

O přerovnávání řad – příklady a animace

Petr Vodstrčil

`petr.vodstrcil@vsb.cz`

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava

25.4. 2017



Nejprve dokážeme pomocnou větu, kterou budeme později potřebovat.

Nejprve dokážeme pomocnou větu, kterou budeme později potřebovat.

Věta (zobecnění integrálního kritéria)

Nechť funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ nezáporná a nerostoucí. Pak je posloupnost (a_n) , kde

$$a_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(x) \, dx,$$

konvergentní.

Nejprve dokážeme pomocnou větu, kterou budeme později potřebovat.

Věta (zobecnění integrálního kritéria)

Nechť funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ nezáporná a nerostoucí. Pak je posloupnost (a_n) , kde

$$a_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(x) \, dx,$$

konvergentní.

Důkaz.

Stačí, když ukážeme, že posloupnost (a_n) je nerostoucí a nezáporná (tedy zdola omezená).

Nejprve dokážeme pomocnou větu, kterou budeme později potřebovat.

Věta (zobecnění integrálního kritéria)

Nechť funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ nezáporná a nerostoucí. Pak je posloupnost (a_n) , kde

$$a_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(x) dx,$$

konvergentní.

Důkaz.

Stačí, když ukážeme, že posloupnost (a_n) je nerostoucí a nezáporná (tedy zdola omezená). Z předpokladů věty plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n+1) - \int_n^{n+1} \underbrace{f(n+1)}_{\text{konst.}} dx = 0.$$

Nejprve dokážeme pomocnou větu, kterou budeme později potřebovat.

Věta (zobecnění integrálního kritéria)

Nechť funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$ nezáporná a nerostoucí. Pak je posloupnost (a_n) , kde

$$a_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(x) dx,$$

konvergentní.

Důkaz.

Stačí, když ukážeme, že posloupnost (a_n) je nerostoucí a nezáporná (tedy zdola omezená). Z předpokladů věty plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n+1) - \underbrace{\int_n^{n+1} f(n+1) dx}_{\text{konst.}} = 0.$$

Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(f(i) - \int_i^{i+1} f(x) dx \right)}_{\geq 0} + \underbrace{\int_n^{n+1} f(x) dx}_{\geq 0} \geq 0.$$



Důsledek

Zvolíme-li v předchozí větě $f(x) = \frac{1}{x}$, dostaneme, že posloupnost (c_n) , kde

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad (1)$$

je konvergentní.

Důsledek

Zvolíme-li v předchozí větě $f(x) = \frac{1}{x}$, dostaneme, že posloupnost (c_n) , kde

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad (1)$$

je konvergentní.

Označme $C = \lim c_n$ ($\in \mathbb{R}$).

Důsledek

Zvolíme-li v předchozí větě $f(x) = \frac{1}{x}$, dostaneme, že posloupnost (c_n) , kde

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad (1)$$

je konvergentní.

Označme $C = \lim c_n$ ($\in \mathbb{R}$). ($C \doteq 0,5772156649$ se nazývá Eulerova konstanta.)

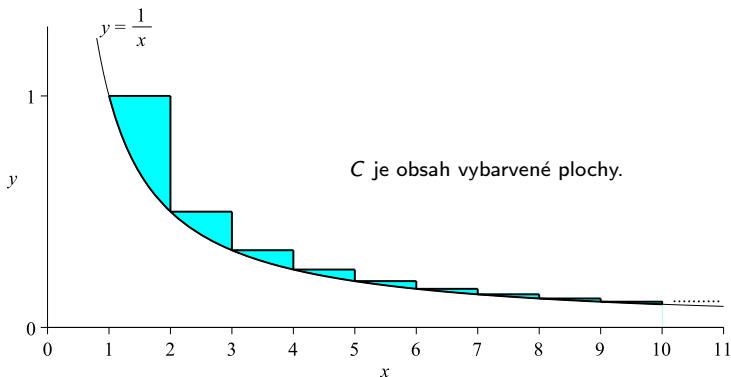
Důsledek

Zvolíme-li v předchozí větě $f(x) = \frac{1}{x}$, dostaneme, že posloupnost (c_n) , kde

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad (1)$$

je konvergentní.

Označme $C = \lim c_n$ ($\in \mathbb{R}$). ($C \doteq 0,5772156649$ se nazývá Eulerova konstanta.)



Důsledek

Zvolíme-li v předchozí větě $f(x) = \frac{1}{x}$, dostaneme, že posloupnost (c_n) , kde

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad (1)$$

je konvergentní.

Označme $C = \lim c_n \in \mathbb{R}$. ($C \doteq 0,5772156649$ se nazývá Eulerova konstanta.)

Příklad

Určete součet řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots \quad (2)$$

a jejího přerovnání

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \cdots \quad (3)$$

Důsledek

Zvolíme-li v předchozí větě $f(x) = \frac{1}{x}$, dostaneme, že posloupnost (c_n) , kde

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad (1)$$

je konvergentní.

Označme $C = \lim c_n \in \mathbb{R}$. ($C \doteq 0,5772156649$ se nazývá Eulerova konstanta.)

Příklad

Určete součet řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots \quad (2)$$

a jejího přerovnání

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \cdots \quad (3)$$

Řešení.

Nechť (s_n) je posloupnost částečných součtů řady (2). Pak (použijeme-li (1)) platí

$$s_{2n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)}_{n \text{ členů}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)}_{n \text{ členů}} =$$

$$\begin{aligned} &= \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \right] - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \\ &= (c_{2n} + \ln 2n) - (c_n + \ln n) = c_{2n} - c_n + \ln 2n - \ln n = c_{2n} - c_n + \ln 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \right] - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \\
&= (c_{2n} + \ln 2n) - (c_n + \ln n) = c_{2n} - c_n + \ln 2n - \ln n = c_{2n} - c_n + \ln 2.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\lim c_n = C \ (\in \mathbb{R})$, je

$$\lim s_{2n} = C - C + \ln 2 = \ln 2. \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \right] - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \\
&= (c_{2n} + \ln 2n) - (c_n + \ln n) = c_{2n} - c_n + \ln 2n - \ln n = c_{2n} - c_n + \ln 2.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\lim c_n = C$ ($\in \mathbb{R}$), je

$$\lim s_{2n} = C - C + \ln 2 = \ln 2. \quad (4)$$

Dále

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{(4)} \lim s_{2n+1} = \ln 2 \xrightarrow{(4)} \lim s_n = \ln 2,$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \right] - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \\
&= (c_{2n} + \ln 2n) - (c_n + \ln n) = c_{2n} - c_n + \ln 2n - \ln n = c_{2n} - c_n + \ln 2.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\lim c_n = C$ ($\in \mathbb{R}$), je

$$\lim s_{2n} = C - C + \ln 2 = \ln 2. \quad (4)$$

Dále

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{(4)} \lim s_{2n+1} = \ln 2 \xrightarrow{(4)} \lim s_n = \ln 2,$$

tzn.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots = \ln 2 \doteq 0,693147.$$

Řešení.

Podobně sečteme i přerovnanou řadu

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \dots$$

Řešení.

Podobně sečteme i přerovnanou řadu

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \dots$$

Nechť (t_n) je posloupnost jejích částečných součtů. Pak (opět použijeme (1)) platí

Podobně sečteme i přerovnanou řadu

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \dots$$

Nechť (t_n) je posloupnost jejích částečných součtů. Pak (opět použijeme (1)) platí

$$\begin{aligned} t_{3n} &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4n-1}\right)}_{2n \text{ členů}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right)}_{n \text{ členů}} = \\ &= \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4n}\right) \right] - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4n}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\ &= (c_{4n} + \ln 4n) - \frac{1}{2}(c_{2n} + \ln 2n) - \frac{1}{2}(c_n + \ln n) = \\ &= c_{4n} - \frac{1}{2}c_{2n} - \frac{1}{2}c_n + \ln 4n - \frac{1}{2}\ln 2n - \frac{1}{2}\ln n = c_{4n} - \frac{1}{2}c_{2n} - \frac{1}{2}c_n + \frac{3}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

Řešení.

Vzhledem k tomu, že $\lim c_n = C$ ($\in \mathbb{R}$), je

$$\lim t_{3n} = C - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C + \frac{3}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2. \quad (5)$$

Řešení.

Vzhledem k tomu, že $\lim c_n = C$ ($\in \mathbb{R}$), je

$$\lim t_{3n} = C - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C + \frac{3}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2. \quad (5)$$

Dále platí

$$\left. \begin{aligned} t_{3n+1} &= t_{3n} + \frac{1}{4n+1} \\ t_{3n+2} &= t_{3n+1} + \frac{1}{4n+3} \end{aligned} \right\} \xRightarrow{(5)} \left. \begin{aligned} \lim t_{3n+1} &= \frac{3}{2} \ln 2 \\ \lim t_{3n+2} &= \frac{3}{2} \ln 2 \end{aligned} \right\} \xRightarrow{(5)} \lim t_n = \frac{3}{2} \ln 2,$$

Řešení.

Vzhledem k tomu, že $\lim c_n = C$ ($\in \mathbb{R}$), je

$$\lim t_{3n} = C - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C + \frac{3}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2. \quad (5)$$

Dále platí

$$\left. \begin{aligned} t_{3n+1} &= t_{3n} + \frac{1}{4n+1} \\ t_{3n+2} &= t_{3n+1} + \frac{1}{4n+3} \end{aligned} \right\} \xRightarrow{(5)} \left. \begin{aligned} \lim t_{3n+1} &= \frac{3}{2} \ln 2 \\ \lim t_{3n+2} &= \frac{3}{2} \ln 2 \end{aligned} \right\} \xRightarrow{(5)} \lim t_n = \frac{3}{2} \ln 2,$$

tzn.

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2 \doteq 1,039721.$$



Řešení.

Vzhledem k tomu, že $\lim c_n = C$ ($\in \mathbb{R}$), je

$$\lim t_{3n} = C - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C + \frac{3}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2. \quad (5)$$

Dále platí

$$\left. \begin{aligned} t_{3n+1} &= t_{3n} + \frac{1}{4n+1} \\ t_{3n+2} &= t_{3n+1} + \frac{1}{4n+3} \end{aligned} \right\} \xRightarrow{(5)} \left. \begin{aligned} \lim t_{3n+1} &= \frac{3}{2} \ln 2 \\ \lim t_{3n+2} &= \frac{3}{2} \ln 2 \end{aligned} \right\} \xRightarrow{(5)} \lim t_n = \frac{3}{2} \ln 2,$$

tzn.

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2 \doteq 1,039721.$$



Vidíme tedy, že přerovnaná řada (3) má jiný součet než původní řada (2). To je způsobeno neabsolutní konvergencí řady (2).

Z Leibnizova kritéria plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ($= s \in \mathbb{R}^+$).

Z Leibnizova kritéria plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ($= s \in \mathbb{R}^+$).

Odtud

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \dots = s,$$

Z Leibnizova kritéria plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ($= s \in \mathbb{R}^+$).

Odtud

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \dots &= s, \\ + \frac{1}{2} &\quad - \frac{1}{4} &\quad + \frac{1}{6} &\quad - \frac{1}{8} &\quad + \frac{1}{10} &\quad - \frac{1}{12} &\quad + \frac{1}{14} &\quad \dots \end{aligned}$$

Z Leibnizova kritéria plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ($= s \in \mathbb{R}^+$).

Odtud

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \dots &= s, \\ + \frac{1}{2} \quad \quad - \frac{1}{4} \quad \quad + \frac{1}{6} \quad \quad - \frac{1}{8} \quad \quad + \frac{1}{10} \quad \quad - \frac{1}{12} \quad \quad + \frac{1}{14} \quad \dots &= \frac{1}{2}s, \end{aligned}$$

Z Leibnizova kritéria plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ($= s \in \mathbb{R}^+$).

Odtud

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \dots = s,$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{14} + \dots = \frac{1}{2}s,$$

Z Leibnizova kritéria plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ($= s \in \mathbb{R}^+$).

Odtud

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \dots = s,$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{14} + \dots = \frac{1}{2}s,$$

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + 0 + \dots = \frac{3}{2}s.$$

Z Leibnizova kritéria plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ($= s \in \mathbb{R}^+$).

Odtud

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \dots = s,$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{14} + \dots = \frac{1}{2}s,$$

$$1 \quad + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \quad + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \quad + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} \quad + \dots = \frac{3}{2}s.$$

Z Leibnizova kritéria plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ($= s \in \mathbb{R}^+$).

Odtud

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \dots = s,$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{14} + \dots = \frac{1}{2}s,$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \dots = \frac{3}{2}s.$$

To ale znamená, že

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots \neq 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Součty obou řad jsme však touto technikou nedostali.

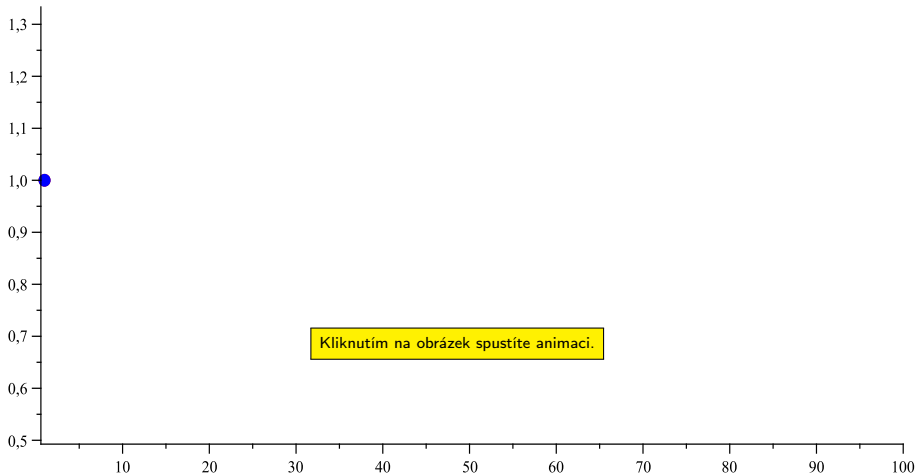
Animace 1.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

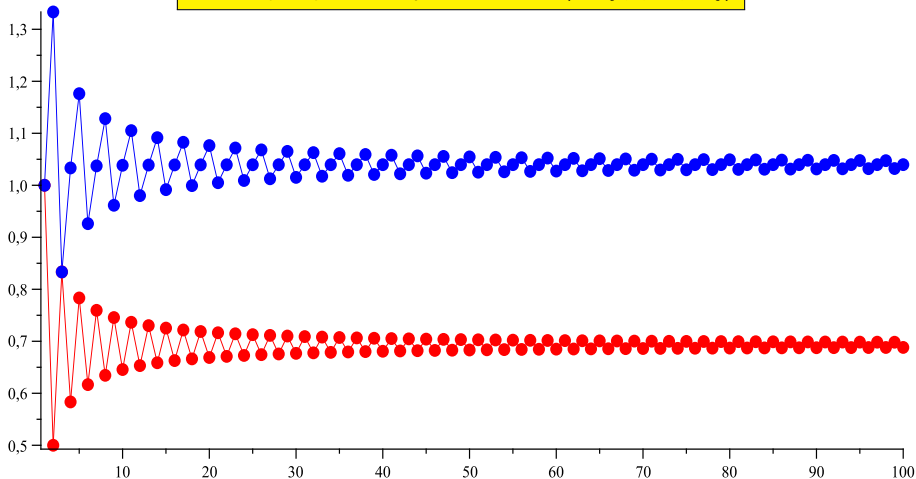
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots \neq 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots \neq 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

 $n = 1.$ 

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots \neq 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



Příklad

Uvažujme řadu

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{12}} + \dots \quad (6)$$

Určete součet jejího přerovnání

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots \quad (7)$$

Příklad

Uvažujme řadu

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{12}} + \dots \quad (6)$$

Určete součet jejího přerovnání

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots \quad (7)$$

Řešení.

Označme (r_n) posloupnost částečných součtů řady (7). Pak platí

$$\begin{aligned} r_{3n} &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right)}_{2n \text{ členů}} - \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)}_{n \text{ členů}} \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \end{aligned}$$

Řešení.

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}} \right)}_{n \text{ členů}} \geq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{4n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}} \right)}_{n \text{ členů}} = \frac{n}{\sqrt{4n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \rightarrow +\infty.$$

Řešení.

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}} \right)}_{n \text{ členů}} \geq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{4n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}} \right)}_{n \text{ členů}} = \frac{n}{\sqrt{4n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \rightarrow +\infty.$$

To znamená, že

$$\lim r_{3n} = +\infty.$$

Řešení.

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}} \right)}_{n \text{ členů}} \geq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{4n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}} \right)}_{n \text{ členů}} = \frac{n}{\sqrt{4n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \rightarrow +\infty.$$

To znamená, že

$$\lim r_{3n} = +\infty.$$

Podobně jako v předchozím příkladu bychom ukázali, že

$$\lim r_n = +\infty,$$

Řešení.

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}} \right)}_{n \text{ členů}} \geq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{4n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}} \right)}_{n \text{ členů}} = \frac{n}{\sqrt{4n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \rightarrow +\infty.$$

To znamená, že

$$\lim r_{3n} = +\infty.$$

Podobně jako v předchozím příkladu bychom ukázali, že

$$\lim r_n = +\infty,$$

tzn.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \cdots = +\infty.$$



Řešení.

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}} \right)}_{n \text{ členů}} \geq \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{4n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n}} \right)}_{n \text{ členů}} = \frac{n}{\sqrt{4n}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \rightarrow +\infty.$$

To znamená, že

$$\lim r_{3n} = +\infty.$$

Podobně jako v předchozím příkladu bychom ukázali, že

$$\lim r_n = +\infty,$$

tzn.

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \cdots = +\infty.$$



Poznámka

Všimněme si, že řada (6) je (podle Leibnizova kritéria) konvergentní (přibližná hodnota součtu je 0,604899). Přerovnaná řada (7) je divergentní, a tedy nemá stejný součet jako řada (6). Opět je to způsobeno neabsolutní konvergencí řady (6).

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \dots$$

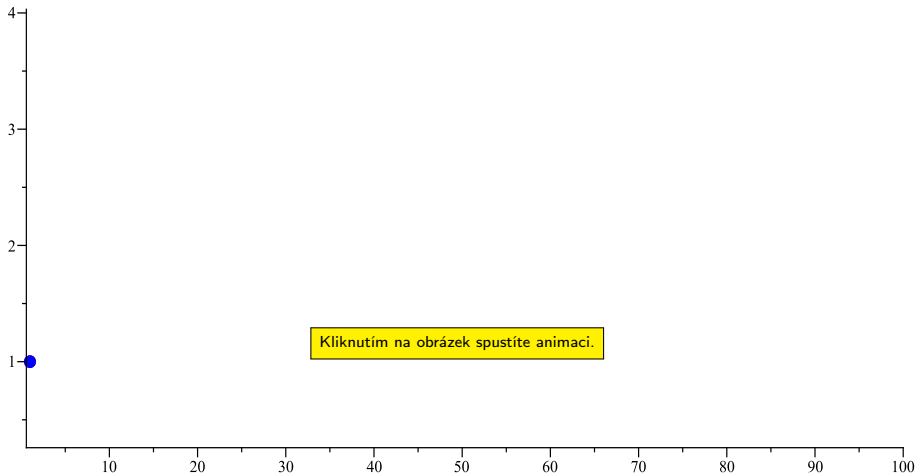
$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \dots \neq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \dots$$

Animace 2.

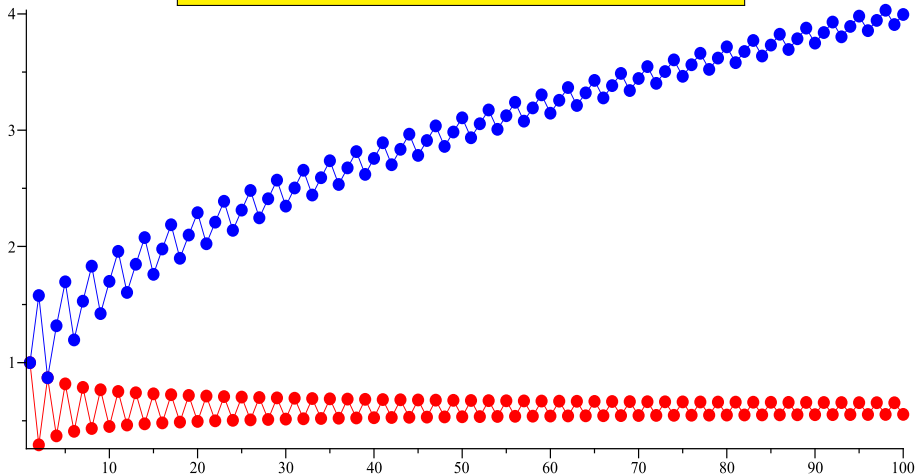
$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \dots \neq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \dots$$

$n = 1.$



$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \dots \neq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \dots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



Animace 3. (další přerovnání řady $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots$)

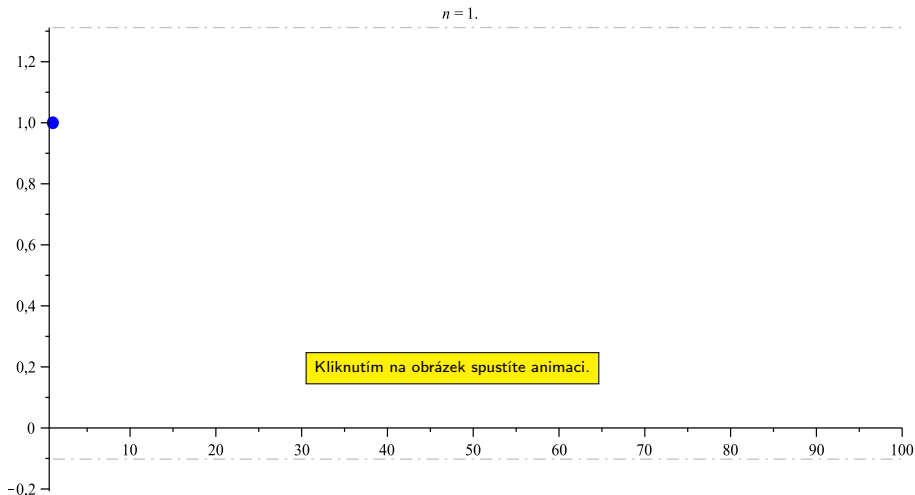
$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{17}} - \dots$$

Animace 3.

(další přerovnání řady

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots)$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{17}} - \dots$$



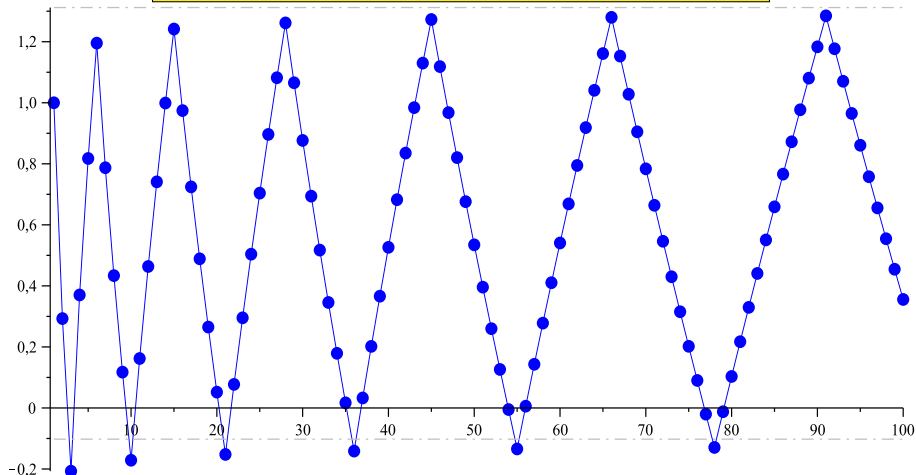
Animace 3.

(další přerovnání řady

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots)$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{17}} - \dots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů přerovnané řady ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



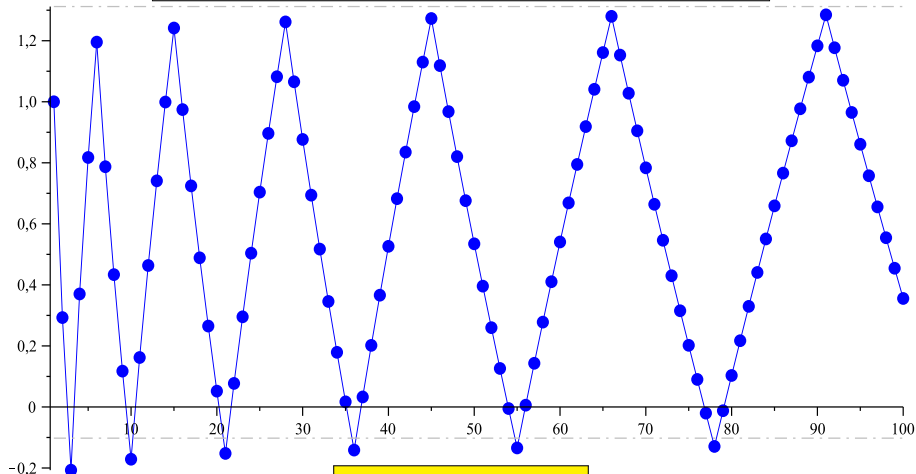
Animace 3.

(další přerovnání řady

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots)$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{17}} - \dots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů přerovnané řady ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



Přerovnaná řada osciluje.

Příklad

Uvažujme řadu

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{12^2} + \dots \quad (8)$$

a její přerovnění

$$1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{15^2} - \frac{1}{8^2} + \dots \quad (9)$$

Určete, v jakém vztahu jsou součty obou řad.

Příklad

Uvažujme řadu

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{12^2} + \dots \quad (8)$$

a její přerovnění

$$1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{15^2} - \frac{1}{8^2} + \dots \quad (9)$$

Určete, v jakém vztahu jsou součty obou řad.

Řešení.

Řada (8) je absolutně konvergentní (plyne například z integrálního kritéria). Proto jsou součty řad (8) a (9) stejné. □

Příklad

Uvažujme řadu

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{12^2} + \dots \quad (8)$$

a její přerovnění

$$1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{15^2} - \frac{1}{8^2} + \dots \quad (9)$$

Určete, v jakém vztahu jsou součty obou řad.

Řešení.

Řada (8) je absolutně konvergentní (plyne například z integrálního kritéria). Proto jsou součty řad (8) a (9) stejné. □

Poznámka

Lze ukázat, že

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{12^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \doteq 0,822467.$$

Animace 4.

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \dots$$

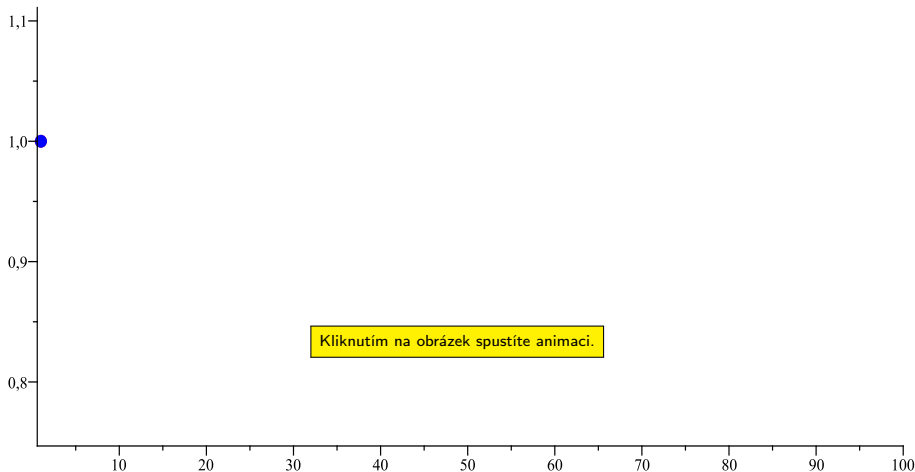
Animace 4.

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \dots = 1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \dots$$

Animace 4.

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \dots = 1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \dots$$

$n = 1.$

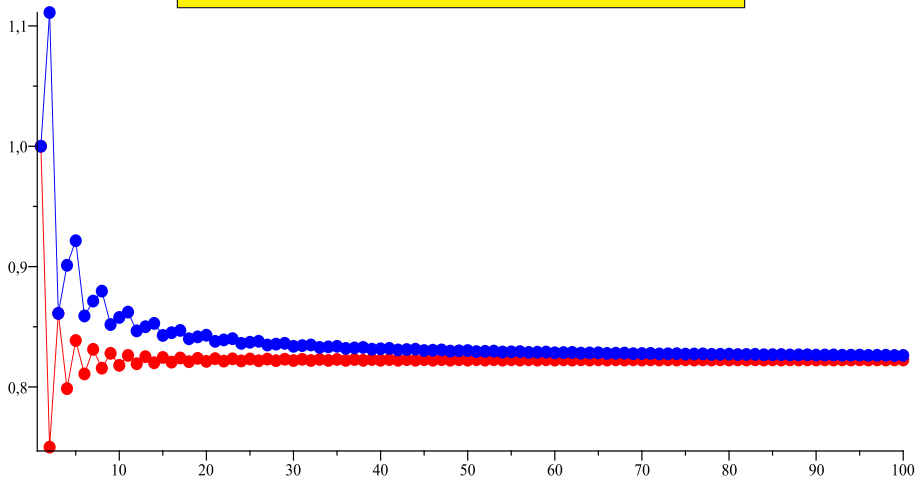


Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

Animace 4.

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \dots = 1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \dots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



Animace 5. (Každá geometrická řada s kvocientem $q \in (-1, 1)$ je absolutně konvergentní.)

$$\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \dots$$

$$\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \dots$$

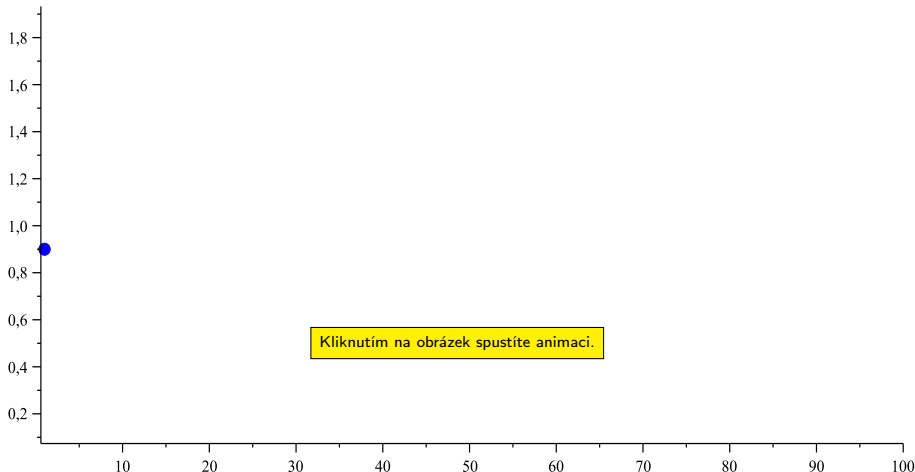
Animace 5. (Každá geometrická řada s kvocientem $q \in (-1, 1)$ je absolutně konvergentní.)

$$\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \dots = \left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \dots$$

Animace 5. (Každá geometrická řada s kvocientem $q \in (-1, 1)$ je absolutně konvergentní.)

$$\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \dots = \left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \dots$$

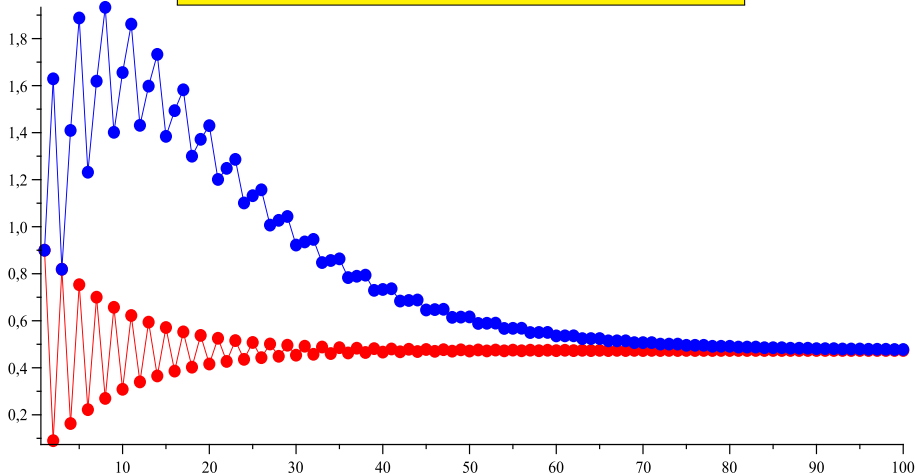
$$n = 1.$$



Animace 5. (Každá geometrická řada s kvocientem $q \in (-1, 1)$ je absolutně konvergentní.)

$$\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \dots = \left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \dots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



Domácí cvičení

Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots \quad (10)$$

Již víme, že řada (10) má součet $\ln 2$.

Určete součet jejího přerovnání

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \frac{1}{18} - \frac{1}{20} - \frac{1}{22} - \frac{1}{24} + \frac{1}{7} - \dots,$$

kteří vzniklo tak, že postupně bereme 1 kladný člen a poté 4 záporné členy řady (10).

... a to je vše !!!