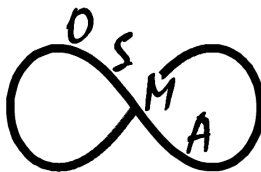
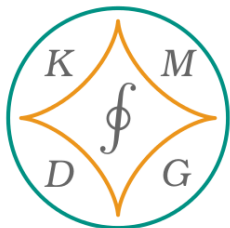


Nebojte se extrémálních bodů!

Konvexní množina a jiná zvířena

Pavel Ludvík



Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TU Ostrava

21. března 2017

Občasný Seminář z Matematické Analýzy





KVÍZ

Co jste to právě slyšeli?

1 Jean-Michel Jarre

KVÍZ

Co jste to právě slyšeli?

1 Jean-Michel Jarre

2 Béla Bartók

KVÍZ

Co jste to právě slyšeli?

- 1 Jean-Michel Jarre
- 2 Béla Bartók
- 3 Leoš Janáček

KVÍZ

Co jste to právě slyšeli?

- 1 Jean-Michel Jarre
- 2 Béla Bartók
- 3 Leoš Janáček
- 4 Leonardo Pisánský

KVÍZ

Co jste to právě slyšeli?

1

2

Béla Bartók (*Koncert pro orchestr* – III. věta)

3

4

KVÍZ

Co jste to právě slyšeli?

1

2

Béla Bartók (*Koncert pro orchestr* – III. věta)

3

4

Leonardo Pisánský

KVÍZ

Co jste to právě slyšeli?

1

2

Béla Bartók (*Koncert pro orchestr* – III. věta)

3

4

Leonardo Pisánský (alias **Fibonacci**)

A co jsme to tedy vlastně slyšeli?

Adagio, ♩ ca 66 (1 1 2 3 5 8 5 3 2 1 1)

rubato *allarg.* - -

Xylophone

mf *p*

Béla Bartók (*Koncert pro orchestr* – III. věta)

- 1 Maďarský skladatel dílo zkomponoval v roce 1943 během svého nuceného exilu v USA za mimořádně složitých životních podmínek.

Béla Bartók (*Koncert pro orchestr* – III. věta)

- 1 Maďarský skladatel dílo zkomponoval v roce 1943 během svého nuceného exilu v USA za mimořádně složitých životních podmínek.
- 2 Slyšeli jste interpretaci **Seijiho Ozawy** s Bostonským symfonickým orchestrem.



Béla Bartók (*Koncert pro orchestr* – III. věta)

- 1 Maďarský skladatel dílo zkomponoval v roce 1943 během svého nuceného exilu v USA za mimořádně složitých životních podmínek.
- 2 Slyšeli jste interpretaci **Seijiho Ozawy** s Bostonským symfonickým orchestrem.
- 3 Fibonacciho posloupnost se vyskytuje v motivu xylofonu.

Béla Bartók (*Koncert pro orchestr* – III. věta)

- 1 Maďarský skladatel dílo zkomponoval v roce 1943 během svého nuceného exilu v USA za mimořádně složitých životních podmínek.
- 2 Slyšeli jste interpretaci **Seijiho Ozawy** s Bostonským symfonickým orchestrem.
- 3 Fibonacciho posloupnost se vyskytuje v motivu xylofonu.
- 4 Fibonacciho posloupnosti využila řada moderních skladatelů:

Béla Bartók (*Koncert pro orchestr* – III. věta)

- 1 Maďarský skladatel dílo zkomponoval v roce 1943 během svého nuceného exilu v USA za mimořádně složitých životních podmínek.
- 2 Slyšeli jste interpretaci **Seijiho Ozawy** s Bostonským symfonickým orchestrem.
- 3 Fibonacciho posloupnost se vyskytuje v motivu xylofonu.
- 4 Fibonacciho posloupnosti využila řada moderních skladatelů:
 - Iannis Xenakis – *Anastenaria, Le sacrifice* (1953)

Béla Bartók (*Koncert pro orchestr* – III. věta)

- 1 Maďarský skladatel dílo zkomponoval v roce 1943 během svého nuceného exilu v USA za mimořádně složitých životních podmínek.
- 2 Slyšeli jste interpretaci **Seijiho Ozawy** s Bostonským symfonickým orchestrem.
- 3 Fibonacciho posloupnost se vyskytuje v motivu xylofonu.
- 4 Fibonacciho posloupnosti využila řada moderních skladatelů:
 - Iannis Xenakis – *Anastenaria, Le sacrifice* (1953)
 - Ernst Krenek – *Fibonacci Mobile* (1964)

Béla Bartók (*Koncert pro orchestr* – III. věta)

- 1 Maďarský skladatel dílo zkomponoval v roce 1943 během svého nuceného exilu v USA za mimořádně složitých životních podmínek.
- 2 Slyšeli jste interpretaci **Seijiho Ozawy** s Bostonským symfonickým orchestrem.
- 3 Fibonacciho posloupnost se vyskytuje v motivu xylofonu.
- 4 Fibonacciho posloupnosti využila řada moderních skladatelů:
 - Iannis Xenakis – *Anastenaria, Le sacrifice* (1953)
 - Ernst Krenek – *Fibonacci Mobile* (1964)
 - Karlheinz Stockhausen

Leonardo Pisánský (alias Fibonacci)

Fibonacci byl věhlasný středověký matematik, autor spisu *Liber Abaci*, kde se posloupnost představuje evropskému publiku.



Leonardo Pisánský (alias Fibonacci)

Fibonacci byl věhlasný středověký matematik, autor spisu *Liber Abaci*, kde se posloupnost představuje evropskému publiku.

Fibonacciho posloupnost

Definice:

$$f_1 = 1,$$

$$f_2 = 1,$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Tedy:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \dots$$

Leonardo Pisánský (alias Fibonacci)

Fibonacci byl věhlasný středověký matematik, autor spisu *Liber Abaci*, kde se posloupnost představuje evropskému publiku.

Fibonacciho posloupnost

Definice:

$$f_1 = 1,$$

$$f_2 = 1,$$

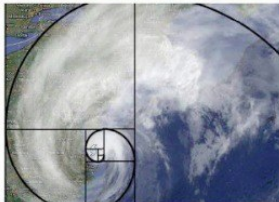
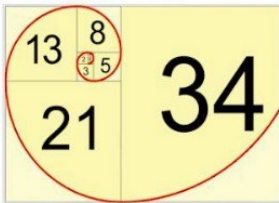
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Tedy:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \dots$$

Na Fibonacciho posloupnost můžete v přírodě narazit na řadě míst, kde byste je vůbec nečekali:

Fibonacciho příroda



Prvních několik Fibonacciho čísel

f_1	1	f_{11}	89	f_{21}	10946	f_{31}	1346269
f_2	1	f_{12}	144	f_{22}	17711	f_{32}	2178309
f_3	2	f_{13}	233	f_{23}	28657	f_{33}	3524578
f_4	3	f_{14}	377	f_{24}	46368	f_{34}	5702887
f_5	5	f_{15}	610	f_{25}	75025	f_{35}	9227465
f_6	8	f_{16}	987	f_{26}	121393	f_{36}	14930352
f_7	13	f_{17}	1597	f_{27}	196418	f_{37}	24157817
f_8	21	f_{18}	2584	f_{28}	317811	f_{38}	39088169
f_9	34	f_{19}	4181	f_{29}	514229	f_{39}	63245986
f_{10}	55	f_{20}	6765	f_{30}	832040	f_{40}	102334155

Další zajímavosti o Fibonaccových číslech

- 1 **David Hilbert** v 10. ze svých slavných problémů vzýval k nalezení algoritmu, který by pro libovolnou polynomiální diofantickou rovnici uměl rozhodnout, zda má celočíselná řešení. Problém vyřešil v roce 1970 dvaadvacetiletý ruský matematik Jurij Matijasevič, přičemž v důkazu využil znalosti růstu Fibonacciho čísel.
- 2 **Édouard Lucas** jich roku 1876 využil k nalezení nového (po více než 100 letech!) Mersennova prvočísla $2^{127} - 1$.

Oblíbená hádanka Lewise Carrola

Věta (Cassiniho identita)

Fibonacciho čísla splňují pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

Oblíbená hádanka Lewise Carrola

Věta (Cassiniho identita)

Fibonacciho čísla splňují pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

Náznak důkazu

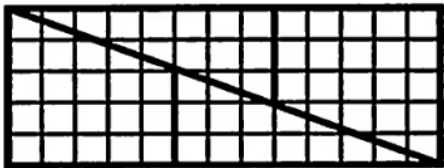
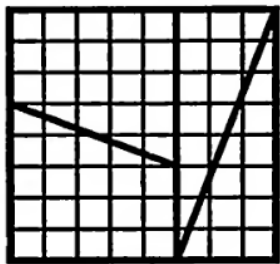
Dokažte maticovou identitu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

a spočtete determinant obou stran.

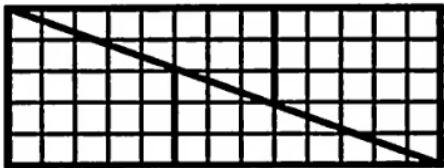
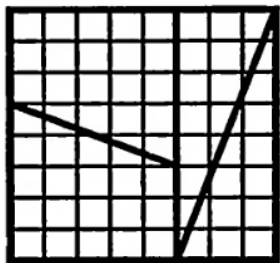
Oblíbená hádanka Lewise Carrola

Na obrázku je čtverec velikosti 8×8 rozdělený na čtyři díly a ty jsou přeuspořádány do obdélníku o rozměrech 5×13 . Nesmysl?



Oblíbená hádanka Lewise Carrola

Na obrázku je čtverec velikosti 8×8 rozdělený na čtyři díly a ty jsou přeuspořádány do obdélníku o rozměrech 5×13 . Nesmysl?



Hint (i něco navíc)

Pro $n = 6$ máme $f_5 f_7 - f_6^2 = 1$, kde $f_6 = 8$, $f_5 = 5$ a $f_7 = 13$.

Úlohy

Úloha 1

Spočtěte hodnotu determinantu matice obecné velikosti $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Úloha 2

Uvažujte posloupnost

$$r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a najděte její limitu, pokud existuje.

Úloha 2

Uvažujte posloupnost

$$r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a najděte její limitu, pokud existuje.

Návod

- 1 Ukažte, že $r_1 < r_3 < r_5 < \dots$ a $r_2 > r_4 > r_6 > \dots$.

Úloha 2

Uvažujte posloupnost

$$r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a najděte její limitu, pokud existuje.

Návod

- 1 Ukažte, že $r_1 < r_3 < r_5 < \dots$ a $r_2 > r_4 > r_6 > \dots$.
- 2 Použijte Cassiniho identitu k důkazu $r_n - r_{n-1} = \frac{(-1)^n}{f_n f_{n-1}}$.

Úloha 2

Uvažujte posloupnost

$$r_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

a najděte její limitu, pokud existuje.

Návod

- 1 Ukažte, že $r_1 < r_3 < r_5 < \dots$ a $r_2 > r_4 > r_6 > \dots$.
- 2 Použijte Cassiniho identitu k důkazu $r_n - r_{n-1} = \frac{(-1)^n}{f_n f_{n-1}}$.
- 3 Limita L tedy existuje a její hodnotu najdeme jako řešení rovnice

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{r_{n-1}} = 1 + \frac{1}{L}. \end{aligned}$$

Generující funkce

Chceme-li se dozvědět něco zajímavého o posloupnosti

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

můžeme tak učinit i nepřímo zkoumáním mocninné řady

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

kterou nazýváme **generující funkcí**.

Generující funkce a Fibonacciho posloupnost

1. Pro Fibonacciho posloupnost je to

$$F(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots ,$$

přičemž **poloměr konvergence** je

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{1}{\tau} > 0,$$

kde τ je hodnota zlatého řezu.

Generující funkce a Fibonacciho posloupnost

2. Vynásobíme $F(x)$ postupně x a x^2

$$xF(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^{n+1} = x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \dots$$

$$x^2 F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^{n+1} = x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + \dots$$

a ty pak sečteme

$$xF(x) + x^2 F(x) = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots$$

$$= x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (f_n + f_{n-1}) x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n = F(x) - x.$$

Generující funkce a Fibonacciho posloupnost

3. Z odvozené rovnosti

$$xF(x) + x^2F(x) = F(x) - x$$

vyjádříme $F(x)$ a upravíme rozkladem na parciální zlomky

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\tau x} - \frac{1}{1-\mu x} \right), \quad \text{kde } \mu = 1 - \tau.$$

Použijeme vzorec pro součet geometrické řady

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots, \quad (q < 1)$$

a dostaneme

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} [(\tau - \mu)x + (\tau^2 - \mu^2)x^2 + \cdots].$$

Generující funkce a Fibonacciho posloupnost

Protože je rozvoj do mocninné řady jednoznačný, porovnáním

$$F(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots,$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} [(\tau - \mu)x + (\tau^2 - \mu^2)x^2 + \dots]$$

dostáváme vzorec pro n -tý člen Fibonacciho posloupnosti

$$f_n = \frac{\tau^n - \mu^n}{\sqrt{5}},$$

jemuž se říká **Binetova formule**.

Generující funkce pro gamblery

Problém

Hráč se účastní **spravedlivé hry**, v níž s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ získá nebo ztratí jednu korunu. Kapitál našeho hráče činí a , kapitál jeho oponenta je b . Hra probíhá, dokud není jeden z hráčů přiveden na mizinu. Spočtete pravděpodobnost, že náš hráč zvítězí.

Funkce generující gamblery

1. Označme $P(n)$ pravděpodobnost vítězství našeho hráče v situaci, kdy má v kapse n korun ($0 \leq n \leq a + b$).

Pokud $n = 0$ nebo $n = a + b$, hra končí. Snadno nahlédneme, že funkce P musí splňovat podmínky:

$$P(n) = \frac{1}{2} P(n-1) + \frac{1}{2} P(n+1) \quad (\text{pro } 0 < n < a+b),$$
$$P(0) = 0 \quad \text{a} \quad P(a+b) = 1.$$

Funkce generující gamblery

2. Uvažujme P jako funkci definovanou na $\mathbb{Z}_0^+$ a splňující výše uvedené podmínky. Definujeme generující funkci

$$F(x) = P(1)x + P(2)x^2 + \dots.$$

Snadno ověříme, že platí

$$F(x) - 2x F(x) + x^2 F(x) = P(1)x,$$

a proto

$$F(x) = P(1) \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Funkce generující gamblery

3. Potřebujeme vyjádřit funkci napravo jako mocninnou řadu

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots,$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} P(1)nx^n.$$

Funkce generující gamblery

Protože

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} P(1) n x^n,$$

dostáváme z jednoznačnosti rozvoje

$$P(n) = P(1) n \quad (\text{pro } n = 0, 1, \dots).$$

Dosazením $n = a + b$ získáme $P(1) = \frac{1}{a+b}$, a tedy

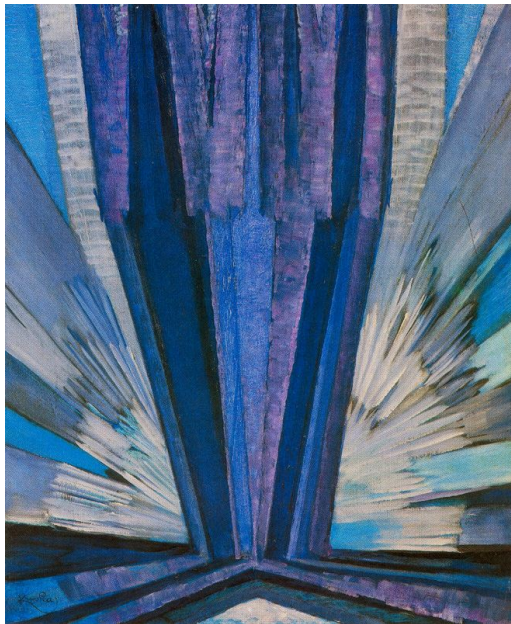
$$P(n) = \frac{n}{a+b}.$$

Klikatá cesta k náhodné procházce

Všimli jste si, že *gamblerská funkce* P měla tzv. **vlastnost střední hodnoty**, tj.

$$P(n) = \frac{1}{2} (P(n-1) + P(n+1)) ?$$

Klikatá cesta k náhodné procházce



Úloha za mřížemi

Problém mřížky

Do čtverců celočíselné mřížky v rovině jsou vepsána čísla mezi 0 a 1 tak, že každé číslo je průměrem čtyř čísel sousedních.

Dokažte, že pak musí být všechna čísla stejná.

Rozbor problému

- Čtverec v celočíselné mřížce označme souřadnicemi jeho levého dolního vrcholu a $f(i, j)$ nechť označuje hodnotu vepsanou do čtverce (i, j) .
- Problém mřížky pak lze přeformulovat: Dokažte, že funkce $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ splňující na definičním oboru podmínku

$$f(i, j) = \frac{1}{4} (f(i-1, j) + f(i+1, j) + f(i, j-1) + f(i, j+1)) , \quad (1)$$

je již nutně **konstantní**.

- Bez nějaké podmínky na **omezenost** f tvrzení neplatí. Uvažte například $f(i, j) = i$.
- Rovnici (1) budeme nazývat **diskrétní vlastností střední hodnoty**.

Princip minima/maxima

Pozorování

Předpokládejme, že f splňuje (1), je **nezáporná** a v nějakém čtverci (i, j) má **hodnotu** 0. Pak musí být nulová **všude**.

Princip minima/maxima

Pozorování

Předpokládejme, že f splňuje (1), je **nezáporná** a v nějakém čtverci (i, j) má **hodnotu** 0. Pak musí být nulová **všude**.

Věta (Princip minima/maxima)

Pokud funkce s diskrétní vlastností střední hodnoty nabývá někde v celočíselné mřížce své nejmenší/největší hodnoty, pak je nutně konstantní.

Princip minima/maxima

Pozorování

Předpokládejme, že f splňuje (1), je **nezáporná** a v nějakém čtverci (i, j) má **hodnotu** 0. Pak musí být nulová **všude**.

Věta (Princip minima/maxima)

Pokud funkce s diskrétní vlastností střední hodnoty nabývá někde v celočíselné mřížce své nejmenší/největší hodnoty, pak je nutně konstantní.

Pokud má f limitu v nekonečnu (tj. $f(i, j) \rightarrow L$ pro nějaké L , pokud $i^2 + j^2 \rightarrow \infty$), pak je *Problém mřížky* vyřešen. My bohužel o limitě funkce f předem nic nevíme.

Definiční hromádka

Definice (Oblast)

Podmnožinu G čtverců v celočíselné mřížce nazveme **oblastí**, pokud se z každého čtverce G lze dostat do libovolného jiného čtverce G konečně mnoha přesuny uvnitř G vždy jen na sousední čtverce.

Definiční hromádka

Definice (Oblast)

Podmnožinu G čtverců v celočíselné mřížce nazveme **oblastí**, pokud se z každého čtverce G lze dostat do libovolného jiného čtverce G konečně mnoha přesuny uvnitř G vždy jen na sousední čtverce.

Definice (Hranice)

Množinu čtverců neležících v oblasti G , ale majících za souseda alespoň jeden čtverec G , nazýváme **hranicí oblasti G** a označujeme ∂G .

Oblast a hranice

		8	5	1		
	3				7	
	8					1
	7					1
		2	4	2	8	

Diskrétní Dirichletova úloha (DDÚ)

- 1 Mohou být čtverce oblasti G vyplněny hodnotami tak, aby měl každý čtverec G vlastnost střední hodnoty?
- 2 Pokud to možné je, kolika způsoby?

Oblast a hranice

		8	5	1		
	3				7	
	8					1
	7					1
		2	4	2	8	

Jednoznačnost řešení DDU

Věta (Zobecněný princip minima/maxima)

Nechť je G omezená oblast a funkce $f : G \cup \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ má diskrétní vlastnost střední hodnoty. Označme jako M největší hodnotu f na $G \cup \partial G$. Pokud f nabývá M někde na G , pak je to konstantní funkce.

Jednoznačnost řešení DDÚ

Věta (Zobecněný princip minima/maxima)

Nechť je G omezená oblast a funkce $f : G \cup \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ má diskrétní vlastnost střední hodnoty. Označme jako M největší hodnotu f na $G \cup \partial G$. Pokud f nabývá M někde na G , pak je to konstantní funkce.

Důkaz

Stejnou úvahou jako původní princip minima/maxima.

Jednoznačnost řešení DDÚ

Věta (Zobecněný princip minima/maxima)

Nechť je G omezená oblast a funkce $f : G \cup \partial G \rightarrow \mathbb{R}$ má diskrétní vlastnost střední hodnoty. Označme jako M největší hodnotu f na $G \cup \partial G$. Pokud f nabývá M někde na G , pak je to konstantní funkce.

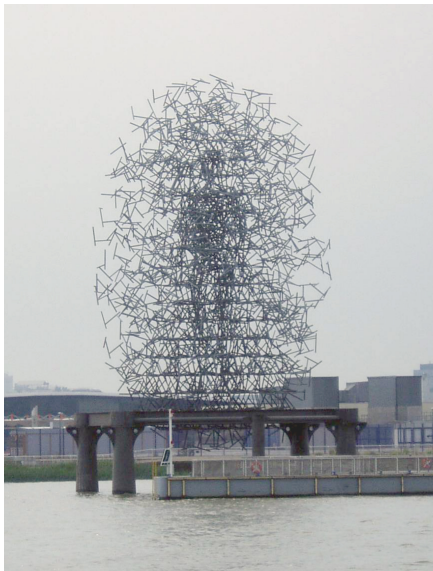
Důkaz

Stejnou úvahou jako původní princip minima/maxima.

Důkaz jednoznačnosti řešení DDÚ

Pokud existují dvě různá řešení DDÚ, vezmeme jejich rozdíl, což je funkce nulová na ∂G , která nabývá svého (nenulového) minima nebo maxima v bodě G . Z principu minima/maxima plyne, že jde o funkci konstantní **nenulovou**, což je spor s **nulovostí** na hranici.

Na procházku náhodnou znovu s plnou parádou



Obrázek : Quantum Cloud v Londýně

Dirichlet (Johann Peter Gustav Lejeune) přistižen na náhodné procházce

Náhodná procházka

Uvažujme náhodnou procházku na čtvercích celočíselné mřížky. Ze čtverce (i, j) můžete (se **stejnou pravděpodobností**) přejít na nějaký ze sousedících čtverců

$$(i - 1, j), (i + 1, j), (i, j - 1) \text{ nebo } (i, j + 1).$$

Dirichlet přistižen na náhodné procházce

- 1 Řešíme DDÚ a chceme nalézt hodnotu $f(P)$ v bodě $P \in G$.

Dirichlet přistižen na náhodné procházce

- 1 Řešíme DDÚ a chceme nalézt hodnotu $f(P)$ v bodě $P \in G$.
- 2 Uvažujme náhodnou procházku z bodu P , kterou ukončíme, jakmile *narazíme* na hranici ∂G , kde jsou hodnoty předepsané.

Dirichlet přistižen na náhodné procházce

- 1 Řešíme DDÚ a chceme nalézt hodnotu $f(P)$ v bodě $P \in G$.
- 2 Uvažujme náhodnou procházku z bodu P , kterou ukončíme, jakmile *narazíme* na hranici ∂G , kde jsou hodnoty předepsané.
- 3 Zobrazení, které bodu P přiřadí hodnotu pole na hranici, kde náhodná procházka končí, je **náhodnou veličinou**.

Dirichlet přistižen na náhodné procházce

- 1 Řešíme DDÚ a chceme nalézt hodnotu $f(P)$ v bodě $P \in G$.
- 2 Uvažujme náhodnou procházku z bodu P , kterou ukončíme, jakmile *narazíme* na hranici ∂G , kde jsou hodnoty předepsané.
- 3 Zobrazení, které bodu P přiřadí hodnotu pole na hranici, kde náhodná procházka končí, je **náhodnou veličinou**.
- 4 Definujme $f(P)$ **střední hodnotou** této náhodné veličiny.

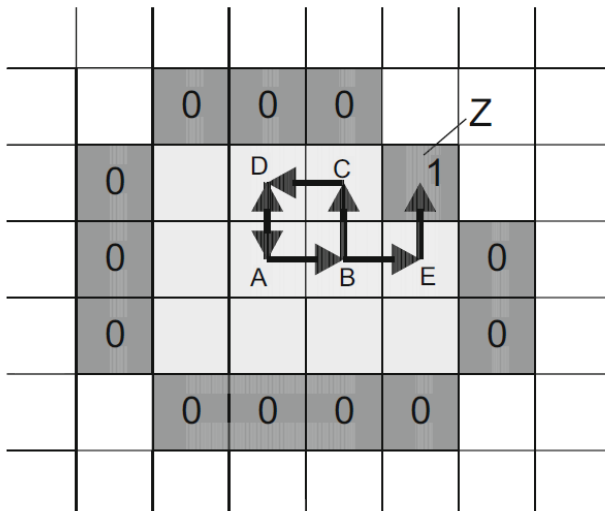
Dirichlet přistižen na náhodné procházce

- 1 Řešíme DDU a chceme nalézt hodnotu $f(P)$ v bodě $P \in G$.
- 2 Uvažujme náhodnou procházku z bodu P , kterou ukončíme, jakmile *narazíme* na hranici ∂G , kde jsou hodnoty předepsané.
- 3 Zobrazení, které bodu P přiřadí hodnotu pole na hranici, kde náhodná procházka končí, je **náhodnou veličinou**.
- 4 Definujme $f(P)$ **střední hodnotou** této náhodné veličiny.
- 5 Z bodu P může procházka pokračovat s pravděpodobností $1/4$ na jedno ze čtyř polí P_- , P_+ , P^- , P^+ . Z těchto polí procházka pokračuje, jako by v nich začala. Proto

$$f(P) = \frac{1}{4} \left(f(P_-) + f(P_+) + f(P^-) + f(P^+) \right).$$

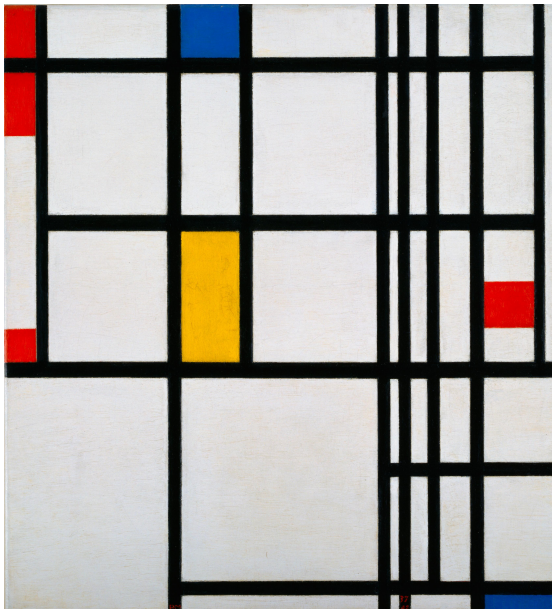
a f má tedy **diskrétní vlastnost střední hodnoty**.

Dirichlet přistižen na náhodné procházce



Obrázek : Ukázka náhodné procházky z $P = A$ do Z : $ABCDADABEZ$.

Řešení úlohy za mřížemi



Řešení úlohy za mřížemi

Problém mřížky

Na polích celočíselné mřížky v rovině je definována funkce f s hodnotami v $\langle 0, 1 \rangle$, přičemž hodnota $f(i, j)$ je průměrem hodnot na čtyřech sousedních polích. **Dokažte, že pak je f konstantní.**

Řešení úlohy za mřížemi

- 1 Označme $\mathcal{F}$ množinu všech funkcí s požadovanou vlastností.

Řešení úlohy za mřížemi

- 1 Označme $\mathcal{F}$ množinu všech funkcí s požadovanou vlastností.
- 2 Definujme

$$\alpha = \sup_{f \in \mathcal{F}} (f(1, 0) - f(0, 0)) .$$

Řešení úlohy za mřížemi

1 Označme $\mathcal{F}$ množinu všech funkcí s požadovanou vlastností.

2 Definujme

$$\alpha = \sup_{f \in \mathcal{F}} (f(1, 0) - f(0, 0)) .$$

3 Protože s každou funkcí $f \in \mathcal{F}$ patří do $\mathcal{F}$ také její rotace 90 stupňů a posunutí o libovolný vektor (i, j) , je ve skutečnosti α supremem všech hodnot $f(P) - f(P')$, kde P, P' jsou sousedící pole a $f \in \mathcal{F}$.

Řešení úlohy za mřížemi

1 Označme $\mathcal{F}$ množinu všech funkcí s požadovanou vlastností.

2 Definujme

$$\alpha = \sup_{f \in \mathcal{F}} (f(1, 0) - f(0, 0)) .$$

3 Protože s každou funkcí $f \in \mathcal{F}$ patří do $\mathcal{F}$ také její rotace 90 stupňů a posunutí o libovolný vektor (i, j) , je ve skutečnosti α supremem všech hodnot $f(P) - f(P')$, kde P, P' jsou sousedící pole a $f \in \mathcal{F}$.

4 Naším cílem je ukázat, že $\alpha = 0$. Tím bude úloha vyřešena.

Řešení úlohy za mřížemi

1 Označme $\mathcal{F}$ množinu všech funkcí s požadovanou vlastností.

2 Definujme

$$\alpha = \sup_{f \in \mathcal{F}} (f(1, 0) - f(0, 0)).$$

3 Protože s každou funkcí $f \in \mathcal{F}$ patří do $\mathcal{F}$ také její rotace 90 stupňů a posunutí o libovolný vektor (i, j) , je ve skutečnosti α supremem všech hodnot $f(P) - f(P')$, kde P, P' jsou sousedící pole a $f \in \mathcal{F}$.

4 Naším cílem je ukázat, že $\alpha = 0$. Tím bude úloha vyřešena.

5 Z definice suprema existuje posloupnost $f_n \in \mathcal{F}$, že

$$f_n(1, 0) - f_n(0, 0) > \alpha - \frac{1}{n}.$$

Řešení úlohy za mřížemi

- 6 Polí (i, j) je v rovině spočetně mnoho, proto je můžeme seřadit do posloupnosti a postupně z $(f_n)_n$ vybírat podposloupnosti, aby $(f_{n_k}(i, j))_k$ konvergovalo. To je možné díky kompaktnosti oboru hodnot $\langle 0, 1 \rangle$.

Řešení úlohy za mřížemi

- 6 Polí (i, j) je v rovině spočetně mnoho, proto je můžeme seřadit do posloupnosti a postupně z $(f_n)_n$ vybírat podposloupnosti, aby $(f_{n_k}(i, j))_k$ konvergovalo. To je možné díky kompaktnosti oboru hodnot $\langle 0, 1 \rangle$.
- 7 Nakonec použijeme **diagonální argument** a získáme podposloupnost $(f_{n_k})_k$ konvergující pro každé (i, j) .

Řešení úlohy za mřížemi

- 6 Polí (i, j) je v rovině spočetně mnoho, proto je můžeme seřadit do posloupnosti a postupně z $(f_n)_n$ vybírat podposloupnosti, aby $(f_{n_k}(i, j))_k$ konvergovalo. To je možné díky kompaktnosti oboru hodnot $\langle 0, 1 \rangle$.
- 7 Nakonec použijeme **diagonální argument** a získáme podposloupnost $(f_{n_k})_k$ konvergující pro každé (i, j) .
- 8 Definujeme

$$f(i, j) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(i, j)$$

a nahlédneme, že platí $f \in \mathcal{F}$ a $\alpha = f(1, 0) - f(0, 0)$.

Řešení úlohy za mřížemi

- 9 Definujeme-li $g(i, j) = f(i + 1, j) - f(i, j)$, pak zřejmě $g(0, 0) = \alpha$ a $g(i, j) \leq \alpha$. Také $g \in \mathcal{F}$.

Řešení úlohy za mřížemi

9 Definujeme-li $g(i, j) = f(i + 1, j) - f(i, j)$, pak zřejmě $g(0, 0) = \alpha$ a $g(i, j) \leq \alpha$. Také $g \in \mathcal{F}$.

10 Z principu maxima plyne, že $g = \alpha$. Speciálně

$$\alpha = g(i, 0) = f(i + 1, 0) - f(i, 0) \quad \text{pro každé } i.$$

Řešení úlohy za mřížemi

9 Definujeme-li $g(i, j) = f(i + 1, j) - f(i, j)$, pak zřejmě $g(0, 0) = \alpha$ a $g(i, j) \leq \alpha$. Také $g \in \mathcal{F}$.

10 Z principu maxima plyne, že $g = \alpha$. Speciálně

$$\alpha = g(i, 0) = f(i + 1, 0) - f(i, 0) \quad \text{pro každé } i.$$

11 Předchozí rovnosti sečteme pro $i = 0, 1, \dots, m - 1$ a dostaneme

$$f(m, 0) - f(0, 0) = m\alpha.$$

Řešení úlohy za mřížemi

9 Definujeme-li $g(i, j) = f(i + 1, j) - f(i, j)$, pak zřejmě $g(0, 0) = \alpha$ a $g(i, j) \leq \alpha$. Také $g \in \mathcal{F}$.

10 Z principu maxima plyne, že $g = \alpha$. Speciálně

$$\alpha = g(i, 0) = f(i + 1, 0) - f(i, 0) \quad \text{pro každé } i.$$

11 Předchozí rovnosti sečteme pro $i = 0, 1, \dots, m - 1$ a dostaneme

$$f(m, 0) - f(0, 0) = m\alpha.$$

12 Protože $f(m, 0), f(0, 0) \in \langle 0, 1 \rangle$, musí být nutně $\alpha = 0$.

Co když mříže zabetonujeme, všechny škvíry utěsníme?



Co když mříže zabejdáme, všechny škvíry utěsníme?

Spojité problém

Nechť je f **omezená spojitá** funkce v rovině s vlastností, že pro každou kružnici k se středem v bodě s a s poloměrem 1 platí

$$f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_k f(x) \, ds.$$

Pak je f **konstantní funkce**.

Pro nástin řešení zabloudíme za trojúhelník



Definice chceme znát víc

Nechť V je v dalším průběhu přednášky reálný vektorový prostor.

Definice (Konvexní množina)

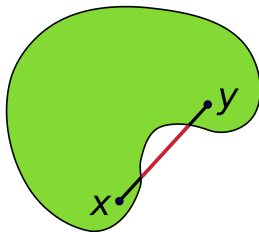
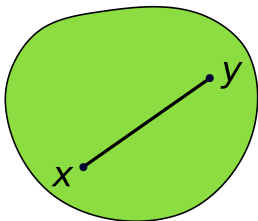
Množina $K \subset V$ je **konvexní**, pokud s každými dvěma body $x, y \in K$ leží v K také úsečka xy . Formálněji: Pro každé $x, y \in K$ a $\lambda \in (0, 1)$ platí $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$.

Definice chceme znát víc

Nechť V je v dalším průběhu přednášky reálný vektorový prostor.

Definice (Konvexní množina)

Množina $K \subset V$ je **konvexní**, pokud s každými dvěma body $x, y \in K$ leží v K také úsečka xy . Formálněji: Pro každé $x, y \in K$ a $\lambda \in (0, 1)$ platí $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$.



A ještě víc

Definice (Konvexní obal)

Konvexním obalem množiny $A \subset V$ se myslí nejmenší konvexní nadmnožina A , neboli průnik všech konvexních nadmnožin A , neboli

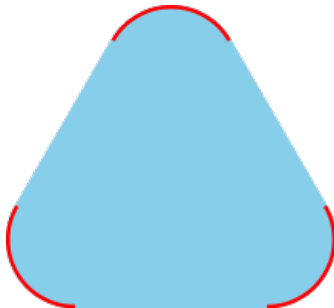
$$\text{conv } A = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j; \text{ kde } x_j \in A, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\}.$$

A ještě víc

Definice (Konvexní obal)

Konvexním obalem množiny $A \subset V$ se myslí nejmenší konvexní nadmnožina A , neboli průnik všech konvexních nadmnožin A , neboli

$$\text{conv } A = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j; \text{ kde } x_j \in A, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\}.$$



A ještě víc

Definice (Konvexní obal)

Konvexním obalem množiny $A \subset V$ se myslí nejmenší konvexní nadmnožina A , neboli průnik všech konvexních nadmnožin A , neboli

$$\text{conv } A = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j; \text{ kde } x_j \in A, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\}.$$

Otázka

Je konvexní obal uzavřené množiny vždy uzavřená množina?

Další definice? Kdo je více!

Definice (Extremální body)

Bod $z \in K \subset V$ nazveme **extremálním bodem** K , pokud není vnitřním bodem žádné úsečky obsažené v K . Formálněji: Platí-li pro nějaké $x, y \in K$, $\lambda \in (0, 1)$ rovnost $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, pak $x = y$.

Množinu extremálních bodů K značíme $\text{ext } K$.

Další definice? Kdo je více!

Definice (Extremální body)

Bod $z \in K \subset V$ nazveme **extremálním bodem** K , pokud není vnitřním bodem žádné úsečky obsažené v K . Formálněji: Platí-li pro nějaké $x, y \in K$, $\lambda \in (0, 1)$ rovnost $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, pak $x = y$.

Množinu extremálních bodů K značíme $\text{ext } K$.

Pozorování

- 1 Vnitřní body nejsou nikdy extremální.
- 2 Body na hranici mohou být extremální.

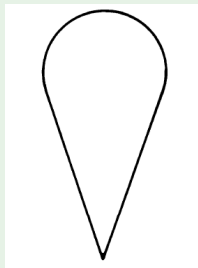
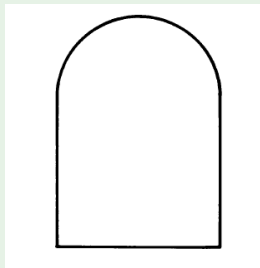
Další definice? Kdo je více!

Definice (Extremální body)

Bod $z \in K \subset V$ nazveme **extremálním bodem** K , pokud není vnitřním bodem žádné úsečky obsažené v K . Formálněji: Platí-li pro nějaké $x, y \in K$, $\lambda \in (0, 1)$ rovnost $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, pak $x = y$.

Množinu extrémálních bodů K značíme $\text{ext } K$.

Určete extrémální body množin:



Další definice? Kdo je více!

Definice (Extremální body)

Bod $z \in K \subset V$ nazveme **extremálním bodem** K , pokud není vnitřním bodem žádné úsečky obsažené v K . Formálněji: Platí-li pro nějaké $x, y \in K$, $\lambda \in (0, 1)$ rovnost $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, pak $x = y$.

Množinu extrémálních bodů K značíme $\text{ext } K$.

Otázky

- 1 Má každá neprázdná kompaktní konvexní množina v $\mathbb{R}^n$ aspoň jeden extrémální bod?
- 2 Je množina extrémálních bodů uzavřené konvexní množiny v rovině vždy uzavřená?

Známosti v konečné dimenzi

Věta (Minkowského věta)

Každý bod kompaktní konvexní množiny $K \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní kombinací extrémálních bodů K , tj.

$$\text{conv}(\text{ext } K) = K .$$

Známosti v konečné dimenzi

Věta (Minkowského věta)

Každý bod kompaktní konvexní množiny $K \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní kombinací extrémálních bodů K , tj.

$$\text{conv}(\text{ext } K) = K .$$

Věta (Carathéodoryho věta)

Každý bod kompaktní konvexní množiny $K \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní kombinací nejvýše $n + 1$ afinně nezávislých extrémálních bodů K .

Nekonečná dimenze

Otázky

Určete $\text{ext } K$, pokud:

- 1 K je množina všech posloupností $(a_n)_n$ takových, že $\sum_n |a_n| \leq 1$.

Nekonečná dimenze

Otázky

Určete $\text{ext } K$, pokud:

- 1 K je množina všech posloupností $(a_n)_n$ takových, že $\sum_n |a_n| \leq 1$.
- 2 K je množina všech posloupností s hodnotami mezi -1 a 1 .

Nekonečná dimenze

Otázky

Určete $\text{ext } K$, pokud:

- 1 K je množina všech posloupností $(a_n)_n$ takových, že $\sum_n |a_n| \leq 1$.
- 2 K je množina všech posloupností s hodnotami mezi -1 a 1 .
- 3 K je množina všech spojitých funkcí s hodnotami mezi -1 a 1 .

Nekonečná dimenze

Otázky

Určete $\text{ext } K$, pokud:

- 1 K je množina všech posloupností $(a_n)_n$ takových, že $\sum_n |a_n| \leq 1$.
- 2 K je množina všech posloupností s hodnotami mezi -1 a 1 .
- 3 K je množina všech spojitých funkcí s hodnotami mezi -1 a 1 .

Věta (Kreinova-Milmanova věta)

Pro každou kompaktní konvexní množinu $K \subset V$ platí

$$\overline{\text{conv}}(\text{ext } K) = K.$$

Návrat za mříže

Problém mřížky

Na polích celočíselné mřížky v rovině je definována funkce f s hodnotami v $\langle 0, 1 \rangle$, přičemž hodnota $f(i, j)$ je průměrem hodnot na čtyřech sousedních polích. **Dokažte, že pak je f konstantní.**

Jiný důkaz

- 1 Označme $\mathcal{F}$ množinu všech takových funkcí (v normovaném vektorovém prostoru se supremovou normou).

Jiný důkaz

- 1 Označme $\mathcal{F}$ množinu všech takových funkcí (v normovaném vektorovém prostoru se supremovou normou).
- 2 Množina $\mathcal{F}$ je zřejmě **konvexní**.

Jiný důkaz

- 1 Označme $\mathcal{F}$ množinu všech takových funkcí (v normovaném vektorovém prostoru se supremovou normou).
- 2 Množina $\mathcal{F}$ je zřejmě **konvexní**.
- 3 Není těžké ukázat, že je také **kompaktní** (to jsme prakticky již udělali využitím *diagonálního argumentu*!).

Jiný důkaz

- 1 Označme $\mathcal{F}$ množinu všech takových funkcí (v normovaném vektorovém prostoru se supremovou normou).
- 2 Množina $\mathcal{F}$ je zřejmě **konvexní**.
- 3 Není těžké ukázat, že je také **kompaktní** (to jsme prakticky již udělali využitím *diagonálního argumentu*!).
- 4 Předpokládáme, že f je extrémální bod $\mathcal{F}$. Označme T posunutí o $(0, 1)$ a S posunutí o $(1, 0)$. Pak máme

$$f = \frac{1}{4}Tf + \frac{1}{4}T^{-1}f + \frac{1}{4}Sf + \frac{1}{4}S^{-1}f,$$

takže z definice extrémálního bodu plyne $f = Tf = Sf$, a proto je f konstantní funkce.

Jiný důkaz

- 1 Označme $\mathcal{F}$ množinu všech takových funkcí (v normovaném vektorovém prostoru se supremovou normou).
- 2 Množina $\mathcal{F}$ je zřejmě **konvexní**.
- 3 Není těžké ukázat, že je také **kompaktní** (to jsme prakticky již udělali využitím *diagonálního argumentu*!).
- 4 Předpokládáme, že f je extrémální bod $\mathcal{F}$. Označme T posunutí o $(0, 1)$ a S posunutí o $(1, 0)$. Pak máme

$$f = \frac{1}{4}Tf + \frac{1}{4}T^{-1}f + \frac{1}{4}Sf + \frac{1}{4}S^{-1}f,$$

takže z definice extrémálního bodu plyne $f = Tf = Sf$, a proto je f konstantní funkce.

- 5 Protože $\text{ext } \mathcal{F}$ tvoří konstantní funkce, plyne z K-M věty plyne, že v $\mathcal{F}$ nic jiného než konstantní funkce není!

Úloha

Obdobně můžete dokázat i zmíněnou **spojitou verzi** úlohy.
Pokuste se o to!

Nezazvonil zvonec, ale úloh už je konec!

Děkuji za pozornost!