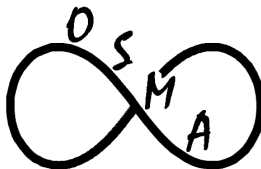
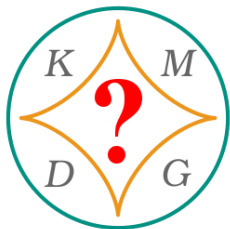


O běžci s tětivou v zádech a jiných hanebnostech

Pavel Ludvík



Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava

31. října 2017
Občasný Seminář z Matematické Analýzy

Slíbená matematická hymna!



Trust I seek and I find in you

Everyday for us something new

Open mind for a different view

And

NOTHING ELSE MATTERS

Otázky

Maratonci a maratonkyně, běžejte rychle a beztěživně

Sportovní okénko

Dne 16. listopadu 2013 uběhla Molly Huddlová trať 12 km v čase 37:49, což je světový rekord pro tuto (nestandardní) vzdálenost. Světový rekord Mary Keitanyové na půlmaraton, trať 21.1 km, tehdy činil 65:50.

Maratonci a maratonkyně, běžejte rychle a beztěživně

Sportovní okénko

Dne 16. listopadu 2013 uběhla Molly Huddlová trať 12 km v čase 37:49, což je světový rekord pro tuto (nestandardní) vzdálenost. Světový rekord Mary Keitanyové na půlmaraton, trať 21.1 km, tehdy činil 65:50.



Maratonci a maratonkyně, běžejte rychle a beztěživně

Sportovní okénko

Dne 16. listopadu 2013 uběhla Molly Huddlová trať 12 km v čase 37:49, což je světový rekord pro tuto (nestandardní) vzdálenost. Světový rekord Mary Keitanyové na půlmaraton, trať 21.1 km, tehdy činil 65:50.



Maratonci a maratonkyně, běžte rychle a beztěživně

Sportovní okénko

Dne 16. listopadu 2013 uběhla Molly Huddlová trať 12 km v čase 37:49, což je světový rekord pro tuto (nestandardní) vzdálenost. Světový rekord Mary Keitanyové na půlmaraton, trať 21.1 km, tehdy činil 65:50.

- Průměrné tempo Mary Keitanyové bylo 3:07 min/km.
- Průměrné tempo Molly Huddlové bylo 3:09 min/km.

Maratonci a maratonkyně, běžte rychle a beztlivně

Sportovní okénko

Dne 16. listopadu 2013 uběhla Molly Huddlová trať 12 km v čase 37:49, což je světový rekord pro tuto (nestandardní) vzdálenost. Světový rekord Mary Keitanyové na půlmaraton, trať 21.1 km, tehdy činil 65:50.

- Průměrné tempo Mary Keitanyové bylo 3:07 min/km.
- Průměrné tempo Molly Huddlové bylo 3:09 min/km.

Otázka

Musela Mary Keitanyová během svého rekordního závodu uběhnout nějakých souvislých 12 km rychleji než Molly Huddlová?

4 Fifty Miles an Hour

A train goes 500 miles along a straight track, without stopping, completing the trip with an average speed of exactly 50 miles per hour. It travels, however, at different speeds along the way. It seems plausible that nowhere along the 500 miles of track is there a segment of 50 miles that the train traverses in precisely one hour.

Prove that this is not the case.

J.D. Memory má problém

Kinematics Problem for Joggers

J. D. MEMORY

School of Physical and Mathematical Sciences

North Carolina State University

Raleigh, North Carolina 27607

(Received 3 April 1973; revised 18 May 1973)

I am a confirmed jogger, and while I was on the track one day, the following question occurred to me: If one runs a distance greater than a mile, not necessarily at a constant rate, but averaging, say, eight minutes to the mile, for what distances, if any, can he be sure that he ran at least one *continuous* mile in eight minutes or less? In other words, for a given distance x run in $8x$ minutes, can one construct a way to run it so that there is no continuous one mile segment run in eight minutes or less? The rather surprising answer is

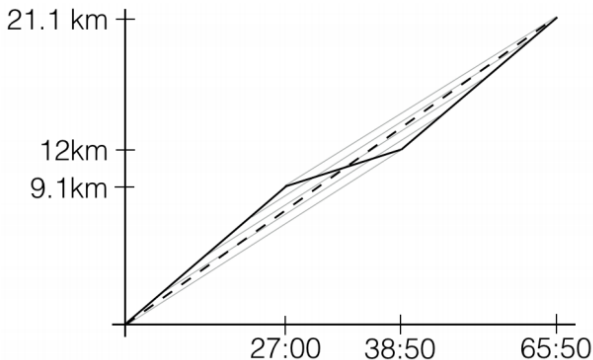
“yes,” except when the distance run is an integral number of miles. Proving this turns out to be a stimulating exercise in kinematics for undergraduates, and one which admits an instructive and fairly elegant solution.

For the case of two miles in sixteen minutes the answer is obvious: Either the first mile or the second mile must have been run in eight minutes or less. The case of $1\frac{1}{2}$ miles in twelve minutes is slightly trickier and gives a different answer. If one considers the course divided into three half-mile intervals, then the first and last half miles could be run in three minutes each, with six minutes left for the central half. Any continuous one-mile segment will include the central half mile and a total of a half mile from the segments run at the faster rate, so the mile time will be nine minutes.

In general, if any integral number of miles n is run in $8n$ minutes, then the jogger must have

Odpovědi

Maratonci a maratonkyně, běžejte rychle a beztěživě



Pokud by Keitanová běžela prvních a posledních 9.1 km za 27:00 a zbytek za 11:50, pak by byl celkový závodní čas

$$2 \times 27:00 + 11:50 = 65:50.$$

Každý 12km podinterval však zaběhla za $27:00 + 11:50 = 38:50$. A to je **horší** čas než rekordní výsledek Molly Huddlové.

Úloha ze sbírky rekreačně matematických úloh

4 Fifty Miles an Hour

Divide the 500-mile track into 10 segments of 50 miles each. If any segment is traversed in one hour, the problem is solved, and so it must be assumed that traversing each segment takes either less than an hour or more than an hour. It then follows that somewhere along the track there will be at least one pair of adjacent segments, one (call it *A*) traversed in less than an hour and the other (call it *B*) traversed in more than an hour.

Imagine an enormous measuring rod 50 miles long that is placed over segment *A*. In your mind slide the rod slowly in the direction of segment *B* until it coincides with *B*. As you slide the rod the average time taken by the train to go the 50 miles covered by the rod varies continuously from less than an hour (for *A*) to more than an hour (for *B*). Therefore there must be at least one position where the rod covers a 50-mile length of track that was traversed by the train in exactly one hour.

For a more technical analysis of the problem, in terms of a jogger who averages a mile in eight minutes and runs an integral number of miles, see “Comments on ‘Kinematics Problem for Joggers,’ by R. P. Boas, in the *American Journal of Physics* (Vol. 42, page 695, August 1974).

Úloha ze sbírky rekreačně matematických úloh

Neformální odvození

Úloha ze sbírky rekreačně matematických úloh

Neformální odvození

- 1 Rozdělme celou trať na 10 úseků po 50 mílích.

Úloha ze sbírky rekreačně matematických úloh

Neformální odvození

- 1 Rozdělme celou trať na 10 úseků po 50 mílích.
- 2 Pokud ujel nějaký úsek za hodinu, je problém vyřešen.

Úloha ze sbírky rekreačně matematických úloh

Neformální odvození

- 1 Rozdělme celou trať na 10 úseků po 50 mílich.
- 2 Pokud ujel nějaký úsek za hodinu, je problém vyřešen.
- 3 Pokud ne, musel některé ujet za časový interval delší a jiné za interval kratší jedné hodiny.

Úloha ze sbírky rekreačně matematických úloh

Neformální odvození

- 1 Rozdělme celou trať na 10 úseků po 50 mílich.
- 2 Pokud ujel nějaký úsek za hodinu, je problém vyřešen.
- 3 Pokud ne, musel některé ujet za časový interval delší a jiné za interval kratší jedné hodiny.
- 4 Existuje tedy nejméně jedna dvojice sousedících úseků, kde jeden je pomalejší (úsek A) a druhý rychlejší hodiny (B).

Úloha ze sbírky rekreačně matematických úloh

Neformální odvození

- 1 Rozdělme celou trať na 10 úseků po 50 mílich.
- 2 Pokud ujel nějaký úsek za hodinu, je problém vyřešen.
- 3 Pokud ne, musel některé ujet za časový interval delší a jiné za interval kratší jedné hodiny.
- 4 Existuje tedy nejméně jedna dvojice sousedících úseků, kde jeden je pomalejší (úsek A) a druhý rychlejší hodiny (B).
- 5 Představte si tyč dlouhou 50 mil, která pokrývá A a posouváme ji do úseku B.

Úloha ze sbírky rekreačně matematických úloh

Neformální odvození

- 1 Rozdělme celou trať na 10 úseků po 50 mílich.
- 2 Pokud ujel nějaký úsek za hodinu, je problém vyřešen.
- 3 Pokud ne, musel některé ujet za časový interval delší a jiné za interval kratší jedné hodiny.
- 4 Existuje tedy nejméně jedna dvojice sousedících úseků, kde jeden je pomalejší (úsek A) a druhý rychlejší hodiny (B).
- 5 Představte si tyč dlouhou 50 mil, která pokrývá A a posouváme ji do úseku B.
- 6 V počáteční pozici je doba projetí úseku pokrytého tyčí menší než 1 h a v koncové je větší.

Úloha ze sbírky rekreačně matematických úloh

Neformální odvození

- 1 Rozdělme celou trať na 10 úseků po 50 mílich.
- 2 Pokud ujel nějaký úsek za hodinu, je problém vyřešen.
- 3 Pokud ne, musel některé ujet za časový interval delší a jiné za interval kratší jedné hodiny.
- 4 Existuje tedy nejméně jedna dvojice sousedících úseků, kde jeden je pomalejší (úsek A) a druhý rychlejší hodiny (B).
- 5 Představte si tyč dlouhou 50 mil, která pokrývá A a posouváme ji do úseku B.
- 6 V počáteční pozici je doba projetí úseku pokrytého tyčí menší než 1 h a v koncové je větší.
- 7 Doba projetí úseku určeného tyčí se mění **spojitě**, a proto je v nějakém bodě rovná **právě jedné hodině**.

Cesta k matematické formulaci problému

Cesta k matematické formulaci problému

Snazší otázka A

Plynule se pohybující běžec měl v bodě a okamžitou rychlost v_a a v bodě b okamžitou rychlost v_b . Nechť v je číslo mezi v_a a v_b . Musel běžec někde mezi a a b dosáhnout okamžité rychlosti v ?

Cesta k matematické formulaci problému

Snazší otázka A

Plynule se pohybující běžec měl v bodě a okamžitou rychlost v_a a v bodě b okamžitou rychlost v_b . Nechť v je číslo mezi v_a a v_b . Musel běžec někde mezi a a b dosáhnout okamžité rychlosti v ?

Věta (O nabývání mezihodnot)

Spojitá funkce f definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$ nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Cesta k matematické formulaci problému

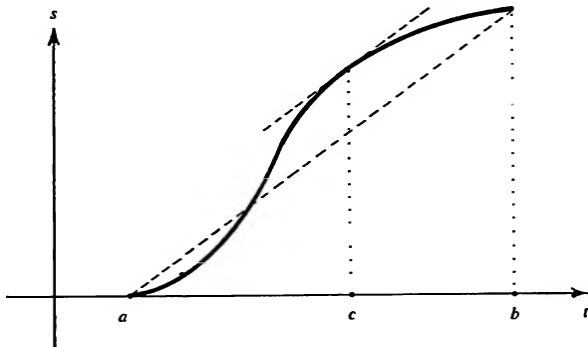
Snazší otázka B

Běžec zaběhl svou trať průměrnou rychlostí v . Existuje na trati bod, v němž by také běžcová okamžitá rychlost měla hodnotu v ?

Cesta k matematické formulaci problému

Snazší otázka B

Běžec zaběhl svou trať průměrnou rychlostí v . Existuje na trati bod, v němž by také běžcová okamžitá rychlost měla hodnotu v ?



Cesta k matematické formulaci problému

Snazší otázka B

Běžec zaběhl svou trať průměrnou rychlostí v . Existuje na trati bod, v němž by také běžcová okamžitá rychlost měla hodnotu v ?

Věta (O střední hodnotě)

Má-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ na intervalu (a, b) také derivaci, pak existuje bod $c \in (a, b)$, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Cesta k matematické formulaci problému

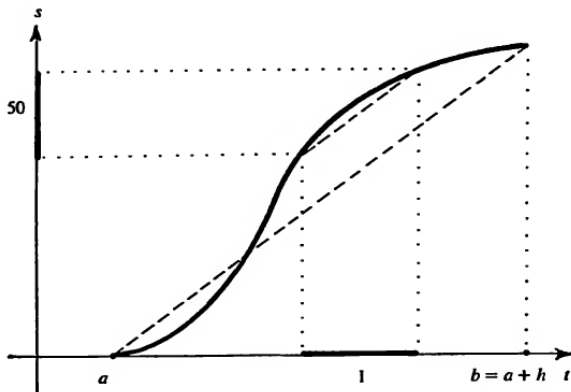
Naše otázka

Nechť je f spojitá funkce definovaná na intervalu délky L a $0 < l < L$. Existuje pak podinterval délky l , na němž je průměrná rychlost změny f stejná jako na celém intervalu?

Cesta k matematické formulaci problému

Naše otázka

Nechť je f spojitá funkce definovaná na intervalu délky L a $0 < l < L$. Existuje pak podinterval délky l , na němž je průměrná rychlost změny f stejná jako na celém intervalu?



Matematická reformulace problému

Definice

Tětivou spojitě funkce f nazveme úsečku, jejíž oba její krajní body leží na grafu f .

Matematická reformulace problému

Definice

Tětivou spojité funkce f nazveme úsečku, jejíž oba její krajní body leží na grafu f .

Tvrzení formulujeme pouze pro **vodorovné tětivy**. Není těžké si rozmyslet, jak věty zobecnit pro obecné tětivy.

Matematická reformulace problému

Definice

Tětivou spojité funkce f nazveme úsečku, jejíž oba její krajní body leží na grafu f .

Tvrzení formulujeme pouze pro **vodorovné tětivy**. Není těžké si rozmyslet, jak věty zobecnit pro obecné tětivy.

V dalším výkladu budeme **spojitou funkcí** myslet funkci spojitou na $\mathbb{R}$, není-li jinak určen její definiční obor.

Matematická reformulace problému

Definice

Tětivou spojitě funkce f nazveme úsečku, jejíž oba její krajní body leží na grafu f .

Věta (Všeobecná tětivová věta)

*Existuje-li vodorovná tětiva spojitě funkce f , která má délku L , pak **existují vodorovné tětivy f o délkách L/n pro všechna přirozená n . Pokud však n není přirozené, vodorovná tětiva f o délce L/n existovat **nemusí**.***

Jinými slovy: Nechť je f spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b)$ a $b - a = L$. Pak pro $n > 1$ přirozené existuje alespoň jedno $x \in (a, b)$, že $f(x + L/n) = f(x)$. Naopak pro $n > 1$, které není přirozeným číslem existuje spojitá funkce f na $\langle a, b \rangle$ a $x \in (a, b)$, že $f(x + L/n) \neq f(x)$.

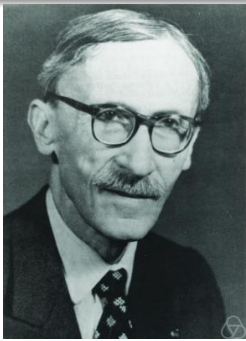
O historii věty

- Kladnou část věty dokázal roku 1806 **André-Marie Ampère**.



O historii věty

- Kladnou část věty dokázal roku 1806 **André-Marie Ampère**.
- Obě tvrzení věty dokázal jako **Universal Chord Theorem** roku 1934 francouzský matematik **Paul Pierre Lévy**.



O historii věty

- Kladnou část věty dokázal roku 1806 **André-Marie Ampère**.
- Obě tvrzení věty dokázal jako **Universal Chord Theorem** roku 1934 francouzský matematik **Paul Pierre Lévy**.
- Věta si nenašla cestu do klasických učebnic a byla opakovaně „znovuobjevena“.

O historii věty

- Kladnou část věty dokázal roku 1806 **André-Marie Ampère**.
- Obě tvrzení věty dokázal jako **Universal Chord Theorem** roku 1934 francouzský matematik **Paul Pierre Lévy**.
- Věta si nenašla cestu do klasických učebnic a byla opakovaně „znovuobjevena“.
- Existuje řada aplikací a zobecnění věty.

Speciální případy

Věta

Nechť je f spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b) = 0$ a $b - a = L$. Pokud graf f neprotíná osu x , pak pro každé $0 < l < L$ existuje alespoň jedno $x \in (a, b)$, že $f(x + l) = f(x)$.

Speciální případy

Věta

Nechť je f spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b) = 0$ a $b - a = L$. Pokud graf f neprotíná osu x , pak pro každé $0 < l < L$ existuje alespoň jedno $x \in (a, b)$, že $f(x + l) = f(x)$.

Důkaz

- 1 Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f \geq 0$ (jinak bychom pracovali s funkcí $-f$).

Speciální případy

Věta

Nechť je f spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b) = 0$ a $b - a = L$. Pokud graf f neprotíná osu x , pak pro každé $0 < l < L$ existuje alespoň jedno $x \in (a, b)$, že $f(x + l) = f(x)$.

Důkaz

- 1 Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f \geq 0$ (jinak bychom pracovali s funkcí $-f$).
- 2 Pro $x \in \langle a, b - l \rangle$ definujeme funkci $h(x) = f(x + l) - f(x)$.

Speciální případy

Věta

Nechť je f spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b) = 0$ a $b - a = L$. Pokud graf f neprotíná osu x , pak pro každé $0 < l < L$ existuje alespoň jedno $x \in (a, b)$, že $f(x + l) = f(x)$.

Důkaz

- 1 Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f \geq 0$ (jinak bychom pracovali s funkcí $-f$).
- 2 Pro $x \in \langle a, b - l \rangle$ definujeme funkci $h(x) = f(x + l) - f(x)$.
- 3 Platí $h(a) = f(a + l) \geq 0$ a $h(b - l) = -f(b - l) \leq 0$.

Speciální případy

Věta

Nechť je f spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b) = 0$ a $b - a = L$. Pokud graf f neprotíná osu x , pak pro každé $0 < l < L$ existuje alespoň jedno $x \in (a, b)$, že $f(x + l) = f(x)$.

Důkaz

- 1 Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f \geq 0$ (jinak bychom pracovali s funkcí $-f$).
- 2 Pro $x \in \langle a, b - l \rangle$ definujeme funkci $h(x) = f(x + l) - f(x)$.
- 3 Platí $h(a) = f(a + l) \geq 0$ a $h(b - l) = -f(b - l) \leq 0$.
- 4 Není-li žádná z hodnot výše nulová, existuje podle **Věty o nabývání mezihodnot** $x \in (a, b - l)$, kde $h(x) = 0$. V takovém bodě pak $f(x + l) = f(x)$.

Speciální případy

Věta

Spojité periodické funkce f má vodorovné tětiny všech délek (dvě nejméně, jejichž lišící se levé krajní body leží v jedné periodě).

Věta

Spojité periodická funkce f má vodorovné tětiny všech délek (dvě nejméně, jejichž lišící se levé krajní body leží v jedné periodě).

Důkaz

- 1 Nechť f je spojitá periodická funkce s periodou L a $l > 0$ je libovolné. Chceme ukázat, že pro nějak c platí $f(c) = f(c + l)$.

Věta

Spojité periodická funkce f má vodorovné tětiny všech délek (dvě nejméně, jejichž lišící se levé krajní body leží v jedné periodě).

Důkaz

- 1 Nechť f je spojitá periodická funkce s periodou L a $l > 0$ je libovolné. Chceme ukázat, že pro nějak c platí $f(c) = f(c + l)$.
- 2 Najdeme body $x_m, x_M \in \langle 0, L \rangle$, ve kterých f nabývá svých extrémů. Tj. $f(x_m) = \min_{x \in \langle 0, L \rangle} f(x) = \min_{\mathbb{R}} f(x)$ a $f(x_M) = \max_{x \in \langle 0, L \rangle} f(x) = \max_{\mathbb{R}} f(x)$.

Věta

Spojité periodická funkce f má vodorovné tětiny všech délek (dvě nejméně, jejichž lišící se levé krajní body leží v jedné periodě).

Důkaz

- 1 Nechť f je spojitá periodická funkce s periodou L a $l > 0$ je libovolné. Chceme ukázat, že pro nějak c platí $f(c) = f(c + l)$.
- 2 Najdeme body $x_m, x_M \in \langle 0, L \rangle$, ve kterých f nabývá svých extrémů. Tj. $f(x_m) = \min_{x \in \langle 0, L \rangle} f(x) = \min_{\mathbb{R}} f(x)$ a $f(x_M) = \max_{x \in \langle 0, L \rangle} f(x) = \max_{\mathbb{R}} f(x)$.
- 3 Uvažme pomocnou funkci $g(x) = f(x + l) - f(x)$. Ukážeme, že g má alespoň dva nulové body v $\langle 0, L \rangle$.

Věta

Spojité periodická funkce f má vodorovné tětiny všech délek (dvě nejméně, jejichž lišící se levé krajní body leží v jedné periodě).

Důkaz

- 1 Nechť f je spojitá periodická funkce s periodou L a $l > 0$ je libovolné. Chceme ukázat, že pro nějak c platí $f(c) = f(c + l)$.
- 2 Najdeme body $x_m, x_M \in \langle 0, L \rangle$, ve kterých f nabývá svých extrémů. Tj. $f(x_m) = \min_{x \in \langle 0, L \rangle} f(x) = \min_{\mathbb{R}} f(x)$ a $f(x_M) = \max_{x \in \langle 0, L \rangle} f(x) = \max_{\mathbb{R}} f(x)$.
- 3 Uvažme pomocnou funkci $g(x) = f(x + l) - f(x)$. Ukážeme, že g má alespoň dva nulové body v $\langle 0, L \rangle$.
- 4 Funkce g je spojitá a L -periodická.

Věta

Spojité periodická funkce f má vodorovné tětiny všech délek (dvě nejméně, jejichž lišící se levé krajní body leží v jedné periodě).

Důkaz

- 1 Nechť f je spojitá periodická funkce s periodou L a $l > 0$ je libovolné. Chceme ukázat, že pro nějak c platí $f(c) = f(c + l)$.
- 2 Najdeme body $x_m, x_M \in \langle 0, L \rangle$, ve kterých f nabývá svých extrémů. Tj. $f(x_m) = \min_{x \in \langle 0, L \rangle} f(x) = \min_{\mathbb{R}} f(x)$ a $f(x_M) = \max_{x \in \langle 0, L \rangle} f(x) = \max_{\mathbb{R}} f(x)$.
- 3 Uvažme pomocnou funkci $g(x) = f(x + l) - f(x)$. Ukážeme, že g má alespoň dva nulové body v $\langle 0, L \rangle$.
- 4 Funkce g je spojitá a L -periodická.
- 5 Platí $g(x_m) \geq 0 \geq g(x_M)$. Z **Věty o nabývání mezhodnot** plyne existence nulového bodu g v $\langle 0, L \rangle$.

Důkaz

- 1 Nechť f je spojitá periodická funkce s periodou L a $l > 0$ je libovolné. Chceme ukázat, že pro nějak c platí $f(c) = f(c + l)$.
- 2 Najdeme body $x_m, x_M \in \langle 0, L \rangle$, ve kterých f nabývá svých extrémů. Tj. $f(x_m) = \min_{x \in \langle 0, L \rangle} f(x) = \min_{\mathbb{R}} f(x)$ a $f(x_M) = \max_{x \in \langle 0, L \rangle} f(x) = \max_{\mathbb{R}} f(x)$.
- 3 Uvažme pomocnou funkci $g(x) = f(x + l) - f(x)$. Ukážeme, že g má alespoň dva nulové body v $\langle 0, L \rangle$.
- 4 Funkce g je spojitá a L -periodická.
- 5 Platí $g(x_m) \geq 0 \geq g(x_M)$. Z **Věty o nabývání mezíhodnot** plyne existence nulového bodu g v $\langle 0, L \rangle$.
- 6 Platí $\int_0^L g(x) dx = 0$. Funkce g je tedy buď konstantní 0, nebo má kladné i záporné hodnoty.

Důkaz

- 1 Nechť f je spojitá periodická funkce s periodou L a $l > 0$ je libovolné. Chceme ukázat, že pro nějak c platí $f(c) = f(c + l)$.
- 2 Najdeme body $x_m, x_M \in \langle 0, L \rangle$, ve kterých f nabývá svých extrémů. Tj. $f(x_m) = \min_{x \in \langle 0, L \rangle} f(x) = \min_{\mathbb{R}} f(x)$ a $f(x_M) = \max_{x \in \langle 0, L \rangle} f(x) = \max_{\mathbb{R}} f(x)$.
- 3 Uvažme pomocnou funkci $g(x) = f(x + l) - f(x)$. Ukážeme, že g má alespoň dva nulové body v $\langle 0, L \rangle$.
- 4 Funkce g je spojitá a L -periodická.
- 5 Platí $g(x_m) \geq 0 \geq g(x_M)$. Z **Věty o nabývání mezihodnot** plyne existence nulového bodu g v $\langle 0, L \rangle$.
- 6 Platí $\int_0^L g(x) dx = 0$. Funkce g je tedy buď konstantní 0, nebo má kladné i záporné hodnoty.
- 7 Platí $g(0) = g(L)$. Je-li tato hodnota nulová, je důkaz hotov. Není-li, musí mít g v $\langle 0, L \rangle$ alespoň dva nulové body, má-li tam jeden a nabývá-li kladných i záporných hodnot.

Důsledek

Tvrzení

Spojitá funkce f s vodorovnou tětivou délky 1 má buď vodorovnou tětivu délky a nebo dvě různé vodorovné tětivy délky $1 - a$ (kde $0 < a < 1$).

Tvrzení

Spojité funkce f s vodorovnou tětivou délky 1 má buď vodorovnou tětivu délky a nebo dvě různé vodorovné tětivy délky $1 - a$ (kde $0 < a < 1$).

Důkaz

- 1 BÚNO $f(0) = f(1)$. Uvažme 1-periodickou funkci g , která vznikne jako opakování f .

Tvrzení

Spojité funkce f s vodorovnou tětivou délky 1 má buď vodorovnou tětivu délky a nebo dvě různé vodorovné tětivy délky $1 - a$ (kde $0 < a < 1$).

Důkaz

- 1 BÚNO $f(0) = f(1)$. Uvažme 1-periodickou funkci g , která vznikne jako opakování f .
- 2 Funkce g má jistě dvě různé vodorovné tětivy délky a s levými krajními body v $\langle 0, 1 \rangle$ (viz dříve).

Tvrzení

Spojité funkce f s vodorovnou tětivou délky 1 má buď vodorovnou tětivu délky a nebo dvě různé vodorovné tětivy délky $1 - a$ (kde $0 < a < 1$).

Důkaz

- 1 BÚNO $f(0) = f(1)$. Uvažme 1-periodickou funkci g , která vznikne jako opakování f .
- 2 Funkce g má jistě dvě různé vodorovné tětivy délky a s levými krajními body v $\langle 0, 1 \rangle$ (viz dříve).
- 3 Vodorovná tětiva g začínající v x je také tětivou f , pokud je $x + a \leq 1$.

Tvrzení

Spojité funkce f s vodorovnou tětivou délky 1 má buď vodorovnou tětivu délky a nebo dvě různé vodorovné tětivy délky $1 - a$ (kde $0 < a < 1$).

Důkaz

- 1 BÚNO $f(0) = f(1)$. Uvažme 1-periodickou funkci g , která vznikne jako opakování f .
- 2 Funkce g má jistě dvě různé vodorovné tětivy délky a s levými krajními body v $\langle 0, 1 \rangle$ (viz dříve).
- 3 Vodorovná tětiva g začínající v x je také tětivou f , pokud je $x + a \leq 1$.
- 4 Pokud pro obě tětivy g platí $x + a > 1$, pak $0 < x + a - 1 < 1$,
 $f(x + a - 1) = g(x + a - 1) = g(x + a) = g(x) = f(x)$.

Tvrzení

Spojité funkce f s vodorovnou tětivou délky 1 má buď vodorovnou tětivu délky a nebo dvě různé vodorovné tětivy délky $1 - a$ (kde $0 < a < 1$).

Důkaz

- 1 BÚNO $f(0) = f(1)$. Uvažme 1-periodickou funkci g , která vznikne jako opakování f .
- 2 Funkce g má jistě dvě různé vodorovné tětivy délky a s levými krajními body v $\langle 0, 1 \rangle$ (viz dříve).
- 3 Vodorovná tětiva g začínající v x je také tětivou f , pokud je $x + a \leq 1$.
- 4 Pokud pro obě tětivy g platí $x + a > 1$, pak $0 < x + a - 1 < 1$,
 $f(x + a - 1) = g(x + a - 1) = g(x + a) = g(x) = f(x)$.
- 5 Funkce f má tedy dvě různé vodorovné tětivy délky $1 - a$ (mezi $x + a - 1$ a x).

Úloha pro laskavé posluchače

Spojité periodické funkce má (ne nutně vodorovnou) tětívu libovolné délky, jejíž střed navíc leží na grafu funkce. Tj. pro každou $l > 0$ existuje x , že $f(x + a) - f(x) = f(x) - f(x - a)$.

Důkaz všeobecné třetivové věty

Důkaz kladné části VTV

Tvrzení

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b)$ a $b - a = L$. Pro $n > 1$ přirozené potom existuje alespoň jedno $x \in (a, b)$ takové, že $f(x + L/n) = f(x)$.

Důkaz kladné části VTV

Tvrzení

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b)$ a $b - a = L$. Pro $n > 1$ přirozené potom existuje alespoň jedno $x \in (a, b)$ takové, že $f(x + L/n) = f(x)$.

Důkaz

Bez újmy na obecnosti uvažujme $a = 0$, $b = 1$ (tedy $L = 1$).

1 Nechť $n > 1$ je přirozené číslo.

Důkaz kladné části VTV

Tvrzení

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b)$ a $b - a = L$. Pro $n > 1$ přirozené potom existuje alespoň jedno $x \in (a, b)$ takové, že $f(x + L/n) = f(x)$.

Důkaz

Bez újmy na obecnosti uvažujme $a = 0$, $b = 1$ (tedy $L = 1$).

- 1 Nechť $n > 1$ je přirozené číslo.
- 2 Předpokládejme, že f nemá vodorovnou tětivou délky $1/n$.

Důkaz kladné části VTV

Tvrzení

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b)$ a $b - a = L$. Pro $n > 1$ přirozené potom existuje alespoň jedno $x \in (a, b)$ takové, že $f(x + L/n) = f(x)$.

Důkaz

Bez újmy na obecnosti uvažujme $a = 0$, $b = 1$ (tedy $L = 1$).

- 1 Nechť $n > 1$ je přirozené číslo.
- 2 Předpokládejme, že f nemá vodorovnou tětivu délky $1/n$.
- 3 Uvažme funkci $g(x) = f(x + 1/n) - f(x)$, kde $0 \leq x \leq 1 - 1/n$.

Důkaz kladné části VTV

Tvrzení

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) \neq f(b)$ a $b - a = L$. Pro $n > 1$ přirozené potom existuje alespoň jedno $x \in (a, b)$ takové, že $f(x + L/n) = f(x)$.

Důkaz

Bez újmy na obecnosti uvažujme $a = 0$, $b = 1$ (tedy $L = 1$).

- 1 Nechť $n > 1$ je přirozené číslo.
- 2 Předpokládejme, že f nemá vodorovnou tětivou délky $1/n$.
- 3 Uvažme funkci $g(x) = f(x + 1/n) - f(x)$, kde $0 \leq x \leq 1 - 1/n$.
- 4 Podle předpokladu není $f(x + 1/n)$ nikdy rovno $f(x)$, takže g je nenulová funkce na $\langle 0, 1 - 1/n \rangle$.

Důkaz kladné části VTV

Tvrzení

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b)$ a $b - a = L$. Pro $n > 1$ přirozené potom existuje alespoň jedno $x \in (a, b)$ takové, že $f(x + L/n) = f(x)$.

Důkaz

Bez újmy na obecnosti uvažujme $a = 0$, $b = 1$ (tedy $L = 1$).

- 1 Nechť $n > 1$ je přirozené číslo.
- 2 Předpokládejme, že f nemá vodorovnou tětivou délky $1/n$.
- 3 Uvažme funkci $g(x) = f(x + 1/n) - f(x)$, kde $0 \leq x \leq 1 - 1/n$.
- 4 Podle předpokladu není $f(x + 1/n)$ nikdy rovno $f(x)$, takže g je nenulová funkce na $\langle 0, 1 - 1/n \rangle$.
- 5 Spojitá funkce g nemění na svém definičním oboru znaménko. BÚNO $g > 0$.

Důkaz

1 Speciálně pro g platí

$$g(1 - 1/n) > 0,$$

$$g(1 - 2/n) > 0,$$

$$\vdots$$

$$g(1 - n/n) = g(0) > 0.$$

Důkaz

1 Speciálně pro g platí

$$g(1 - 1/n) > 0,$$

$$g(1 - 2/n) > 0,$$

$$\vdots$$

$$g(1 - n/n) = g(0) > 0.$$

2 Což je v intencích funkce f

$$f(1) - f(1 - 1/n) > 0,$$

$$f(1 - 1/n) - f(1 - 2/n) > 0,$$

$$\vdots$$

$$f(1 - 1/n) - f(1 - n/n) > 0.$$

Důkaz

1 Speciálně pro g platí

$$g(1 - 1/n) > 0,$$

$$g(1 - 2/n) > 0,$$

$$\vdots$$

$$g(1 - n/n) = g(0) > 0.$$

2 Což je v intencích funkce f

$$f(1) - f(1 - 1/n) > 0,$$

$$f(1 - 1/n) - f(1 - 2/n) > 0,$$

$$\vdots$$

$$f(1 - 1/n) - f(1 - n/n) > 0.$$

3 Po sečtení obdržíme $f(1) - f(0) > 0$, což je spor s $f(0) = f(1)$.

Důkaz

1 Speciálně pro g platí

$$\begin{aligned}g(1 - 1/n) &> 0, \\g(1 - 2/n) &> 0, \\&\vdots \\g(1 - n/n) &= g(0) > 0.\end{aligned}$$

2 Což je v intencích funkce f

$$\begin{aligned}f(1) - f(1 - 1/n) &> 0, \\f(1 - 1/n) - f(1 - 2/n) &> 0, \\&\vdots \\f(1 - 1/n) - f(1 - n/n) &> 0.\end{aligned}$$

3 Po sečtení obdržíme $f(1) - f(0) > 0$, což je spor s $f(0) = f(1)$.

4 Z toho plyne, že existuje x , že $f(x + 1/n) - f(x) = 0$.

Důkaz záporné části VTV

Tvrzení

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b)$ a $b - a = L$.
Pokud je $l \neq L/n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak nemusí existovat $x \in (a, b)$ takové, že $f(x + l) = f(x)$.

Tvrzení

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b)$ a $b - a = L$.
Pokud je $l \neq L/n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak nemusí existovat $x \in (a, b)$ takové, že $f(x + l) = f(x)$.

Důkaz

Bez újmy na obecnosti uvažujme $a = 0$, $b = 1$ (tedy $L = 1$). Pro dané $l \in (0, 1) \setminus \{1/n; n \geq 2\}$ zkonstruuujeme f , která nemá vodorovnou tětivu délky l .

Tvrzení

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b)$ a $b - a = L$. Pokud je $l \neq L/n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak nemusí existovat $x \in (a, b)$ takové, že $f(x + l) = f(x)$.

Důkaz

Bez újmy na obecnosti uvažujme $a = 0$, $b = 1$ (tedy $L = 1$). Pro dané $l \in (0, 1) \setminus \{1/n; n \geq 2\}$ zkonstruujeme f , která nemá vodorovnou tětivu délky l .

1 Definujeme

$$f(x) = \sin^2(\pi x/l) - x \sin^2(\pi/l).$$

Tvrzení

Nechť f je spojitá funkce na $\langle a, b \rangle$, $f(a) = f(b)$ a $b - a = L$. Pokud je $l \neq L/n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, pak nemusí existovat $x \in (a, b)$ takové, že $f(x + l) = f(x)$.

Důkaz

Bez újmy na obecnosti uvažujme $a = 0$, $b = 1$ (tedy $L = 1$). Pro dané $l \in (0, 1) \setminus \{1/n; n \geq 2\}$ zkonstruujeme f , která nemá vodorovnou tětivu délky l .

1 Definujeme

$$f(x) = \sin^2(\pi x/l) - x \sin^2(\pi/l).$$

2 Pak $f(0) = f(1) = 0$.

Důkaz

Bez újmy na obecnosti uvažujme $a = 0$, $b = 1$ (tedy $L = 1$). Pro dané $l \in (0, 1) \setminus \{1/n; n \geq 2\}$ zkonstruujeme f , která nemá vodorovnou tětívu délky l .

1 Definujeme

$$f(x) = \sin^2(\pi x/l) - x \sin^2(\pi/l).$$

2 Pak $f(0) = f(1) = 0$.

3 Pokud má f vodorovnou tětívu délky l , pak existuje $c \in \langle 0, 1 \rangle$, že $f(c) = f(c + l)$, tj.

$$\sin^2(\pi c/l) - c \sin^2(\pi/l) = \sin^2(\pi(c + l)/l) - (c + l) \sin^2(\pi/l).$$

Důkaz

Bez újmy na obecnosti uvažujme $a = 0$, $b = 1$ (tedy $L = 1$). Pro dané $l \in (0, 1) \setminus \{1/n; n \geq 2\}$ zkonstruujeme f , která nemá vodorovnou tětivu délky l .

- 1 Definujeme

$$f(x) = \sin^2(\pi x/l) - x \sin^2(\pi/l).$$

- 2 Pak $f(0) = f(1) = 0$.

- 3 Pokud má f vodorovnou tětivu délky l , pak existuje $c \in \langle 0, 1 \rangle$, že $f(c) = f(c + l)$, tj.

$$\sin^2(\pi c/l) - c \sin^2(\pi/l) = \sin^2(\pi(c + l)/l) - (c + l) \sin^2(\pi/l).$$

- 4 Po úpravě $l \sin^2(\pi/l) = 0$, neboli $\pi/l = n\pi$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Tedy $l = 1/n$ a to je spor s volbou l .

Aplikace a zobecnění VTV

Aplikace 1

Uzavřená rovinná křivka, která se otočí n -krát kolem určitého bodu, se musí nejméně $(n - 1)$ -krát sama protnout.

Aplikace 1

Uzavřená rovinná křivka, která se otočí n -krát kolem určitého bodu, se musí nejméně $(n - 1)$ -krát sama protnout.

Důkaz

Tentokrát bez důkazu.

Aplikace 2

Je-li f spojitá funkce a $f(x + y) = g(f(x), y)$ pro všechna x, y , pak je f buď ryze monotónní, nebo konstantní funkce.

Aplikace 2

Je-li f spojitá funkce a $f(x + y) = g(f(x), y)$ pro všechna x, y , pak je f buď ryze monotónní, nebo konstantní funkce.

Důkaz

- 1 Pokud f není ryze monotónní, pak existují c a $l > 0$, že $f(c + l) = f(c)$.

Aplikace 2

Je-li f spojitá funkce a $f(x + y) = g(f(x), y)$ pro všechna x, y , pak je f buď ryze monotónní, nebo konstantní funkce.

Důkaz

1 Pokud f není ryze monotónní, pak existují c a $l > 0$, že $f(c + l) = f(c)$.

2 Pak pro všechna x platí

$$\begin{aligned} f(x + l) &= f((c + l) + (x - c)) = g(f(c + l), x - c) \\ &= g(f(c), x - c) = f(c + (x - c)) = f(x). \end{aligned}$$

Aplikace 2

Je-li f spojitá funkce a $f(x + y) = g(f(x), y)$ pro všechna x, y , pak je f buď ryze monotónní, nebo konstantní funkce.

Důkaz

1 Pokud f není ryze monotónní, pak existují c a $l > 0$, že $f(c + l) = f(c)$.

2 Pak pro všechna x platí

$$\begin{aligned} f(x + l) &= f((c + l) + (x - c)) = g(f(c + l), x - c) \\ &= g(f(c), x - c) = f(c + (x - c)) = f(x). \end{aligned}$$

3 Funkce f má tedy vodorovnou tětivu délky l . Z VTV plyne, že má **libovolně malé** vodorovné tětivy.

Aplikace 2

Je-li f spojitá funkce a $f(x + y) = g(f(x), y)$ pro všechna x, y , pak je f buď ryze monotónní, nebo konstantní funkce.

Důkaz

1 Pokud f není ryze monotónní, pak existují c a $l > 0$, že $f(c + l) = f(c)$.

2 Pak pro všechna x platí

$$\begin{aligned} f(x + l) &= f((c + l) + (x - c)) = g(f(c + l), x - c) \\ &= g(f(c), x - c) = f(c + (x - c)) = f(x). \end{aligned}$$

3 Funkce f má tedy vodorovnou tětivu délky l . Z VTV plyne, že má **libovolně malé** vodorovné tětivy.

4 Výpočet v bodu [2] pak ukazuje, že f je periodická funkce s libovolně malou periodou. Taková funkce je ale **konstantní**.

Aplikace 2

Je-li f spojitá funkce a $f(x + y) = g(f(x), y)$ pro všechna x, y , pak je f buď ryze monotónní, nebo konstantní funkce.

Poznámka

Naopak lze ukázat, že pro každou spojitou funkci f , která je buď ryze monotónní, nebo konstantní, existuje funkce g taková, že $f(x + y) = g(f(x), y)$.

Získali jsme tedy charakterizaci spojitých funkcí, které jsou ryze monotónní, nebo konstantní.

Zobecnění

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a funkci f spojitou na $\langle 0, 1 \rangle$ s vlastností $f(0) = f(1)$ platí, že f má nejméně n vodorovných tětiv, které jsou násobky $1/n$.

Zobecnění

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a funkci f spojitou na $\langle 0, 1 \rangle$ s vlastností $f(0) = f(1)$ platí, že f má nejméně n vodorovných tětiv, které jsou násobky $1/n$.

Důkaz

1 Nechť $1 \leq k \leq n - 1$.

Zobecnění

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a funkci f spojitou na $\langle 0, 1 \rangle$ s vlastností $f(0) = f(1)$ platí, že f má nejméně n vodorovných tětív, které jsou násobky $1/n$.

Důkaz

- 1 Nechť $1 \leq k \leq n - 1$.
- 2 Pokud nemá f vodorovnou tětívu délky k/n , pak musí mít dvě různé tětivy délky $(n - k)/n$ (viz dříve).

Zobecnění

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a funkci f spojitou na $\langle 0, 1 \rangle$ s vlastností $f(0) = f(1)$ platí, že f má nejméně n vodorovných tětív, které jsou násobky $1/n$.

Důkaz

- 1 Nechť $1 \leq k \leq n - 1$.
- 2 Pokud nemá f vodorovnou tětívu délky k/n , pak musí mít dvě různé tětivy délky $(n - k)/n$ (viz dříve).
- 3 Pokud nemá f vodorovnou tětívu délky $(n - k)/n$, pak musí mít dvě tětivy délky k/n (stejný argument).

Zobecnění

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a funkci f spojitou na $\langle 0, 1 \rangle$ s vlastností $f(0) = f(1)$ platí, že f má nejméně n vodorovných tětív, které jsou násobky $1/n$.

Důkaz

- 1 Nechť $1 \leq k \leq n - 1$.
- 2 Pokud nemá f vodorovnou tětívu délky k/n , pak musí mít dvě různé tětivy délky $(n - k)/n$ (viz dříve).
- 3 Pokud nemá f vodorovnou tětívu délky $(n - k)/n$, pak musí mít dvě tětivy délky k/n (stejný argument).
- 4 Funkce f má tedy vždy alespoň dvě tětivy délky $(n - k)/n$ nebo k/n , pokud se tato čísla nerovnají. Pokud ano, má tětíva nutně délku $1/2$ a existuje alespoň jedna.

Zobecnění

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a funkci f spojitou na $\langle 0, 1 \rangle$ s vlastností $f(0) = f(1)$ platí, že f má nejméně n vodorovných tětív, které jsou násobky $1/n$.

Důkaz

- 1 Nechť $1 \leq k \leq n - 1$.
- 2 Pokud nemá f vodorovnou tětívu délky k/n , pak musí mít dvě různé tětivy délky $(n - k)/n$ (viz dříve).
- 3 Pokud nemá f vodorovnou tětívu délky $(n - k)/n$, pak musí mít dvě tětivy délky k/n (stejný argument).
- 4 Funkce f má tedy vždy alespoň dvě tětivy délky $(n - k)/n$ nebo k/n , pokud se tato čísla nerovnají. Pokud ano, má tětíva nutně délku $1/2$ a existuje alespoň jedna.
- 5 Různých tětív s délkou k/n , kde $1 \leq k \leq n - 1$ má f alespoň $n - 1$. Jistě má také tětívu délky n/n . **Tím je věta dokázána.**

Další směr výzkumu

Matematiky zajímalo, jak vlastně mohou **množiny všech vodorovných tětiv spojité funkce** vypadat.

Další směr výzkumu

Matematiky zajímalo, jak vlastně mohou **množiny všech vodorovných tětiv spojité funkce** vypadat.

Definice

Pro funkci f definujeme **množinu všech vodorovných tětiv** jako

$$S(f) = \{l \in \mathbb{R}; \text{ existuje } x \in \mathbb{R}, \text{ že } f(x) = f(x + l)\}.$$

Další směr výzkumu

Matematiky zajímalo, jak vlastně mohou **množiny všech vodorovných tětiv spojitě funkce** vypadat.

Definice

Pro funkci f definujeme **množinu všech vodorovných tětiv** jako

$$S(f) = \{l \in \mathbb{R}; \text{ existuje } x \in \mathbb{R}, \text{ že } f(x) = f(x + l)\}.$$

Co bychom o $S(f)$ uměli povědět?

Nechť je f spojitá na $\langle 0, 1 \rangle$ a $f(0) = f(1)$.

Další směr výzkumu

Matematiky zajímalo, jak vlastně mohou **množiny všech vodorovných tětiv spojitě funkce** vypadat.

Definice

Pro funkce f definujeme **množinu všech vodorovných tětiv** jako

$$S(f) = \{l \in \mathbb{R}; \text{ existuje } x \in \mathbb{R}, \text{ že } f(x) = f(x + l)\}.$$

Co bychom o $S(f)$ uměli povědět?

Nechť je f spojitá na $\langle 0, 1 \rangle$ a $f(0) = f(1)$.

- Triviálně $0 \in S(f)$.

Další směr výzkumu

Matematiky zajímalo, jak vlastně mohou **množiny všech vodorovných tětiv spojitě funkce** vypadat.

Definice

Pro funkce f definujeme **množinu všech vodorovných tětiv** jako

$$S(f) = \{l \in \mathbb{R}; \text{ existuje } x \in \mathbb{R}, \text{ že } f(x) = f(x + l)\}.$$

Co bychom o $S(f)$ uměli povědět?

Nechť je f spojitá na $\langle 0, 1 \rangle$ a $f(0) = f(1)$.

- Triviálně $0 \in S(f)$.
- $S(f)$ obsahuje $1/n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Další směr výzkumu

Matematiky zajímalo, jak vlastně mohou **množiny všech vodorovných tětiv spojitě funkce** vypadat.

Definice

Pro funkci f definujeme **množinu všech vodorovných tětiv** jako

$$S(f) = \{l \in \mathbb{R}; \text{ existuje } x \in \mathbb{R}, \text{ že } f(x) = f(x + l)\}.$$

Co bychom o $S(f)$ uměli povědět?

Nechť je f spojitá na $\langle 0, 1 \rangle$ a $f(0) = f(1)$.

- Triviálně $0 \in S(f)$.
- $S(f)$ obsahuje $1/n$ pro $n \in \mathbb{N}$.
- Pokud $l \notin S(f)$, pak $1 - l \in S(f)$.

Hopfovy množiny

V roce 1937 podal německý matematik **Heinz Hopf** úplné (a snad trochu překvapivé) řešení problému množin všech vodorovných tětiv.



Hopfovy množiny

V roce 1937 podal německý matematik **Heinz Hopf** úplné (a snad trochu překvapivé) řešení problému množin všech vodorovných tětiv.



Hopfovy množiny

V roce 1937 podal německý matematik **Heinz Hopf** úplné (a snad trochu překvapivé) řešení problému množin všech vodorovných tětiv.

Věta (Hopf)

*Množina $S \subset \langle 0, \infty \rangle$ je množinou všech vodorovných tětiv pro nějakou spojitou funkci f , právě když je její doplněk S^* **otevřená** a **aditivní** množina.*

Hopfovy množiny

Definice

Množina X je **aditivní**, pokud platí

$$a, b \in X \Rightarrow a + b \in X.$$

Hopfovy množiny

Definice

Množina X je **aditivní**, pokud platí

$$a, b \in X \Rightarrow a + b \in X.$$

Příklad

Nechť je

$$S = \langle 0; 0, 9 \rangle \cup \langle 1, 1; 1, 8 \rangle \cup \langle 2, 2; 2, 7 \rangle \cup \langle 3, 3; 3, 6 \rangle \cup \{4, 4\}.$$

Pak je

$$S^* = (0, 9; 1, 1) \cup (1, 8; 2, 2) \cup (2, 7; 3, 3) \cup (3, 6; 4, 4) \cup (4, 4; \infty)$$

otevřená a aditivní množina. **Ověřte!**

Definice

Množina X je **aditivní**, pokud platí

$$a, b \in X \Rightarrow a + b \in X.$$

Příklad

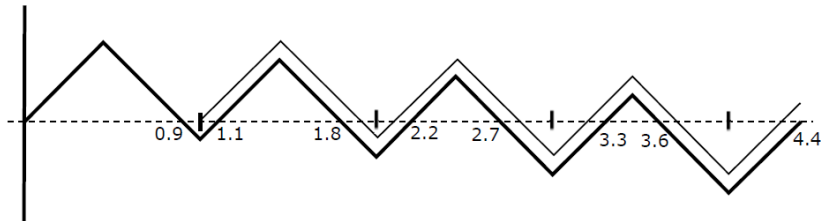
Nechť je

$$S = \langle 0; 0, 9 \rangle \cup \langle 1, 1; 1, 8 \rangle \cup \langle 2, 2; 2, 7 \rangle \cup \langle 3, 3; 3, 6 \rangle \cup \{4, 4\}.$$

Pak je

$$S^* = (0, 9; 1, 1) \cup (1, 8; 2, 2) \cup (2, 7; 3, 3) \cup (3, 6; 4, 4) \cup (4, 4; \infty)$$

otevřená a aditivní množina. **Ověřte!**



Otázka

Jak to bude vypadat s $S(f)$, pokud od funkce f nebudeme požadovat spojitost?

Děkuji za pozornost!