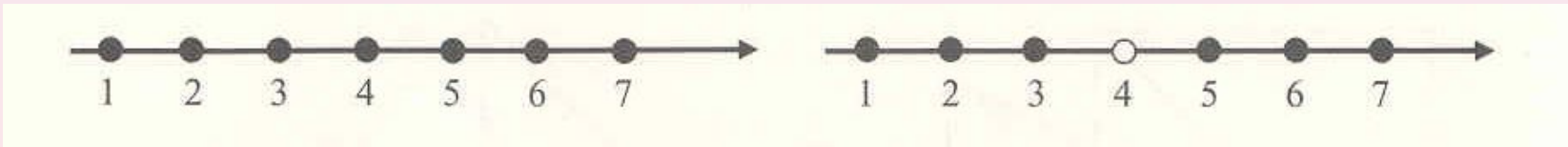
protože množina $\{5, 6, 7 \dots\}$ je kongruentní množině $\{4, 5, 6, 7 \dots\}$.

Kongruence po částech – příklady

- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{4, 5, 6, \dots\}$ *jsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{2, 4, 6, \dots\}$ *nejsou* kongruentní
- $\{1, 2, 3, \dots\}$ a $\{1, 2, 3\} \cup \{5, 6, 7 \dots\}$

nejsou kongruentní, ale jsou kongruentní po částech,

protože množina $\{5, 6, 7 \dots\}$ je kongruentní množině $\{4, 5, 6, 7 \dots\}$.



Kruhatura čtverce

Kruhatura čtverce

1925 Alfred Tarski: *circle-squaring problem*

Kruhatura čtverce

1925 Alfred Tarski: *circle-squaring problem*

je kruh (nůžkově) kongruentní čtverci?

Kruhatura čtverce

1925 Alfred Tarski: *circle-squaring problem*

je kruh (nůžkově) kongruentní čtverci?

1963 Dubins, Hirsch, Karush: nůžkově ne

Kruhatura čtverce

1925 Alfred Tarski: *circle-squaring problem*

je kruh (nůžkově) kongruentní čtverci?

1963 Dubins, Hirsch, Karush: nůžkově ne

1990 Laczkovich: kongruentní ano!

Kruhatura čtverce

Kruhatura čtverce

Laczkovich použil axiom výběru (takže části nejdou přesně definovány)

Kruhatura čtverce

Laczkovich použil axiom výběru (takže části nejdou přesně definovány)

počet dílků: asi 10^{50}

Kruhatura čtverce

Laczkovich použil axiom výběru (takže části nejdou přesně definovány)

počet dílků: asi 10^{50}

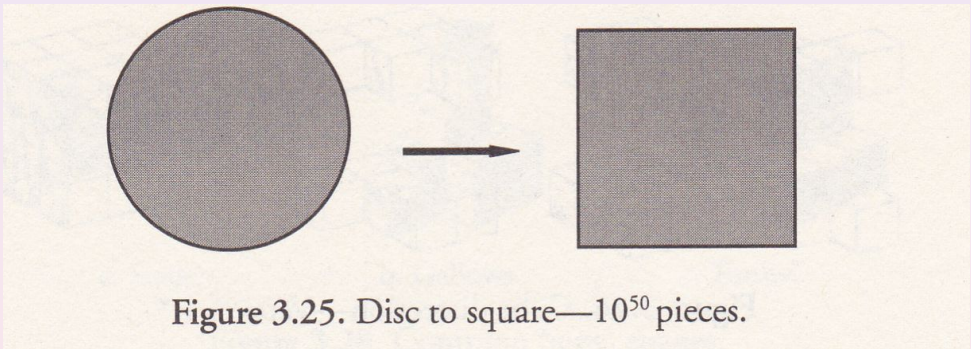


Figure 3.25. Disc to square—10^{50} pieces.

Kruhatura čtverce

Laczkovich použil axiom výběru (takže části nejdou přesně definovány)

počet dílků: asi 10^{50}

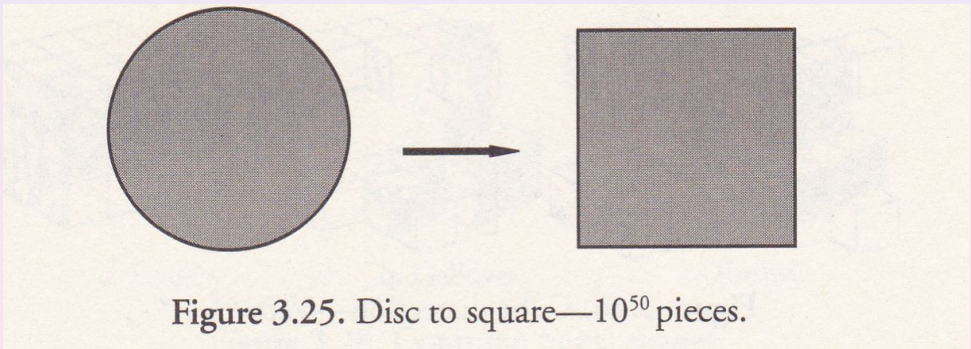


Figure 3.25. Disc to square—10^{50} pieces.

Pozor! Neplést kruhaturu čtverce (circle-squaring problem) s kvadraturou kruhu (squaring of the circle)!

Krychlopitva

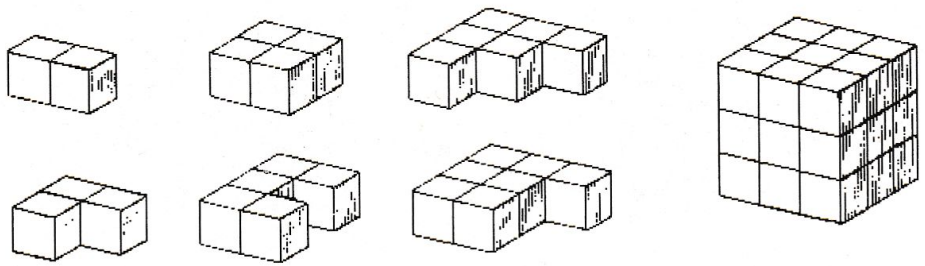


Figure 3.26. Cube dissection—Version 1.*

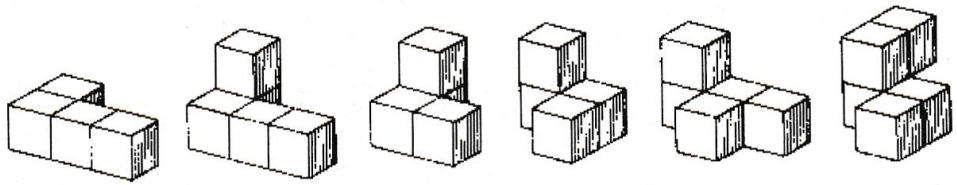


Figure 3.27. Cube dissection—Version 2.*

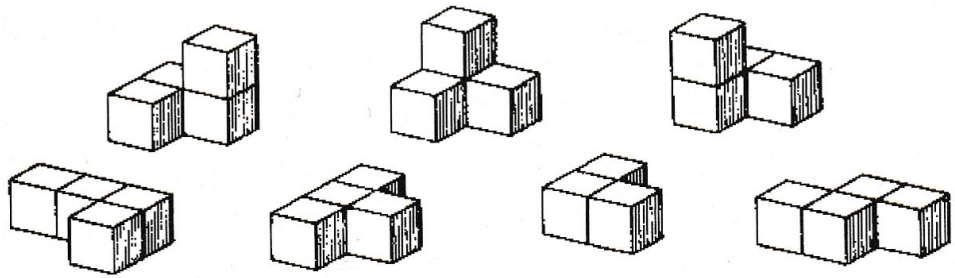
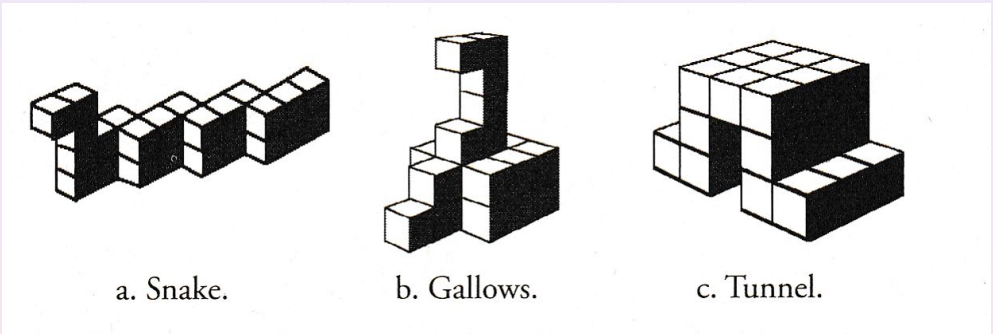


Figure 3.28. Cube dissection—Version 3.*

tři verse krychlopitvy

Soma krychle

Soma krychle



nejběžnější objekty Soma

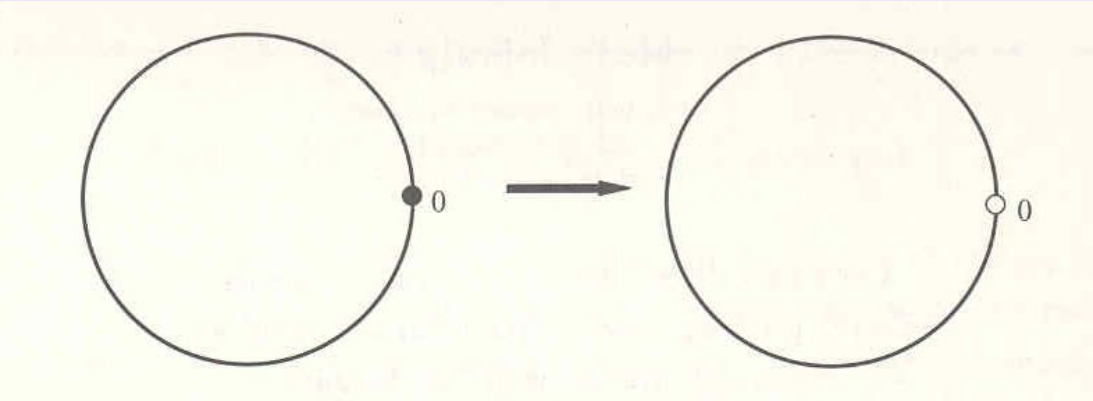
Posun z/do nekonečna

Posun z/do nekonečna

Kružnice je po částech kongruentní kružnici bez bodu.

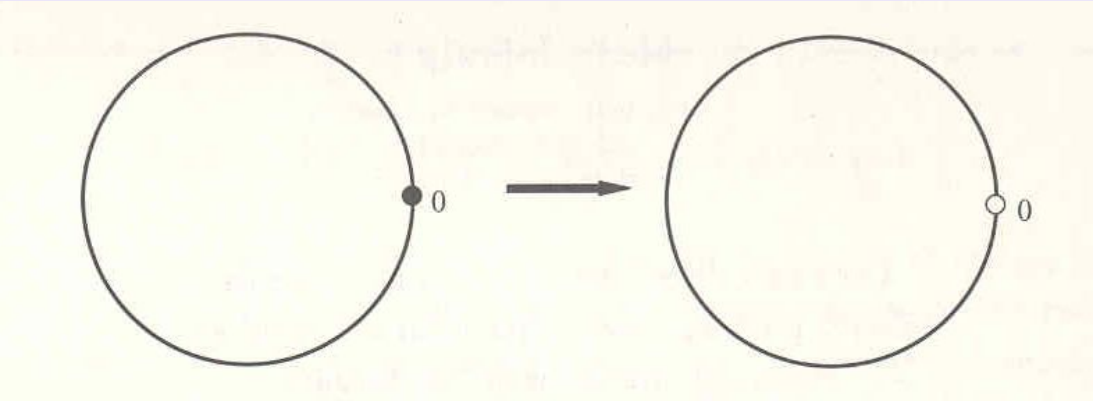
Posun z/do nekonečna

Kružnice je po částech kongruentní kružnici bez bodu.



Posun z/do nekonečna

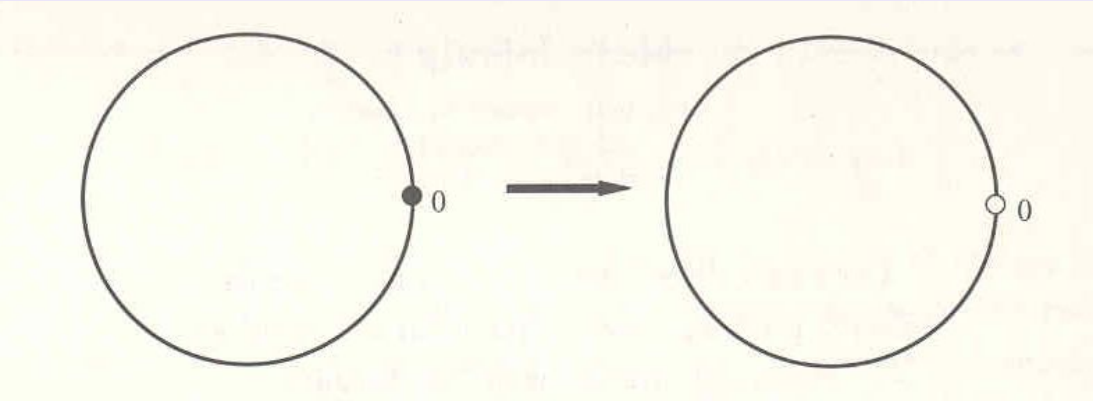
Kružnice je po částech kongruentní kružnici bez bodu.



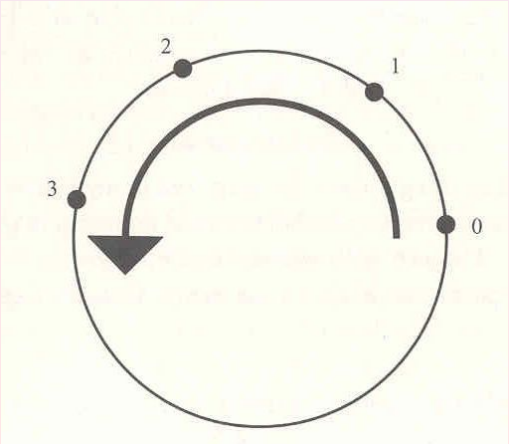
Myšlenka:

Posun z/do nekonečna

Kružnice je po částech kongruentní kružnici bez bodu.



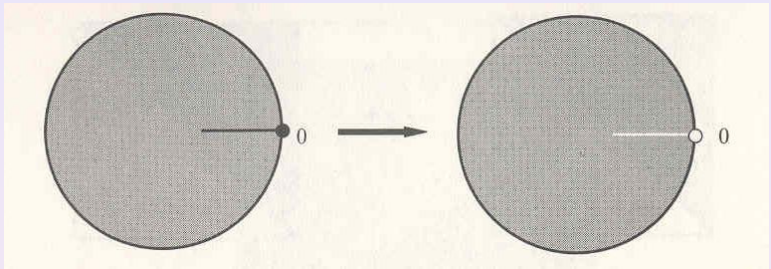
Myšlenka:



Obdoba pro kruh bez poloměru

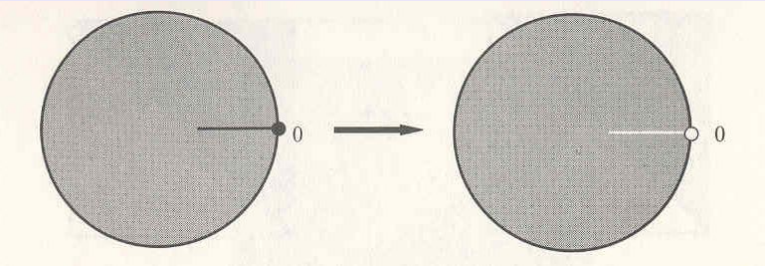
Obdoba pro kruh bez poloměru

Kruh je po částech kongruentní kruhu bez ploměru.



Obdoba pro kruh bez poloměru

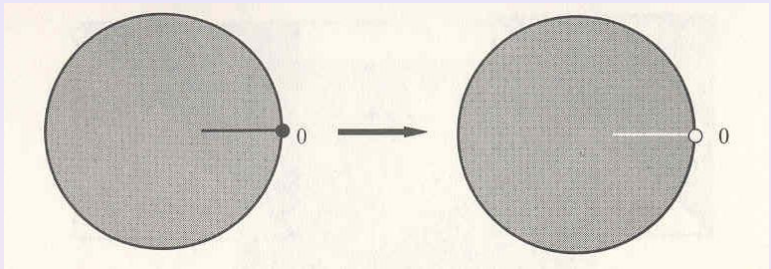
Kruh je po částech kongruentní kruhu bez ploměru.



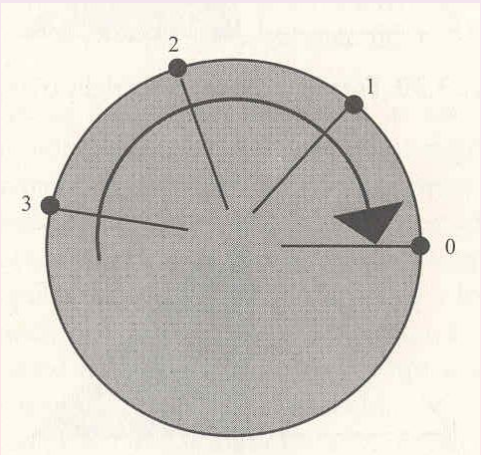
Myšlenka:

Obdoba pro kruh bez poloměru

Kruh je po částech kongruentní kruhu bez ploměru.



Myšlenka:



Hilbertův hotel

Hilbertův hotel

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

Hilbertův hotel

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Hilbertův hotel

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Přijíždí nový turista.

Hilbertův hotel

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Přijíždí nový turista.

Hilbert posune všechny hosty do pokoje *s číslem o jedničku vyšším*.

Hilbertův hotel

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Přijíždí nový turista.

Hilbert posune všechny hosty do pokoje *s číslem o jedničku vyšším*.

Přijíždí autobus s *nekonečně mnoha turisty*.

Hilbertův hotel

Hilbertův hotel má *nekonečně* mnoho pokojů

a všechny jsou obsazené.

Přijíždí nový turista.

Hilbert posune všechny hosty do pokoje *s číslem o jedničku vyšším*.

Přijíždí autobus s *nekonečně mnoha turisty*.

Hilbert posune každého hosta do pokoje s *dvojnásobným číslem*.

Hotel Infinity

Hotel Infinity

Copyright Lawrence M. Lesser
All rights reserved
Reprinted with permission

On a dark desert highway – not much scenery
Except this long hotel stretchin' far as I could see.
Neon sign in front read "No Vacancy,"
But it was late and I was tired, so I went inside to plea.

The clerk said, "No problem. Here's what can be done—
We'll move those in a room to the next higher one.
That will free up the first room and that's where you can stay."
I tried understanding that as I heard him say:

CHORUS: "Welcome to the HOTEL INFINITY—
Where every room is full (every room is full)
Yet there's room for more.
Yeah, plenty of room at the HOTEL INFINITY—
Move 'em down the floor (move 'em down the floor)
To make room for more."

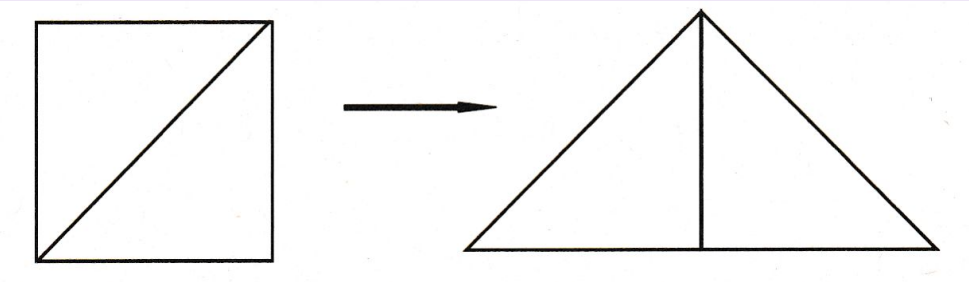
I'd just gotten settled, I'd finally unpacked
When I saw 8 more cars pull into the back.
I had to move to room 9; others moved up 8 rooms as well.
Never more will I confuse a Hilton with a Hilbert Hotel!

My mind got more twisted when I saw a bus without end
With an infinite number of riders coming up to check in.
"Relax," said the nightman. "Here's what we'll do:
Move to the double of your room number: that frees the
odd-numbered rooms."

(Repeat Chorus)

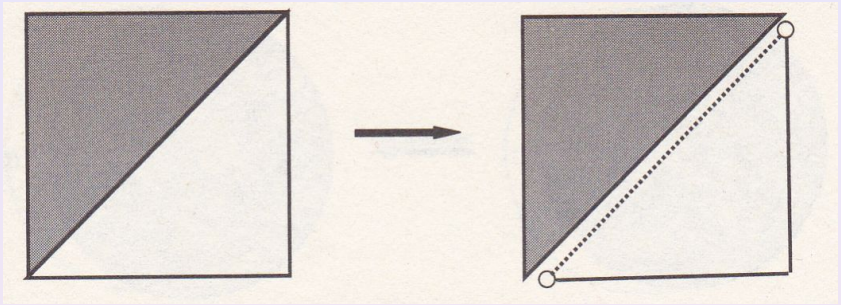
Last thing I remember at the end of my stay—
It was time to pay the bill but I had no means to pay.
The man in 19 smiled, "Your bill is on me.
20 pays mine, and so on, so you get yours for free!"

Jsou trojúhelník a čtverec po částech kongruentní?



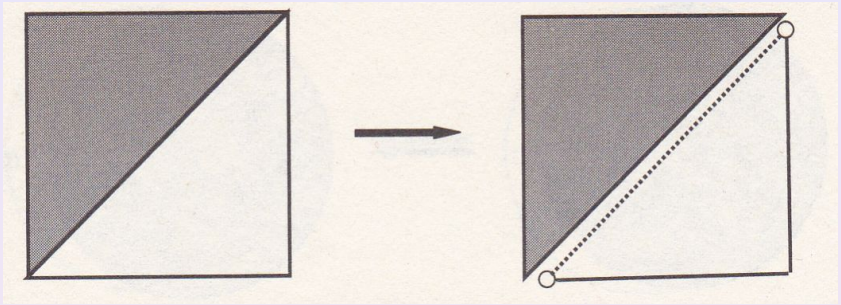
dvě potíže: diagonála a šev

Jsou trojúhelník a čtverec po částech kongruentní?

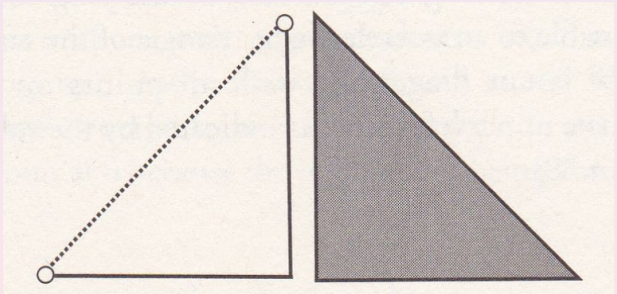


Asi nám bude chybět diagonála.

Jsou trojúhelník a čtverec po částech kongruentní?

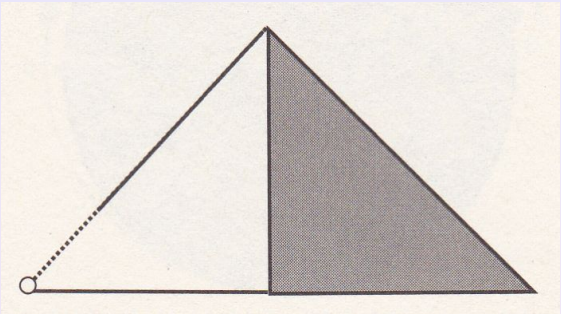


Asi nám bude chybět diagonála.



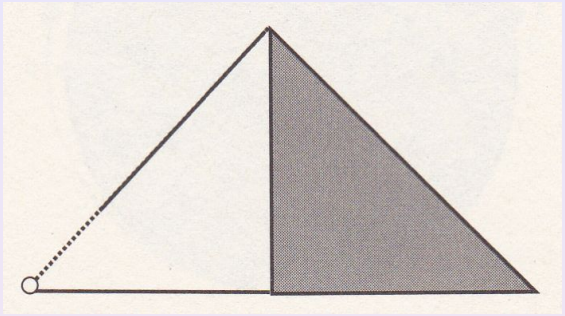
Chybí nám diagonála. Ale přebývá nám výška.

Jsou trojúhelník a čtverec po částech kongruentní?

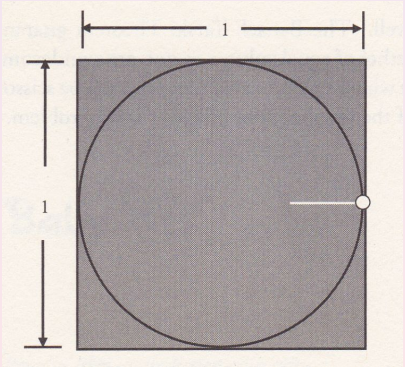


Chabý pokus o nápravu (tzv. skorotrojúhelník).

Jsou trojúhelník a čtverec po částech kongruentní?



Chabý pokus o nápravu (tzv. skorotrojúhelník).



Zachráníme to posunem z nekonečna!

Předchůdci Banachova–Tarského paradoxu

Vitaliova konstrukce neměřitelných množin:

Vitaliova konstrukce neměřitelných množin:

Čísla a a b jsou *ekvivalentní*, je-li jejich rozdíl *racionální*.

Vitaliova konstrukce neměřitelných množin:

Čísla a a b jsou *ekvivalentní*, je-li jejich rozdíl *racionální*.

$[0, 1]$ se rozpadne na *třídy ekvivalence*.

Vitaliova konstrukce neměřitelných množin:

Čísla a a b jsou *ekvivalentní*, je-li jejich rozdíl *racionální*.

$[0, 1]$ se rozpadne na *třídy ekvivalence*.

Axiom výběru: sestrojíme *výběrovou množinu* M.

Vitaliova konstrukce neměřitelných množin:

Čísla a a b jsou *ekvivalentní*, je-li jejich rozdíl *racionální*.

$[0, 1]$ se rozpadne na *třídy ekvivalence*.

Axiom výběru: sestrojíme *výběrovou množinu* M.

Pro $q \in \mathbb{Q}$ definujeme $M_q := \{x + q;\ x \in M\}$.

Vitaliova konstrukce neměřitelných množin:

Čísla a a b jsou *ekvivalentní*, je-li jejich rozdíl *racionální*.

$[0,1]$ se rozpadne na *třídy ekvivalence*.

Axiom výběru: sestrojíme *výběrovou množinu* M.

Pro $q \in \mathbb{Q}$ definujeme $M_q := \{x + q;\ x \in M\}$.

Pak $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} M_q$.

Předchůdci Banachova–Tarského paradoxu

Vitaliova konstrukce neměřitelných množin:

Čísla a a b jsou *ekvivalentní*, je-li jejich rozdíl *racionální*.

$[0, 1]$ se rozpadne na *třídy ekvivalence*.

Axiom výběru: sestrojíme *výběrovou množinu* M.

Pro $q \in \mathbb{Q}$ definujeme $M_q := \{x + q;\ x \in M\}$.

Pak $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} M_q$.

Tedy M **nemůže být měřitelná**.

Superslovník Hyperwebster

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: *A, AA, AAA, AAAA, . . .*

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: *A, AA, AAA, AAAA, . . .*

Po nekonečně mnoha výrazech: *AB, ABA, ABAA, . . .*

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: *A, AA, AAA, AAAA, . . .*

Po nekonečně mnoha výrazech: *AB, ABA, ABAA, . . .*

Není to sice **výkladový** slovník, ale definice a poučky v něm budou (bohužel platné i neplatné):

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: *A, AA, AAA, AAAA, . . .*

Po nekonečně mnoha výrazech: *AB, ABA, ABAA, . . .*

Není to sice **výkladový** slovník, ale definice a poučky v něm budou (bohužel platné i neplatné):

PREDSEDA-VLADY-JE-HOVADO

Superslovník Hyperwebster

Všechny výrazy, které lze formulovat z 26 písmen anglické abecedy.

Začíná: *A, AA, AAA, AAAA, . . .*

Po nekonečně mnoha výrazech: *AB, ABA, ABAA, . . .*

Není to sice **výkladový** slovník, ale definice a poučky v něm budou (bohužel platné i neplatné):

PREDSEDA-VLADY-JE-HOVADO

PREDSEDA-VLADY-NENI-HOVADO

Vydání Hyperwebsteru

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Pak škrtne zbytečné první písmenko.

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Pak škrtne zbytečné první písmenko.

Pak zjistí, že jsou všechny díly stejné, takže vydá jen díl A.

Vydání Hyperwebsteru

Vydavatel se rozhodne vydat slovník ve 26 dílech:

Díl A: A, AA, AAA, . . . , AB, ABA, . . . , ABB,
Díl B: B, BA, BAA, . . . , BB, BBA, . . . , BBB,
Díl C: C, CA, CAA, . . . , CB, CBA, . . . , CBB,
⋮
Díl Z: Z, ZA, ZAA, . . . , ZB, ZBA, . . . , ZBB,

Pak škrtne zbytečné první písmenko.

Pak zjistí, že jsou všechny díly stejné, takže vydá jen díl A.

A změní jeho název na **Hyperwebster**.

Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox

Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox

Wacław Sierpiński: *Lze rozložit nějakou množinu E na disjunktní sjednocení dvou množin E_1 a E_2 tak, aby každá z nich byla kongruentní původní množině?*

Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox

Wacław Sierpiński: *Lze rozložit nějakou množinu E na disjunktní sjednocení dvou množin E_1 a E_2 tak, aby každá z nich byla kongruentní původní množině?*

S. Mazurkiewicz: **ANO**

Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox

Wacław Sierpiński: *Lze rozložit nějakou množinu E na disjunktní sjednocení dvou množin E_1 a E_2 tak, aby každá z nich byla kongruentní původní množině?*

S. Mazurkiewicz: **ANO**

Odbydeme obrázkem.

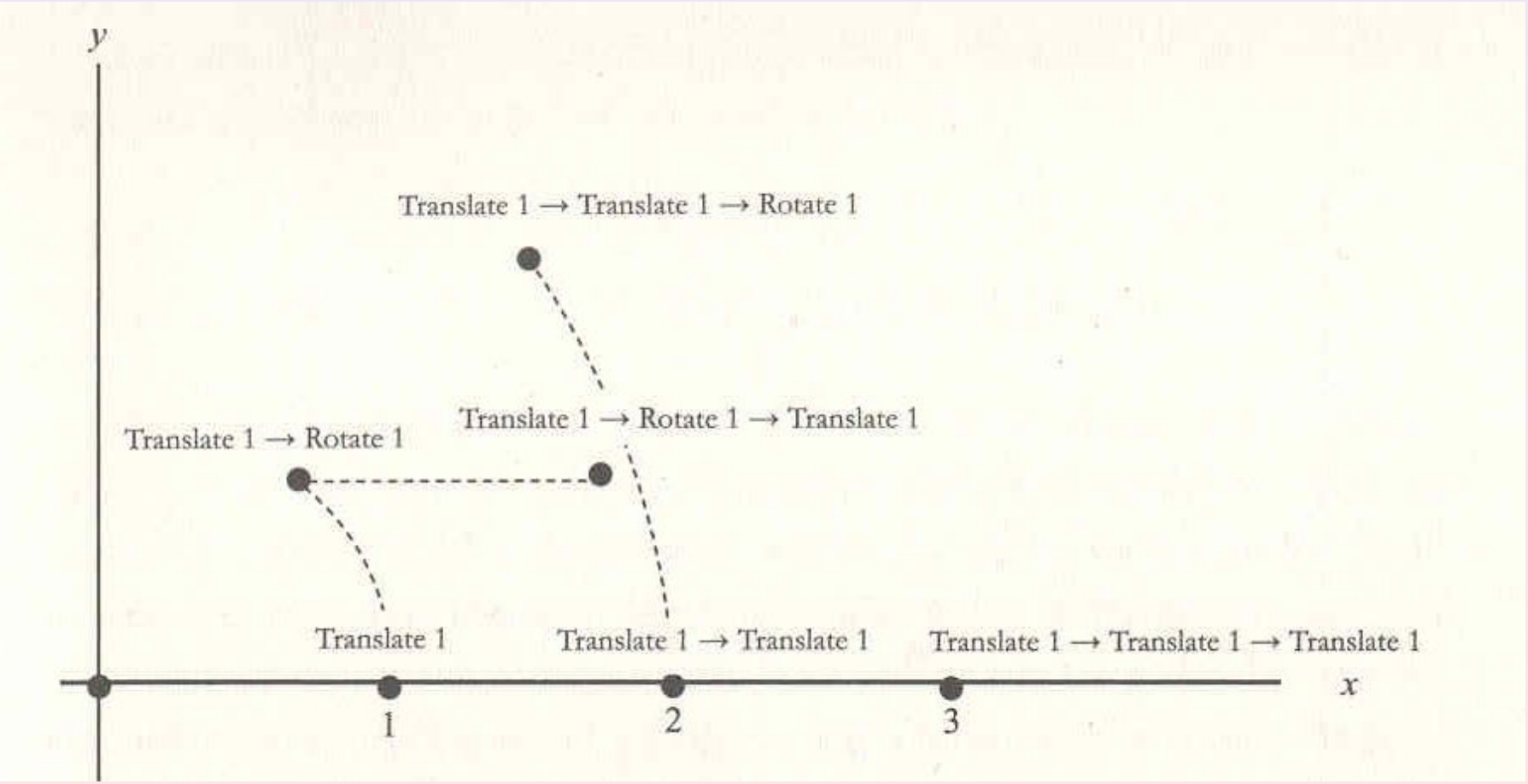
Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox - obrázek

Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox - obrázek

Množina E:

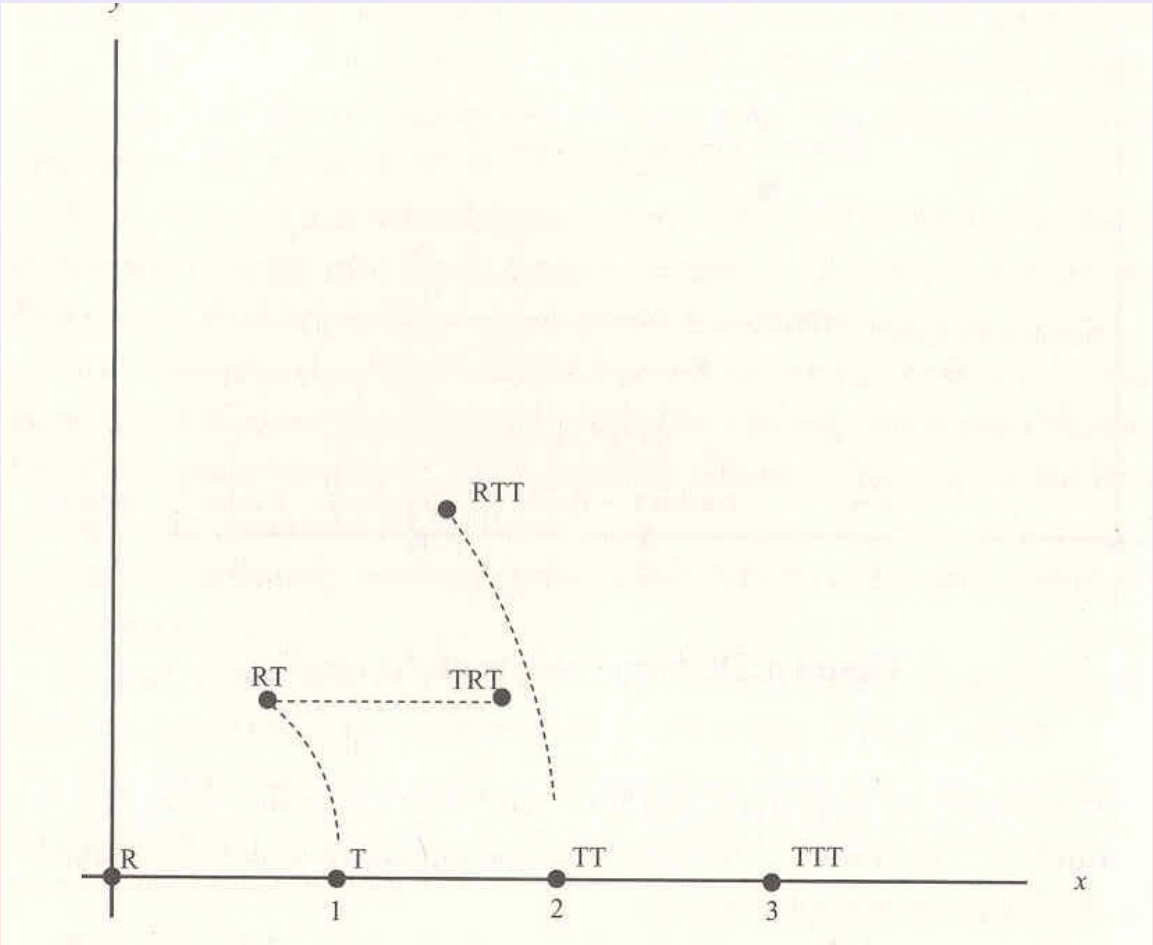
Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox - obrázek

Množina E:



Souvislost s Hyperwebsterem

Souvislost s Hyperwebsterem



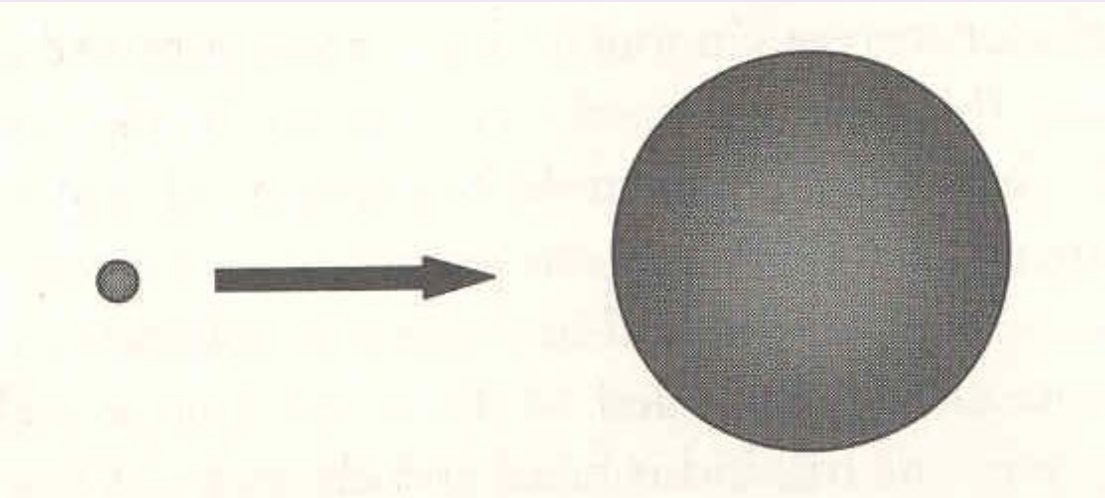
Banachova–Tarského věta - formulace

Banachova–Tarského věta - formulace

Každé dvě množiny v 3D s neprázdnými vnitřky jsou po částech kongruentní.

Banachova–Tarského věta - formulace

Každé dvě množiny v 3D s neprázdnými vnitřky jsou po částech kongruentní.



Důkaz Banachovy–Tarského věty

Důkaz Banachovy–Tarského věty

Osnova důkazu:

Důkaz Banachovy–Tarského věty

Osnova důkazu:

- 1. **krok:** *grupa rotací na sféře*

Důkaz Banachovy–Tarského věty

Osnova důkazu:

- **1. krok:** *grupa rotací na sféře*
- **2. krok:** *rozklad sféry na množiny, splňující Hausdorffův paradox*

Důkaz Banachovy–Tarského věty

Osnova důkazu:

- **1. krok:** *grupa rotací na sféře*
- **2. krok:** *rozklad sféry na množiny, splňující Hausdorffův paradox*
- **3. krok:** *povinné ztloustnutí (mentální antianorexie)*

Rotace

Rotace

rotací kolem osy v 3D nazýváme *rigidní pohyb všech bodů tělesa po stejné kruhové dráze*

Rotace

rotací kolem osy v 3D nazýváme *rigidní pohyb všech bodů tělesa po stejné kruhové dráze*

veškeré **distorze** jsou zakázány

Dvě základní rotace

Dvě základní rotace

τ ... *rotace o* 120° *kolem osy* z *po směru hodinových ručiček*

Dvě základní rotace

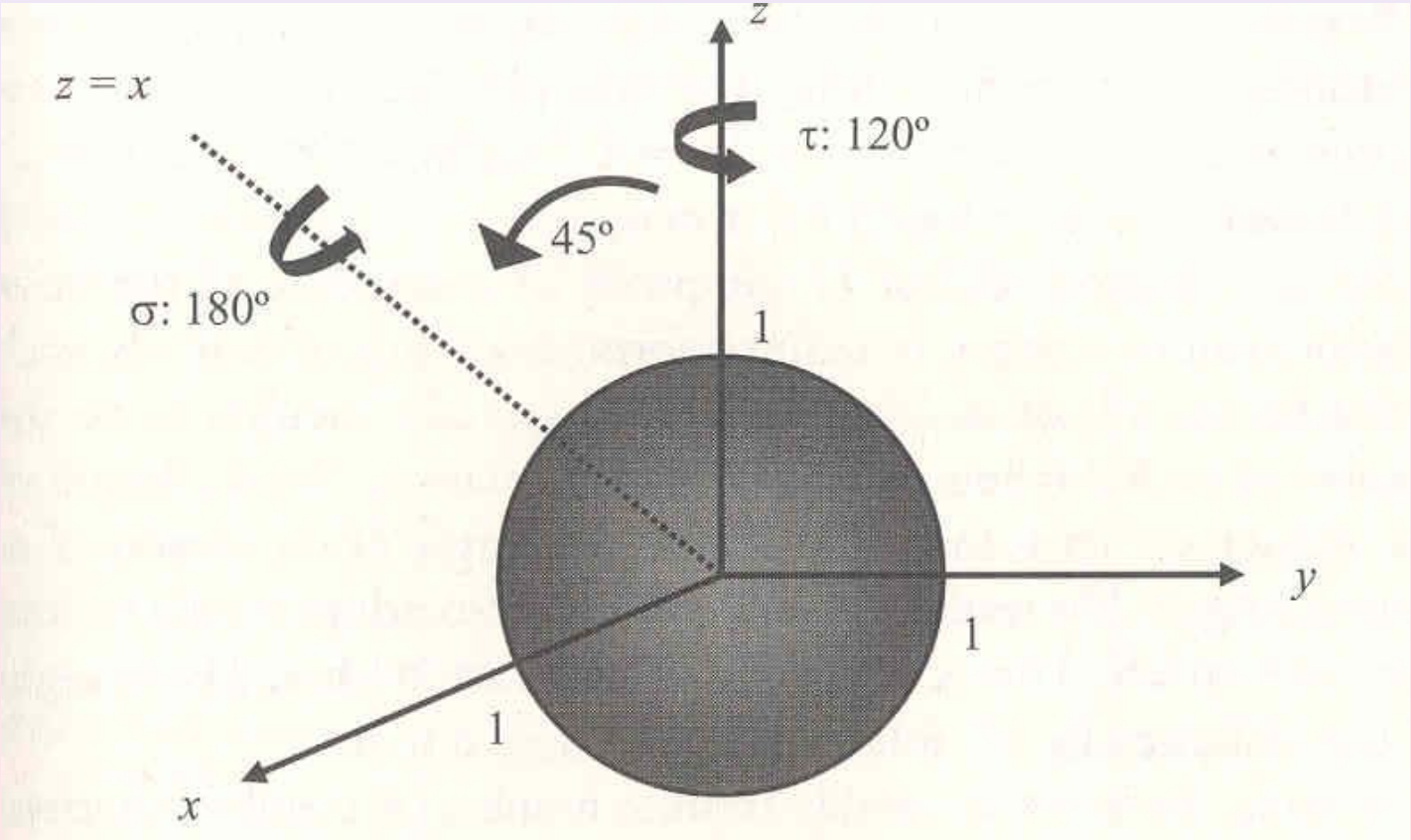
τ ... *rotace o* 120° *kolem osy* z *po směru hodinových ručiček*

σ ... *rotace o* 180° *kolem osy* $z = x$ *po směru hodinových ručiček*

Dvě základní rotace

τ ... *rotace o* 120° *kolem osy* z *po směru hodinových ručiček*

σ ... *rotace o* 180° *kolem osy* $z = x$ *po směru hodinových ručiček*



Kombinace rotací

Kombinace rotací

Uvažujeme všechny možné **kombinace** základních rotací.

Kombinace rotací

Uvažujeme všechny možné **kombinace** základních rotací.

Příklady:

Kombinace rotací

Uvažujeme všechny možné **kombinace** základních rotací.

Příklady:

- $\tau\tau = \tau^2$ ... *rotace o* $240°$ *kolem osy* z *po směru hodinových ručiček*

Kombinace rotací

Uvažujeme všechny možné **kombinace** základních rotací.

Příklady:

- $\tau\tau = \tau^2$ ... *rotace o* $240°$ *kolem osy* z *po směru hodinových ručiček*

- $\sigma\sigma = \sigma^2$ ... *rotace o* $360°$ *kolem osy* $z = x$ *po směru hodinových ručiček*

Kombinace rotací

Uvažujeme všechny možné **kombinace** základních rotací.

Příklady:

- $\tau\tau = \tau^2$ ... *rotace o* $240°$ *kolem osy* z *po směru hodinových ručiček*

- $\sigma\sigma = \sigma^2$ ... *rotace o* $360°$ *kolem osy* $z = x$ *po směru hodinových ručiček*

tj. **nestane se nic**

Vztahy mezi rotacemi

Vztahy mezi rotacemi

Identickou rotací I nazýváme rotaci, při níž se poloha bodů nemění.

Vztahy mezi rotacemi

Identickou rotací I nazýváme rotaci, při níž se poloha bodů nemění.

Příklady vztahů:

Vztahy mezi rotacemi

Identickou rotací I nazýváme rotaci, při níž se poloha bodů nemění.

Příklady vztahů:

$$I\sigma = \sigma I = \sigma, \quad I\tau = \tau I = \tau$$
$$\sigma^2 = \tau^3 = I$$
$$\tau^7 = \tau^3\tau^3\tau = II\tau = \tau$$
$$\tau^4\sigma^3\tau^2 = \tau^3\tau\sigma^2\sigma\tau^2 = I\tau I\sigma\tau = \tau\sigma\tau^2.$$

Vztahy mezi rotacemi

Identickou rotací I nazýváme rotaci, při níž se poloha bodů nemění.

Příklady vztahů:

$$I\sigma = \sigma I = \sigma, \quad I\tau = \tau I = \tau$$
$$\sigma^2 = \tau^3 = I$$
$$\tau^7 = \tau^3\tau^3\tau = II\tau = \tau$$
$$\tau^4\sigma^3\tau^2 = \tau^3\tau\sigma^2\sigma\tau^2 = I\tau I\sigma\tau = \tau\sigma\tau^2.$$

Pozorování: *Každá rotace je složením konečné posloupnosti základních rotací τ, τ^2, σ.*

Délka rotace

Délka rotace

Délkou rotace nazýváme počet symbolů v definici rotace v základním tvaru.

Délka rotace

Délkou rotace nazýváme počet symbolů v definici rotace v základním tvaru.

Příklady

Délka rotace

Délkou rotace nazýváme počet symbolů v definici rotace v základním tvaru.

Příklady

- I má délku 0;

Délka rotace

Délkou rotace nazýváme počet symbolů v definici rotace v základním tvaru.

Příklady

- I má délku 0;
- $\sigma\tau^2\sigma\tau$ má délku 4.

Grupa rotací

Grupa rotací

množinu všech rotací na sféře označíme G

Grupa rotací

množinu všech rotací na sféře označíme G

Potom platí:

Grupa rotací

množinu všech rotací na sféře označíme G

Potom platí:

- G je **grupa**

Grupa rotací

množinu všech rotací na sféře označíme G

Potom platí:

- G je **grupa**
- *Každá rotace z G má jednoznačnou reprezentaci v základním tvaru.*

Rozklad grupy G

Rozklad grupy G

Grupu G rozložíme na tři části:

Rozklad grupy G

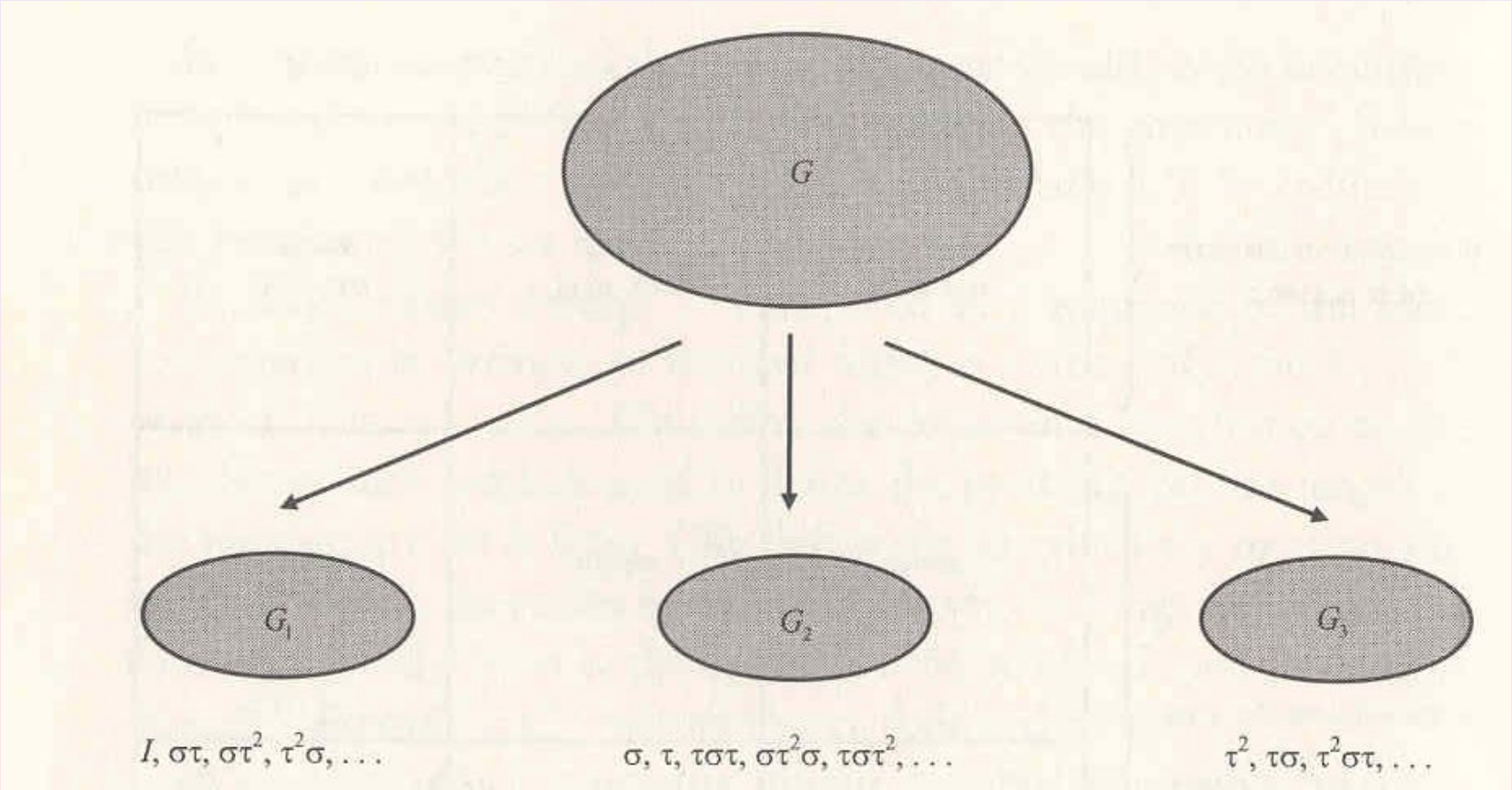
Grupu G rozložíme na tři části:

$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$$

Rozklad grupy G

Grupu G rozložíme na tři části:

$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$$



Algoritmus rozkladu

Algoritmus rozkladu

	If $\alpha \in G_1$	If $\alpha \in G_2$	If $\alpha \in G_3$
If the leftmost character of α is τ or τ^2	assign $\sigma\alpha$ to G_2	assign $\sigma\alpha$ to G_1	assign $\sigma\alpha$ to G_1
If the leftmost character of α is σ	assign $\tau\alpha$ to G_2	assign $\tau\alpha$ to G_3	assign $\tau\alpha$ to G_1
	assign $\tau^2\alpha$ to G_3	assign $\tau^2\alpha$ to G_1	assign $\tau^2\alpha$ to G_2

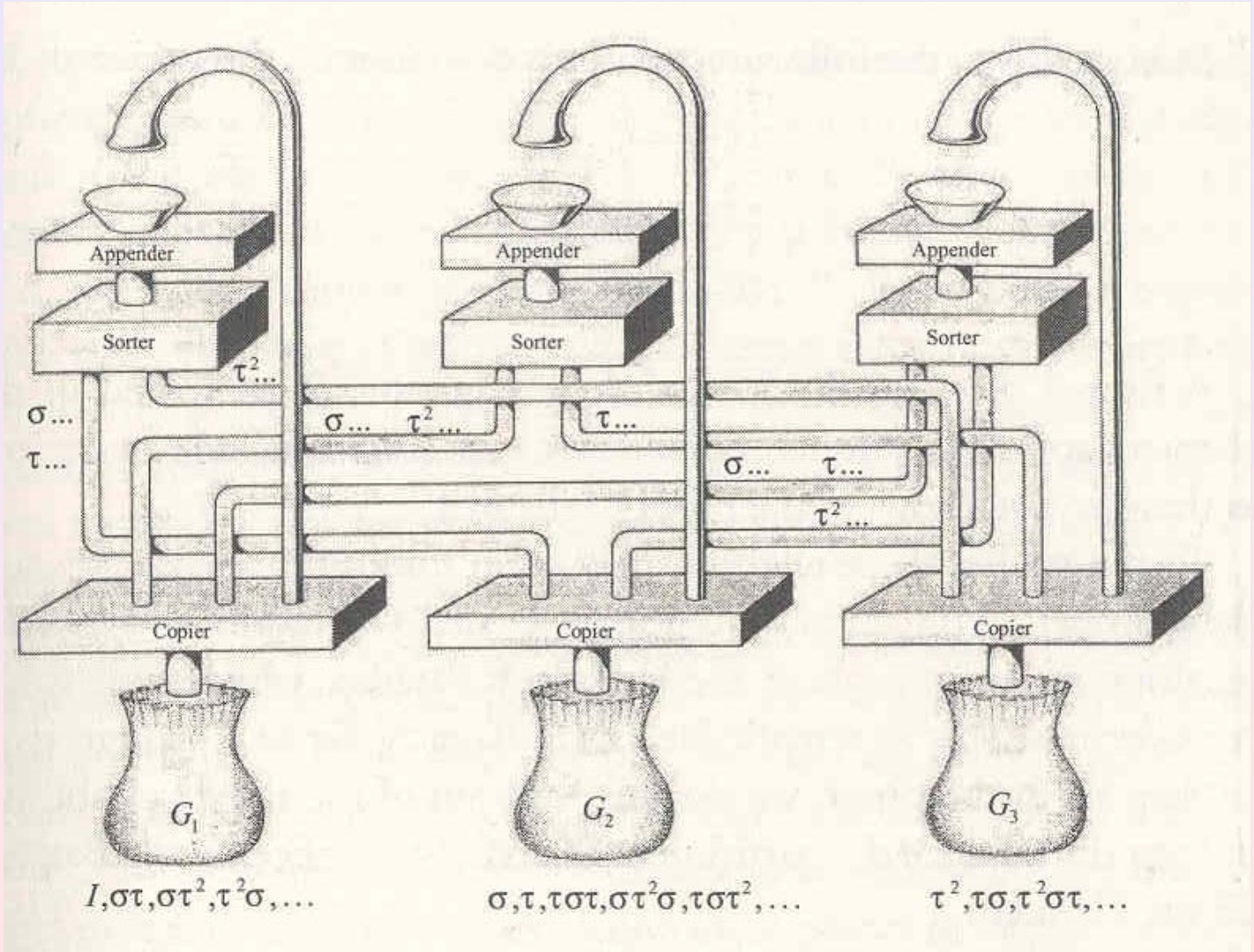
Ilustrace rozkladu

Ilustrace rozkladu

Stroj Roberta Frenche:

Ilustrace rozkladu

Stroj Roberta Frenche:



Vztahy mezi třídami

Vztahy mezi třídami

Pozorování: *provedeme-li τ na rotaci z G_1, dostaneme rotaci z G_2.*

Vztahy mezi třídami

Pozorování: *provedeme-li τ na rotaci z G_1, dostaneme rotaci z G_2.*

Platí to ale i naopak!

Vztahy mezi třídami

Pozorování: *provedeme-li τ na rotaci z G_1, dostaneme rotaci z G_2.*

Platí to ale i naopak!

Každá rotace v G_2 je tohoto tvaru.

Vztahy mezi třídami

Pozorování: *provedeme-li τ na rotaci z G_1, dostaneme rotaci z G_2.*

Platí to ale i naopak!

Každá rotace v G_2 je tohoto tvaru.

Tento fakt zapíšeme ve formě identity

Vztahy mezi třídami

Pozorování: *provedeme-li τ na rotaci z G_1, dostaneme rotaci z G_2.*

Platí to ale i naopak!

Každá rotace v G_2 je tohoto tvaru.

Tento fakt zapíšeme ve formě identity

$$\tau\, G_1 = G_2.$$

Vztahy mezi třídami – souhrn

Vztahy mezi třídami – souhrn

Obdobně dostaneme další vztahy.

Vztahy mezi třídami – souhrn

Obdobně dostaneme další vztahy.

$$\tau\, G_1 = G_2$$
$$\tau^2\, G_1 = G_3$$
$$\sigma\, G_1 = G_2 \cup G_3.$$

Druhý krok – rozklad sféry

Druhý krok – rozklad sféry

Každá rotace má dva **póly**.

Druhý krok – rozklad sféry

Každá rotace má dva **póly**.

Pól je bod, který se při dané rotaci nemění.

Druhý krok – rozklad sféry

Každá rotace má dva **póly**.

Pól je bod, který se při dané rotaci nemění.

Rotací je spočetně mnoho, tedy také pólů je spočetně mnoho.

Druhý krok – rozklad sféry

Každá rotace má dva **póly**.

Pól je bod, který se při dané rotaci nemění.

Rotací je spočetně mnoho, tedy také pólů je spočetně mnoho.

Označíme P množinu všech pólů všech rotací.

Druhý krok – rozklad sféry

Každá rotace má dva **póly**.

Pól je bod, který se při dané rotaci nemění.

Rotací je spočetně mnoho, tedy také pólů je spočetně mnoho.

Označíme P množinu všech pólů všech rotací.

Pak P je spočetná.

Druhý krok – rozklad sféry

Každá rotace má dva **póly**.

Pól je bod, který se při dané rotaci nemění.

Rotací je spočetně mnoho, tedy také pólů je spočetně mnoho.

Označíme P množinu všech pólů všech rotací.

Pak P je spočetná.

Množinu P necháme stranou a věnujeme se zbytku $S \setminus P$.

Rozklad množiny $S \setminus P$ na orbity

Rozklad množiny $S \setminus P$ na orbity

Množinu $S \setminus P$ rozložíme na *třídy ekvivalence*.

Rozklad množiny $S \setminus P$ na orbity

Množinu $S \setminus P$ rozložíme na *třídy ekvivalence*.

Do jedné třídy patří body, které lze spojit nějakou rotací z G.

Rozklad množiny $S \setminus P$ na orbity

Množinu $S \setminus P$ rozložíme na *třídy ekvivalence*.

Do jedné třídy patří body, které lze spojit nějakou rotací z G.

Tyto třídy nazýváme **orbity**.

Rozklad množiny $S \setminus P$ na orbity

Množinu $S \setminus P$ rozložíme na *třídy ekvivalence*.

Do jedné třídy patří body, které lze spojit nějakou rotací z G.

Tyto třídy nazýváme **orbity**.

Každý bod z $S \setminus P$ patří právě do jedné orbity.

Rozklad množiny $S \setminus P$ na orbity

Množinu $S \setminus P$ rozložíme na *třídy ekvivalence*.

Do jedné třídy patří body, které lze spojit nějakou rotací z G.

Tyto třídy nazýváme **orbity**.

Každý bod z $S \setminus P$ patří právě do jedné orbity.

Každá orbita je *spočetná*.

Rozklad množiny $S \setminus P$ na orbity

Množinu $S \setminus P$ rozložíme na *třídy ekvivalence*.

Do jedné třídy patří body, které lze spojit nějakou rotací z G.

Tyto třídy nazýváme **orbity**.

Každý bod z $S \setminus P$ patří právě do jedné orbity.

Každá orbita je *spočetná*.

A pochopitelně jich je *nespočetně mnoho*.

Nadešla chvíle axiomu výběru!

Nadešla chvíle axiomu výběru!

Stvoříme *výběrovou množinu* C, která obsahuje *právě jeden bod z každé orbity*.

Nadešla chvíle axiomu výběru!

Stvoříme *výběrovou množinu* C, která obsahuje *právě jeden bod z každé orbity*.

Pak

Nadešla chvíle axiomu výběru!

Stvoříme *výběrovou množinu* C, která obsahuje *právě jeden bod z každé orbity*.

Pak

- *C je nespočetná*

Nadešla chvíle axiomu výběru!

Stvoříme *výběrovou množinu* C, která obsahuje *právě jeden bod z každé orbity*.

Pak

- C *je nespočetná*
- $C \cap P = \emptyset$

Nadešla chvíle axiomu výběru!

Stvoříme *výběrovou množinu* C, která obsahuje *právě jeden bod z každé orbity*.

Pak

- C *je nespočetná*
- $C \cap P = \emptyset$
- *žádné dva body z* C *nelze spojit žádnou rotací z* G

Nadešla chvíle axiomu výběru!

Stvoříme *výběrovou množinu* C, která obsahuje *právě jeden bod z každé orbity*.

Pak

- C *je nespočetná*
- $C \cap P = \emptyset$
- *žádné dva body z* C *nelze spojit žádnou rotací z* G
- *do každého bodu z* $S \setminus P$ *se lze dostat z nějakého bodu z* C *nějakou rotací z* G.

Rozklad sféry

Rozklad sféry

Definujeme

$$K_1 = G_1 C$$
$$K_2 = G_2 C$$
$$K_3 = G_3 C.$$

Rozklad sféry

Definujeme

$$K_1 = G_1 C$$
$$K_2 = G_2 C$$
$$K_3 = G_3 C.$$

Pak

$$S = P \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3.$$

Vztahy mezi třídami K_1, K_2, K_3

Vztahy mezi třídami K_1, K_2, K_3

Rotací τ se dostaneme z kteréhokoli bodu z K_1 do nějakého bodu z K_2.

Vztahy mezi třídami K_1, K_2, K_3

Rotací τ se dostaneme z kteréhokoli bodu z K_1 do nějakého bodu z K_2.

A všechny body z K_2 takto vyčerpáme!

Vztahy mezi třídami K_1, K_2, K_3

Rotací τ se dostaneme z kteréhokoli bodu z K_1 do nějakého bodu z K_2.

A všechny body z K_2 takto vyčerpáme!

Tedy *K_1 a K_2 jsou kongruentní* tj. $K_1 \approx K_2$!

Vztahy mezi třídami K_1, K_2, K_3

Rotací τ se dostaneme z kteréhokoli bodu z K_1 do nějakého bodu z K_2.

A všechny body z K_2 takto vyčerpáme!

Tedy *K_1 a K_2 jsou kongruentní* tj. $K_1 \approx K_2$!

Obdobně: $K_1 \approx K_3$ (pomocí rotace τ^2)

Vztahy mezi třídami K_1, K_2, K_3

Rotací τ se dostaneme z kteréhokoli bodu z K_1 do nějakého bodu z K_2.

A všechny body z K_2 takto vyčerpáme!

Tedy *K_1 a K_2 jsou kongruentní* tj. $K_1 \approx K_2$!

Obdobně: $K_1 \approx K_3$ (pomocí rotace τ^2)

a $K_1 \approx K_2 \cup K_3$ (pomocí rotace σ).

Vztahy mezi třídami K_1, K_2, K_3

Rotací τ se dostaneme z kteréhokoli bodu z K_1 do nějakého bodu z K_2.

A všechny body z K_2 takto vyčerpáme!

Tedy *K_1 a K_2 jsou kongruentní* tj. $K_1 \approx K_2$!

Obdobně: $K_1 \approx K_3$ (pomocí rotace τ^2)

a $K_1 \approx K_2 \cup K_3$ (pomocí rotace σ).

Celkem:

$$K_1 \approx K_2 \approx K_3 \approx K_2 \cup K_3.$$

Hausdorffův paradox

Hausdorffův paradox

Též **paradox třetiny a poloviny**:

Hausdorffův paradox

Též **paradox třetiny a poloviny**:

Skoro $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ (až na póly, ale těch je málo).

Hausdorffův paradox

Též **paradox třetiny a poloviny**:

Skoro $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ (až na póly, ale těch je málo).

Tedy K je kongruentní své *skorotřetině*.

Hausdorffův paradox

Též **paradox třetiny a poloviny**:

Skoro $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ (až na póly, ale těch je málo).

Tedy K je kongruentní své *skorotřetině*.

Zároveň je ale K kongruentní své *skoropolovině*.

Pozor, blíží se klíčový krok!

Pozor, blíží se klíčový krok!

Množinu $K_2 \cup K_3$ použijeme jako *rozkladový vzor*.

Pozor, blíží se klíčový krok!

Množinu $K_2 \cup K_3$ použijeme jako *rozkladový vzor*.

S její pomocí rozložíme každou z K_1, K_2 a K_3 na dvě části.

Pozor, blíží se klíčový krok!

Množinu $K_2 \cup K_3$ použijeme jako *rozkladový vzor*.

S její pomocí rozložíme každou z K_1, K_2 a K_3 na dvě části.

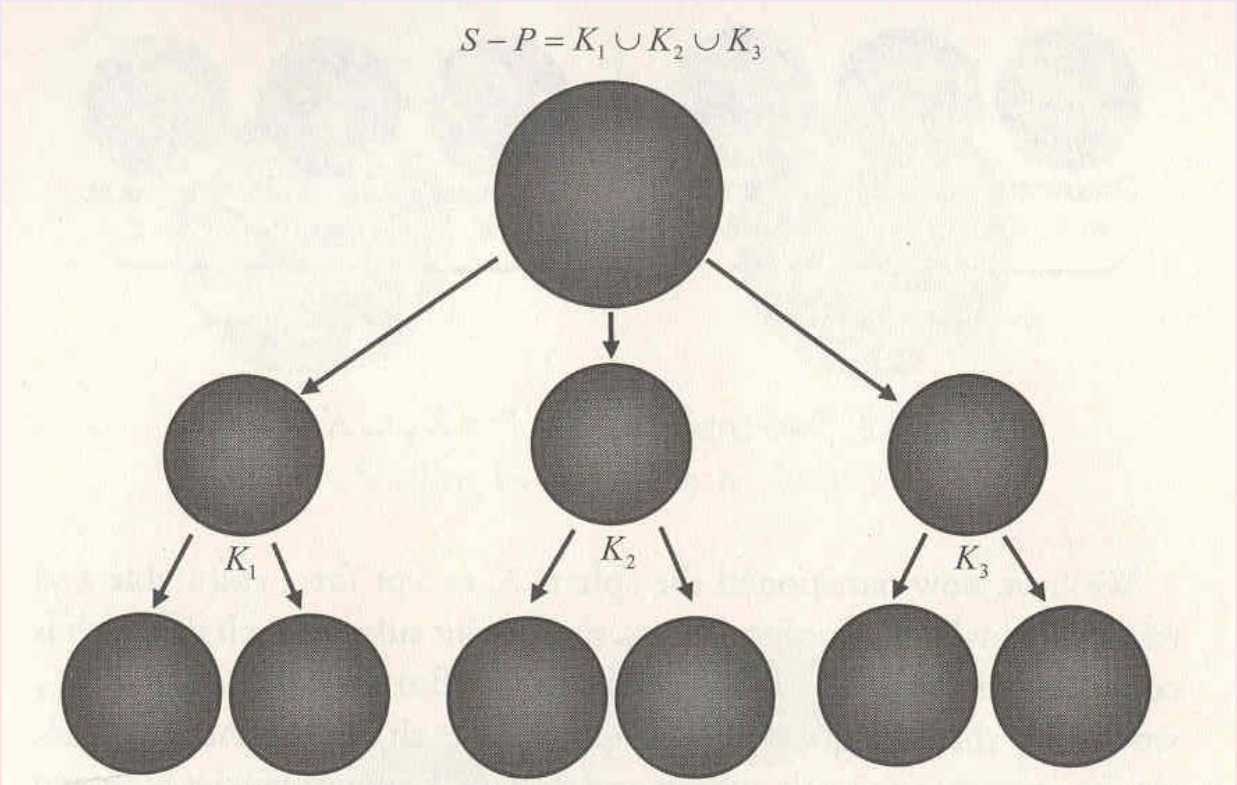
Jedna bude kongruentní K_2 a druhá K_3.

Pozor, blíží se klíčový krok!

Množinu $K_2 \cup K_3$ použijeme jako *rozkladový vzor*.

S její pomocí rozložíme každou z K_1, K_2 a K_3 na dvě části.

Jedna bude kongruentní K_2 a druhá K_3.



A jsme skoro hotovi

A jsme skoro hotovi

Tím jsme rozložili množinu $S \setminus P$ na šest částí, z nichž každá je kongruentní buď K_2 nebo K_3.

A jsme skoro hotovi

Tím jsme rozložili množinu $S \setminus P$ na šest částí, z nichž každá je kongruentní buď K_2 nebo K_3.

Vezmeme vždy tři a tři a deklarujeme kongruenci množinám K_1, K_2 a K_3.

A jsme skoro hotovi

Tím jsme rozložili množinu $S \setminus P$ na šest částí, z nichž každá je kongruentní buď K_2 nebo K_3.

Vezmeme vždy tři a tři a deklarujeme kongruenci množinám K_1, K_2 a K_3.

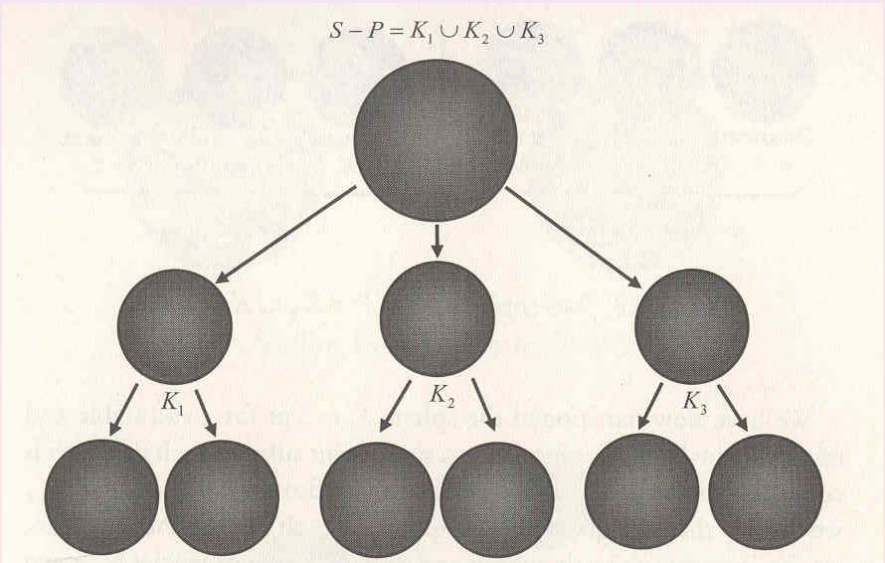
Tím získáme dvě identické kongruentní kopie $S \setminus P$, jejichž sjednocením je ale opět $S \setminus P$.

A jsme skoro hotovi

Tím jsme rozložili množinu $S \setminus P$ na šest částí, z nichž každá je kongruentní buď K_2 nebo K_3.

Vezmeme vždy tři a tři a deklarujeme kongruenci množinám K_1, K_2 a K_3.

Tím získáme dvě identické kongruentní kopie $S \setminus P$, jejichž sjednocením je ale opět $S \setminus P$.



Co zbývá?

Co zbývá?

Zbývá zbavit se pólů.

Co zbývá?

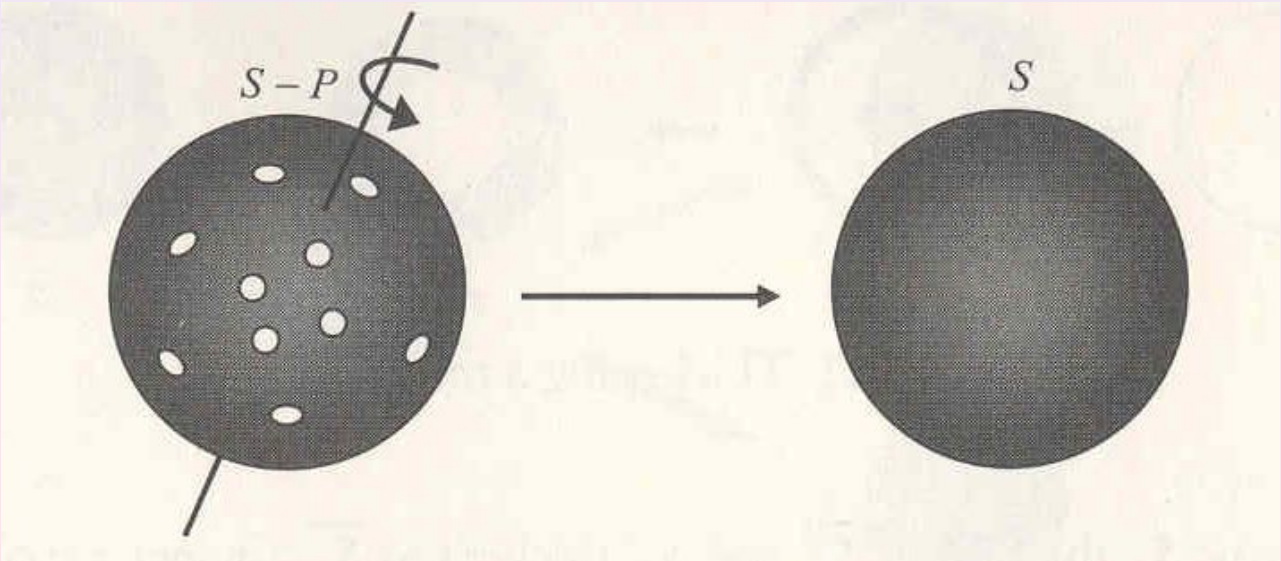
Zbývá zbavit se pólů.

Na to ale stačí posun z nekonečna.

Co zbývá?

Zbývá zbavit se pólů.

Na to ale stačí posun z nekonečna.



Třetí krok – mentální antianorexie

Třetí krok – mentální antianorexie

Odbydeme to obrázkem!

Třetí krok – mentální antianorexie

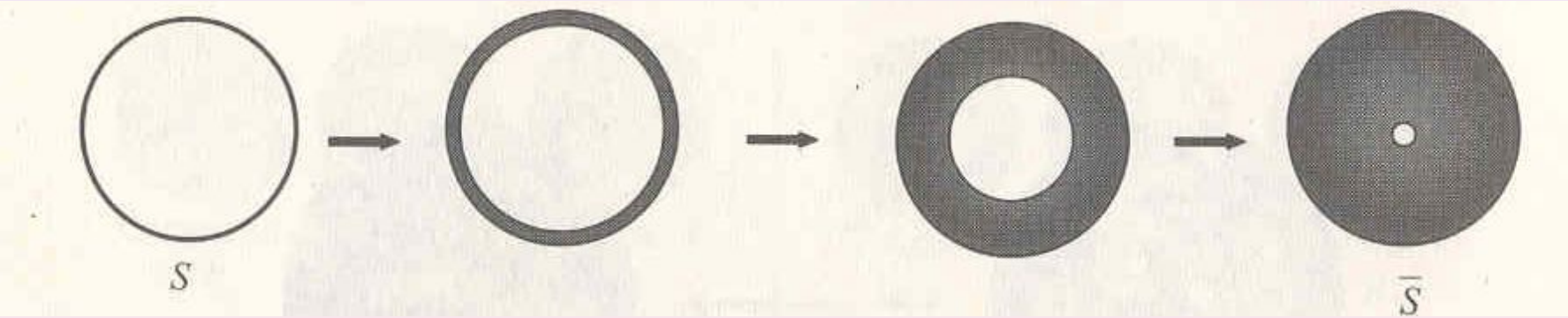
Odbydeme to obrázkem!

(Těžké matiky už bylo dost.)

Třetí krok – mentální antianorexie

Odbydeme to obrázkem!

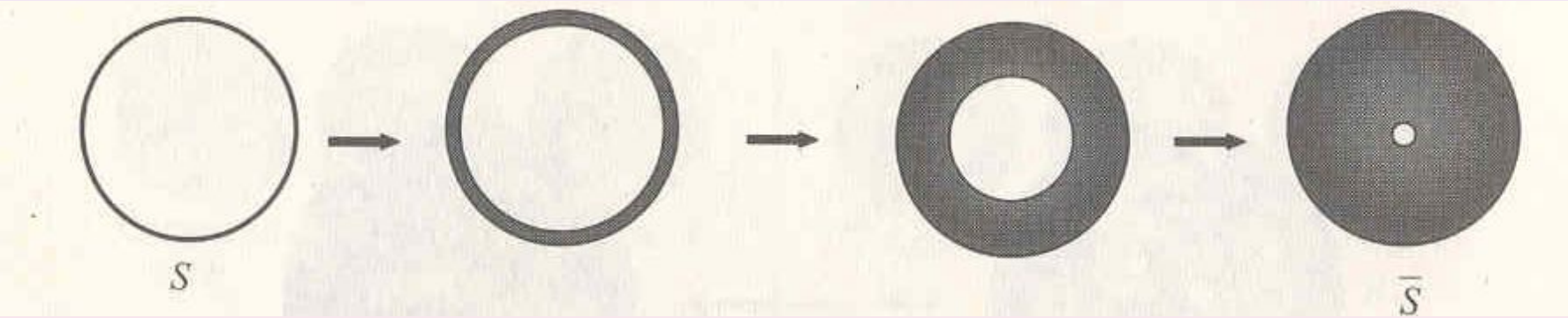
(Těžké matiky už bylo dost.)



Třetí krok – mentální antianorexie

Odbydeme to obrázkem!

(Těžké matiky už bylo dost.)



Díru v počátku zaplníme posunem z nekonečna.

Je čas na oslavy!

Je čas na oslavy!

No vidíte, dokázali jsme to!

Je čas na oslavy!

No vidíte, dokázali jsme to!

Dokázali jsme duplikační verzi Banachovy–Tarského věty.

Je čas na oslavy!

No vidíte, dokázali jsme to!

Dokázali jsme duplikační verzi Banachovy–Tarského věty.

Dokázali jsme něco, co odporuje zdravému rozumu!

Je čas na oslavy!

No vidíte, dokázali jsme to!

Dokázali jsme duplikační verzi Banachovy–Tarského věty.

Dokázali jsme něco, co odporuje zdravému rozumu!

K tomu musíme zaujmout nějaké stanovisko.

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

A rozloučit se s rozsáhlými partiemi nádherné matematiky.

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

A rozloučit se s rozsáhlými partiemi nádherné matematiky.

Možnost 2: *přijmout bez výhrad a bez další interpretace.*

Jak chápat Banachovu-Tarského větu?

Možnost 1: *exemplárně ji zavrhnout jakožto zjevný naprostý nesmysl*.

Dobře, ale pak musíme *zavrhnout axiom výběru*.

A rozloučit se s rozsáhlými partiemi nádherné matematiky.

Možnost 2: *přijmout bez výhrad a bez další interpretace.*

Pak zase ale musíme začít *zdvojovat hmotu*.

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axomatickém systému toto tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axomatickém systému toto tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Axiom výběru je matematický axiom, nikoli fyzikální!

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axomatickém systému toto tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Axiom výběru je matematický axiom, nikoli fyzikální!

Celé je to možné jedině díky tomu, že pracujeme s množinami, které **nemají objem**.

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axomatickém systému toto tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Axiom výběru je matematický axiom, nikoli fyzikální!

Celé je to možné jedině díky tomu, že pracujeme s množinami, které **nemají objem**.

Zdvojovat hmotu tedy asi nebudeme.

Naštěstí je tu ještě jedna možnost

Možnost 3: *uvědomit si, že jde (pouze) o matematickou větu.*

V Zermelo-Fränkelově axomatickém systému toto tvrzení platí, přijmeme-li axiom výběru.

Axiom výběru je matematický axiom, nikoli fyzikální!

Celé je to možné jedině díky tomu, že pracujeme s množinami, které **nemají objem**.

Zdvojovat hmotu tedy asi nebudeme.

Ale na ten matfyz se přihlaste.

The last slide

The last slide

