

Součty mocnin, Bernoulliho čísla, zeta funkce ...

(... aneb variace na téma součtů, lehčích i těžších)

38. Občasný Seminář z Matematické Analýzy
17.10.2017

KAM FEI VŠB-TU Ostrava
Mirko Rokyta
KMA MFF UK Praha

1. Úvod

C. F. Gauss (1777–1855) a jedna školní úloha:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100 = ?$$

C. F. Gauss (1777–1855) a jedna školní úloha:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100 = ?$$

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

C. F. Gauss (1777–1855) a jedna školní úloha:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100 = ?$$

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

$$S = 50 \cdot 101 = 5050$$

C. F. Gauss (1777–1855) a jedna školní úloha:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100 = ?$$

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

$$S = 50 \cdot 101 = 5050 = \frac{n}{2} \cdot (n + 1)$$

C. F. Gauss (1777–1855) a jedna školní úloha:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100 = ?$$

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

$$S = 50 \cdot 101 = 5050 = \frac{n}{2} \cdot (n + 1)$$

Odvodili jsme vzorec pro součet **prvních** mocnin přirozených čísel:

$$S_1(n) = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

C. F. Gauss (1777–1855) a jedna školní úloha:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100 = ?$$

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

$$S = 50 \cdot 101 = 5050 = \frac{n}{2} \cdot (n + 1)$$

Odvodili jsme vzorec pro součet **prvních** mocnin přirozených čísel:

$$S_1(n) = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Poznámka: tohle Gaussovo odvození funguje pro sudý počet sčítanců. Co s lichým počtem?

C. F. Gauss (1777–1855) a jedna školní úloha:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100 = ?$$

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 + 51 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

$$S = 50 \cdot 101 = 5050 = \frac{n}{2} \cdot (n + 1)$$

Odvodili jsme vzorec pro součet **prvních** mocnin přirozených čísel:

$$S_1(n) = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Poznámka: tohle Gaussovo odvození funguje pro sudý počet sčítanců. Co s lichým počtem? Vyjde totéž... zkuste.

Tedy víme:

$$S_1(n) = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tedy víme:

$$S_1(n) = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Častý dotaz z řad studentů:

Tedy víme:

$$S_1(n) = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Častý dotaz z řad studentů:

$$S_2(n) = 1^2 + \cdots + n^2 = ?$$

Tedy víme:

$$S_1(n) = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Častý dotaz z řad studentů:

$$S_2(n) = 1^2 + \cdots + n^2 = ? = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Tedy víme:

$$S_1(n) = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Častý dotaz z řad studentů:

$$S_2(n) = 1^2 + \cdots + n^2 = ? = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3(n) = 1^3 + \cdots + n^3 = ?$$

Tedy víme:

$$S_1(n) = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Častý dotaz z řad studentů:

$$S_2(n) = 1^2 + \cdots + n^2 = ? = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3(n) = 1^3 + \cdots + n^3 = ? = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Tedy víme:

$$S_1(n) = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Častý dotaz z řad studentů:

$$S_2(n) = 1^2 + \cdots + n^2 = ? = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3(n) = 1^3 + \cdots + n^3 = ? = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

...

Tedy víme:

$$S_1(n) = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Častý dotaz z řad studentů:

$$S_2(n) = 1^2 + \cdots + n^2 = ? = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3(n) = 1^3 + \cdots + n^3 = ? = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

...

$$S_p(n) = 1^p + \cdots + n^p = ???$$

Tedy víme:

$$S_1(n) = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Častý dotaz z řad studentů:

$$S_2(n) = 1^2 + \cdots + n^2 = ? = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3(n) = 1^3 + \cdots + n^3 = ? = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

...

$$S_p(n) = 1^p + \cdots + n^p = ???$$

... a hlavně: jak tyto vztahy odvodit?

Co je dnes na programu:

Co je dnes na programu:

- Elementární odvození rekurentních vzorců pro $S_p(n)$ (středoškolskými metodami, ale výsledek není v explicitním tvaru).

Co je dnes na programu:

- Elementární odvození rekurentních vzorců pro $S_p(n)$ (středoškolskými metodami, ale výsledek není v explicitním tvaru).
- Ještě kratší odvození vzorců pro $S_p(n)$ (ale příliš se tam derivuje a nejsou moc vhodné pro výpočty).

Co je dnes na programu:

- Elementární odvození rekurentních vzorců pro $S_p(n)$ (středoškolskými metodami, ale výsledek není v explicitním tvaru).
- Ještě kratší odvození vzorců pro $S_p(n)$ (ale příliš se tam derivuje a nejsou moc vhodné pro výpočty).
- Odvození tzv. Faulhaberových (Bernoulliho) vzorců pro $S_p(n)$ v explicitním tvaru (výsledek, o který usilujeme, má však neelementární odvození).

Co je dnes na programu:

- Elementární odvození rekurentních vzorců pro $S_p(n)$ (středoškolskými metodami, ale výsledek není v explicitním tvaru).
- Ještě kratší odvození vzorců pro $S_p(n)$ (ale příliš se tam derivuje a nejsou moc vhodné pro výpočty).
- Odvození tzv. Faulhaberových (Bernoulliho) vzorců pro $S_p(n)$ v explicitním tvaru (výsledek, o který usilujeme, má však neelementární odvození).
- Bernoulli byl pěkné číslo.

Co je dnes na programu:

- Elementární odvození rekurentních vzorců pro $S_p(n)$ (středoškolskými metodami, ale výsledek není v explicitním tvaru).
- Ještě kratší odvození vzorců pro $S_p(n)$ (ale příliš se tam derivuje a nejsou moc vhodné pro výpočty).
- Odvození tzv. Faulhaberových (Bernoulliho) vzorců pro $S_p(n)$ v explicitním tvaru (výsledek, o který usilujeme, má však neelementární odvození).
- Bernoulli byl pěkné číslo.
- A co součty převrácených hodnot mocnin přirozených čísel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$?

Co je dnes na programu:

- Elementární odvození rekurentních vzorců pro $S_p(n)$ (středoškolskými metodami, ale výsledek není v explicitním tvaru).
- Ještě kratší odvození vzorců pro $S_p(n)$ (ale příliš se tam derivuje a nejsou moc vhodné pro výpočty).
- Odvození tzv. Faulhaberových (Bernoulliho) vzorců pro $S_p(n)$ v explicitním tvaru (výsledek, o který usilujeme, má však neelementární odvození).
- Bernoulli byl pěkné číslo.
- A co součty převrácených hodnot mocnin přirozených čísel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$? ... a třeba padne i magické slovo "zeta" a tím se přiblížíme až k problému, za jehož vyřešení lze obdržet milion dolarů.

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_2(n)$ potřebuje binomickou větu pro 3. mocninu:

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_2(n)$ potřebuje binomickou větu pro **3.** mocninu:

$$(k + 1)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_2(n)$ potřebuje binomickou větu pro **3.** mocninu:

$$(k+1)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3$$

$$(k+1)^3 - k^3 = 1 + 3k + 3k^2$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_2(n)$ potřebuje binomickou větu pro **3.** mocninu:

$$(k+1)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3$$

$$(k+1)^3 - k^3 = 1 + 3k + 3k^2 \quad \left| \sum_{k=1}^n \right.$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_2(n)$ potřebuje binomickou větu pro **3.** mocninu:

$$(k+1)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3$$

$$(k+1)^3 - k^3 = 1 + 3k + 3k^2 \quad \left| \sum_{k=1}^n \right.$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \left((k+1)^3 - k^3 \right)} = n + 3 \underbrace{\sum_{k=1}^n k} + 3 \underbrace{\sum_{k=1}^n k^2}$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_2(n)$ potřebuje binomickou větu pro 3. mocninu:

$$(k+1)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3$$

$$(k+1)^3 - k^3 = 1 + 3k + 3k^2 \quad \left| \sum_{k=1}^n \right.$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \left((k+1)^3 - k^3 \right)}_{((n+1)^3 - n^3) + (n^3 - (n-1)^3) + \dots} = n + 3 \underbrace{\sum_{k=1}^n k} + 3 \underbrace{\sum_{k=1}^n k^2}$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_2(n)$ potřebuje binomickou větu pro 3. mocninu:

$$(k+1)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3$$

$$(k+1)^3 - k^3 = 1 + 3k + 3k^2 \quad \left| \sum_{k=1}^n \right.$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \left((k+1)^3 - k^3 \right)}_{\substack{((n+1)^3 - n^3) + (n^3 - (n-1)^3) + \dots \\ (n+1)^3 - 1}} = n + 3 \underbrace{\sum_{k=1}^n k} + 3 \underbrace{\sum_{k=1}^n k^2}$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_2(n)$ potřebuje binomickou větu pro 3. mocninu:

$$(k+1)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3$$

$$(k+1)^3 - k^3 = 1 + 3k + 3k^2 \quad \left| \sum_{k=1}^n \right.$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \left((k+1)^3 - k^3 \right)}_{\substack{((n+1)^3 - n^3) + (n^3 - (n-1)^3) + \dots \\ (n+1)^3 - 1}} = n + 3 \underbrace{\sum_{k=1}^n k}_{S_1(n)} + 3 \underbrace{\sum_{k=1}^n k^2}_{S_2(n)}$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_2(n)$ potřebuje binomickou větu pro 3. mocninu:

$$(k+1)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3$$

$$(k+1)^3 - k^3 = 1 + 3k + 3k^2 \quad \left| \sum_{k=1}^n \right.$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3)}_{((n+1)^3 - n^3) + (n^3 - (n-1)^3) + \dots (n+1)^3 - 1} = n + 3 \underbrace{\sum_{k=1}^n k}_{S_1(n)} + 3 \underbrace{\sum_{k=1}^n k^2}_{S_2(n)}$$
$$(n+1)^3 - 1 = n + 3S_1(n) + 3S_2(n)$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_2(n)$ potřebuje binomickou větu pro 3. mocninu:

$$(k+1)^3 = 1 + 3k + 3k^2 + k^3$$

$$(k+1)^3 - k^3 = 1 + 3k + 3k^2 \quad \left| \sum_{k=1}^n \right.$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \left((k+1)^3 - k^3 \right)}_{((n+1)^3 - n^3) + (n^3 - (n-1)^3) + \dots} = n + 3 \underbrace{\sum_{k=1}^n k}_{S_1(n)} + 3 \underbrace{\sum_{k=1}^n k^2}_{S_2(n)}$$

$$(n+1)^3 - 1 = n + 3S_1(n) + 3S_2(n)$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3} \left[(n+1)^3 - (n+1) - 3S_1(n) \right]$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$$S_2(n) = \frac{1}{3} [(n+1)^3 - (n+1) - 3S_1(n)]$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \frac{1}{3} [(n+1)^3 - (n+1) - 3S_1(n)] \\ &= \frac{1}{3} \left[(n+1)^3 - (n+1) - \frac{3}{2}n(n+1) \right] \end{aligned}$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \frac{1}{3} [(n+1)^3 - (n+1) - 3S_1(n)] \\ &= \frac{1}{3} \left[(n+1)^3 - (n+1) - \frac{3}{2}n(n+1) \right] \\ &= \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \frac{1}{3} [(n+1)^3 - (n+1) - 3S_1(n)] \\ &= \frac{1}{3} \left[(n+1)^3 - (n+1) - \frac{3}{2}n(n+1) \right] \\ &= \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Zvládneme to pro obecnou mocninu?

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_2(n)$ potřebuje binomickou větu pro 3. mocninu:

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_p(n)$ potřebuje binomickou větu pro $(p+1)$. mocninu:

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_p(n)$ potřebuje binomickou větu pro $(p+1)$. mocninu:

$$(k+1)^{p+1} = 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j + k^{p+1}$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_p(n)$ potřebuje binomickou větu pro $(p+1)$. mocninu:

$$(k+1)^{p+1} = 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j + k^{p+1}$$

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_p(n)$ potřebuje binomickou větu pro $(p+1)$. mocninu:

$$(k+1)^{p+1} = 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j + k^{p+1}$$

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j \quad \Bigg| \quad \sum_{k=1}^n$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_p(n)$ potřebuje binomickou větu pro $(p+1)$. mocninu:

$$\begin{aligned}(k+1)^{p+1} &= 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j + k^{p+1} \\(k+1)^{p+1} - k^{p+1} &= 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j \quad \Bigg| \quad \sum_{k=1}^n \\ \underbrace{\sum_{k=1}^n \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1} \right)} &= n + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} \underbrace{\sum_{k=1}^n k^j}\end{aligned}$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_p(n)$ potřebuje binomickou větu pro $(p+1)$. mocninu:

$$(k+1)^{p+1} = 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j + k^{p+1}$$

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j \quad \Bigg| \quad \sum_{k=1}^n$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1} \right)}_{\substack{\left((n+1)^{p+1} - n^{p+1} \right) + \left(n^{p+1} - (n-1)^{p+1} \right) + \dots}} = n + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} \underbrace{\sum_{k=1}^n k^j}$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_p(n)$ potřebuje binomickou větu pro $(p+1)$. mocninu:

$$(k+1)^{p+1} = 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j + k^{p+1}$$

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j \quad \Bigg| \quad \sum_{k=1}^n$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1} \right)}_{\substack{(n+1)^{p+1} - n^{p+1} \\ + (n^{p+1} - (n-1)^{p+1}) \\ + \dots}} = n + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} \underbrace{\sum_{k=1}^n k^j}$$

$$\left((n+1)^{p+1} - n^{p+1} \right) + \left(n^{p+1} - (n-1)^{p+1} \right) + \dots$$

$$(n+1)^{p+1} - 1 =$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_p(n)$ potřebuje binomickou větu pro $(p+1)$. mocninu:

$$(k+1)^{p+1} = 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j + k^{p+1}$$

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j \quad \Bigg| \quad \sum_{k=1}^n$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \left((k+1)^{p+1} - k^{p+1} \right)}_{((n+1)^{p+1} - n^{p+1}) + (n^{p+1} - (n-1)^{p+1}) + \dots} = n + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} \underbrace{\sum_{k=1}^n k^j}_{S_j(n)}$$

$$(n+1)^{p+1} - 1 =$$

2. První odvození (na méně než 10 řádků)

$S_p(n)$ potřebuje binomickou větu pro $(p+1)$. mocninu:

$$(k+1)^{p+1} = 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j + k^{p+1}$$

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = 1 + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} k^j \quad \left| \sum_{k=1}^n \right.$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n ((k+1)^{p+1} - k^{p+1})}_{((n+1)^{p+1} - n^{p+1}) + (n^{p+1} - (n-1)^{p+1}) + \dots} = n + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} \underbrace{\sum_{k=1}^n k^j}_{S_j(n)}$$

$$(n+1)^{p+1} - 1 = n + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} S_j(n)$$

Kopie předchozího řádku:

$$(n+1)^{p+1} - 1 = n + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} S_j(n)$$

Kopie předchozího řádku:

$$(n+1)^{p+1} - 1 = n + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} S_j(n)$$

$$(n+1)^{p+1} - (n+1) = \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) + (p+1)S_p(n)$$

Kopie předchozího řádku:

$$(n+1)^{p+1} - 1 = n + \sum_{j=1}^p \binom{p+1}{j} S_j(n)$$

$$(n+1)^{p+1} - (n+1) = \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) + (p+1)S_p(n)$$

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right]$$

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right]$$

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right]$$

$p = 2$ už umíme, takže zkusme třeba $p = 3$:

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right]$$

$p = 2$ už umíme, takže zkusme třeba $p = 3$:

$$S_3(n) = \frac{1}{4} \left[(n+1)^4 - (n+1) - \binom{4}{1} S_1(n) - \binom{4}{2} S_2(n) \right]$$

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right]$$

$p = 2$ už umíme, takže zkusme třeba $p = 3$:

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{4} \left[(n+1)^4 - (n+1) - \binom{4}{1} S_1(n) - \binom{4}{2} S_2(n) \right] \\ &= \frac{n+1}{4} \left((n^3 + 3n^2 + 3n) - 2n - n(2n+1) \right) \end{aligned}$$

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right]$$

$p = 2$ už umíme, takže zkusme třeba $p = 3$:

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{4} \left[(n+1)^4 - (n+1) - \binom{4}{1} S_1(n) - \binom{4}{2} S_2(n) \right] \\ &= \frac{n+1}{4} \left((n^3 + 3n^2 + 3n) - 2n - n(2n+1) \right) \\ &= \frac{n+1}{4} (n^3 + n^2) \end{aligned}$$

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right]$$

$p = 2$ už umíme, takže zkusme třeba $p = 3$:

$$\begin{aligned} S_3(n) &= \frac{1}{4} \left[(n+1)^4 - (n+1) - \binom{4}{1} S_1(n) - \binom{4}{2} S_2(n) \right] \\ &= \frac{n+1}{4} \left((n^3 + 3n^2 + 3n) - 2n - n(2n+1) \right) \\ &= \frac{n+1}{4} (n^3 + n^2) \\ S_3(n) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Postupně lze takto dostat všechny součty $S_p(n)$.

Postupně lze takto dostat všechny součty $S_p(n)$.

Výhody:

- relativně jednoduché odvození (binomická věta a dalších pár řádků)

Postupně lze takto dostat všechny součty $S_p(n)$.

Výhody:

- relativně jednoduché odvození (binomická věta a dalších pár řádků)
- relativně jednoduchý výsledný vztah

Postupně lze takto dostat všechny součty $S_p(n)$.

Výhody:

- relativně jednoduché odvození (binomická věta a dalších pár řádků)
- relativně jednoduchý výsledný vztah

Nevýhody:

- pro výpočet $S_k(n)$ je potřeba znát všechny $S_1(n), \dots, S_{k-1}(n)$

Postupně lze takto dostat všechny součty $S_p(n)$.

Výhody:

- relativně jednoduché odvození (binomická věta a dalších pár řádků)
- relativně jednoduchý výsledný vztah

Nevýhody:

- pro výpočet $S_k(n)$ je potřeba znát všechny $S_1(n), \dots, S_{k-1}(n)$
- výpočty jsou čím dál obtížnější - jde o rekurenci se stále se zvyšujícím počtem členů

Pohledem na (např.) první čtyři výsledky však lze učinit jakési pozorování:

Pohledem na (např.) první čtyři výsledky však lze učinit jakési pozorování:

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Pohledem na (např.) první čtyři výsledky však lze učinit jakési pozorování:

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

Pohledem na (např.) první čtyři výsledky však lze učinit jakési pozorování:

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

Pohledem na (např.) první čtyři výsledky však lze učinit jakési pozorování:

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$\begin{aligned} S_4(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \\ &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \end{aligned}$$

Pohledem na (např.) první čtyři výsledky však lze učinit jakési pozorování:

$$\begin{aligned}S_1(n) &= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\S_2(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\S_3(n) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \\S_4(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \\&= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}\end{aligned}$$

Možná vidíme, že by šly vyslovit 3-4 hypotézy ...

Pohledem na (např.) první čtyři výsledky však lze učinit jakési pozorování:

$$\begin{aligned}S_1(n) &= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\S_2(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\S_3(n) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} \\S_4(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \\&= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}\end{aligned}$$

Možná vidíme, že by šly vyslovit 3-4 hypotézy ... které se ukáží být pravdivými.

Tvrzení

$S_p(n)$ je polynom stupně $p+1$ v proměnné n , s nulovým koeficientem u absolutního členu, přičemž koeficient u mocniny n^{p+1} je roven $\frac{1}{p+1}$ a koeficient u n^p je roven $\frac{1}{2}$.

Tvrzení

$S_p(n)$ je polynom stupně $p+1$ v proměnné n , s nulovým koeficientem u absolutního členu, přičemž koeficient u mocniny n^{p+1} je roven $\frac{1}{p+1}$ a koeficient u n^p je roven $\frac{1}{2}$. Existují tedy $\alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ taková, že

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \sum_{j=2}^p \alpha_j n^{p+1-j}.$$

Tvrzení

$S_p(n)$ je polynom stupně $p+1$ v proměnné n , s nulovým koeficientem u absolutního členu, přičemž koeficient u mocniny n^{p+1} je roven $\frac{1}{p+1}$ a koeficient u n^p je roven $\frac{1}{2}$. Existují tedy $\alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ taková, že

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \sum_{j=2}^p \alpha_j n^{p+1-j}.$$

Důkaz: indukcí podle p :

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Tvrzení

$S_p(n)$ je polynom stupně $p+1$ v proměnné n , s nulovým koeficientem u absolutního členu, přičemž koeficient u mocniny n^{p+1} je roven $\frac{1}{p+1}$ a koeficient u n^p je roven $\frac{1}{2}$. Existují tedy $\alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ taková, že

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \sum_{j=2}^p \alpha_j n^{p+1-j}.$$

Důkaz: indukcí podle p :

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \quad \dots OK.$$

$p \geq 2$ (budeme si všímat jen mocnin n^{p+1} , n^p a n^0):

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right]$$

$p \geq 2$ (budeme si všímat jen mocnin n^{p+1} , n^p a n^0):

$$\begin{aligned} S_p(n) &= \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right] \\ &= \frac{1}{p+1} \left[\left(n^{p+1} + n^p(p+1) + \dots + 1 \right) - (n+1) \right] \end{aligned}$$

$p \geq 2$ (budeme si všímat jen mocnin n^{p+1} , n^p a n^0):

$$\begin{aligned}
 S_p(n) &= \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right] \\
 &= \frac{1}{p+1} \left[\left(n^{p+1} + n^p(p+1) + \dots + 1 \right) - (n+1) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\binom{p+1}{p-1} \left(\frac{n^p}{p} + \dots \right) + \dots \right) \right]
 \end{aligned}$$

$p \geq 2$ (budeme si všímat jen mocnin n^{p+1} , n^p a n^0):

$$\begin{aligned}
 S_p(n) &= \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right] \\
 &= \frac{1}{p+1} \left[\left(n^{p+1} + n^p(p+1) + \dots + 1 \right) - (n+1) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\binom{p+1}{p-1} \left(\frac{n^p}{p} + \dots \right) + \dots \right) \right] \\
 &= \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{p+1} \left((p+1) - \frac{(p+1)p}{2} \cdot \frac{1}{p} \right) + \dots + 0
 \end{aligned}$$

$p \geq 2$ (budeme si všímat jen mocnin n^{p+1} , n^p a n^0):

$$\begin{aligned}
 S_p(n) &= \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right] \\
 &= \frac{1}{p+1} \left[\left(n^{p+1} + n^p(p+1) + \dots + 1 \right) - (n+1) \right. \\
 &\quad \left. - \left(\binom{p+1}{p-1} \left(\frac{n^p}{p} + \dots \right) + \dots \right) \right] \\
 &= \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{p+1} \left((p+1) - \frac{(p+1)p}{2} \cdot \frac{1}{p} \right) + \dots + 0
 \end{aligned}$$

odkud už plynou všechna tvrzení Tvrzení.

$p \geq 2$ (budeme si všímat jen mocnin n^{p+1} , n^p a n^0):

$$\begin{aligned} S_p(n) &= \frac{1}{p+1} \left[(n+1)^{p+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_j(n) \right] \\ &= \frac{1}{p+1} \left[\left(n^{p+1} + n^p(p+1) + \dots + 1 \right) - (n+1) \right. \\ &\quad \left. - \left(\binom{p+1}{p-1} \left(\frac{n^p}{p} + \dots \right) + \dots \right) \right] \\ &= \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{p+1} \left((p+1) - \frac{(p+1)p}{2} \cdot \frac{1}{p} \right) + \dots + 0 \end{aligned}$$

odkud už plynou všechna tvrzení Tvrzení.

Zbylé koeficienty $\alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ není vůbec lehké vyjádřit... jak uvidíme později...

3. Druhé odvození (na 3 řádky)

3. Druhé odvození (na 3 řádky)

Pozorování:

$$(e^{kx})' = ke^{kx},$$

3. Druhé odvození (na 3 řádky)

Pozorování:

$$(e^{kx})' = ke^{kx}, (e^{kx})'' = k^2 e^{kx},$$

3. Druhé odvození (na 3 řádky)

Pozorování:

$$(e^{kx})' = ke^{kx}, (e^{kx})'' = k^2 e^{kx}, \dots, (e^{kx})^{(p)} = k^p e^{kx}$$

3. Druhé odvození (na 3 řádky)

Pozorování:

$$(e^{kx})' = ke^{kx}, (e^{kx})'' = k^2 e^{kx}, \dots, (e^{kx})^{(p)} = k^p e^{kx}$$

Odtud onen třířádkový výpočet ($x \neq 0$):

$$\sum_{k=1}^n e^{kx} = \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x}$$

3. Druhé odvození (na 3 řádky)

Pozorování:

$$(e^{kx})' = ke^{kx}, (e^{kx})'' = k^2 e^{kx}, \dots, (e^{kx})^{(p)} = k^p e^{kx}$$

Odtud onen třířádkový výpočet ($x \neq 0$):

$$\sum_{k=1}^n e^{kx} = \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \quad \left| \frac{d^p}{dx^p} \right.$$

3. Druhé odvození (na 3 řádky)

Pozorování:

$$(e^{kx})' = ke^{kx}, (e^{kx})'' = k^2 e^{kx}, \dots, (e^{kx})^{(p)} = k^p e^{kx}$$

Odtud onen třířádkový výpočet ($x \neq 0$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{kx} &= \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \quad \left| \frac{d^p}{dx^p} \right. \\ \sum_{k=1}^n k^p e^{kx} &= \frac{d^p}{dx^p} \left(\frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \right) \end{aligned}$$

3. Druhé odvození (na 3 řádky)

Pozorování:

$$(e^{kx})' = ke^{kx}, (e^{kx})'' = k^2 e^{kx}, \dots, (e^{kx})^{(p)} = k^p e^{kx}$$

Odtud onen třířádkový výpočet ($x \neq 0$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{kx} &= \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \quad \left| \frac{d^p}{dx^p} \right. \\ \sum_{k=1}^n k^p e^{kx} &= \frac{d^p}{dx^p} \left(\frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \right) \quad \left| \lim_{x \rightarrow 0} \right. \end{aligned}$$

3. Druhé odvození (na 3 řádky)

Pozorování:

$$(e^{kx})' = ke^{kx}, (e^{kx})'' = k^2 e^{kx}, \dots, (e^{kx})^{(p)} = k^p e^{kx}$$

Odtud onen třířádkový výpočet ($x \neq 0$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{kx} &= \frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \left| \frac{d^p}{dx^p} \right. \\ \sum_{k=1}^n k^p e^{kx} &= \frac{d^p}{dx^p} \left(\frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \right) \left| \lim_{x \rightarrow 0} \right. \\ \sum_{k=1}^n k^p &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^p}{dx^p} \left(\frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \right) \end{aligned}$$

Vzorec je elegantní a vyniká jednoduchostí odvození, ale nehodí se k praktickému použití: už pro $p = 1$ nepatří výpočet k nejjednodušším:

Vzorec je elegantní a vyniká jednoduchostí odvození, ale nehodí se k praktickému použití: už pro $p = 1$ nepatří výpočet k nejjednodušším:

$$\left(\frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \right)' = \frac{e^{x(n+2)}n - e^{(n+1)x}(n+1) + e^x}{(1 - e^x)^2}$$

a výpočet limity vpravo dá ještě trochu práci (např. 2x L'Hospital). (D.CV.?)

Vzorec je elegantní a vyniká jednoduchostí odvození, ale nehodí se k praktickému použití: už pro $p = 1$ nepatří výpočet k nejjednodušším:

$$\left(\frac{1 - e^{(n+1)x}}{1 - e^x} \right)' = \frac{e^{x(n+2)}n - e^{(n+1)x}(n+1) + e^x}{(1 - e^x)^2}$$

a výpočet limity vpravo dá ještě trochu práci (např. 2x L'Hospital). (D.CV.?)

Pozitivum: do úvah o součtech mocnin se nám dostala exponenciála, jejíž využití v zápětí oceníme.

4. Třetí odvození

4. Třetí odvození

Odvození, vedoucí k explicitnímu (tzv. Faulhaberovu, resp. Bernoulliho) vzorci, potřebuje některé "nestředoškolské" znalosti, konkrétně je potřeba umět zacházet s těmito prvky kalkulu:

4. Třetí odvození

Odvození, vedoucí k explicitnímu (tzv. Faulhaberovu, resp. Bernoulliho) vzorci, potřebuje některé "nestředoškolské" znalosti, konkrétně je potřeba umět zacházet s těmito prvky kalkulu:

- rozvoj funkcí do Taylorových (nekonečných mocninných) řad,

4. Třetí odvození

Odvození, vedoucí k explicitnímu (tzv. Faulhaberovu, resp. Bernoulliho) vzorci, potřebuje některé "nestředoškolské" znalosti, konkrétně je potřeba umět zacházet s těmito prvky kalkulu:

- rozvoj funkcí do Taylorových (nekonečných mocninných) řad,
- záměna pořadí sčítání u nekonečných součtů (diskrétní Fubini),

4. Třetí odvození

Odvození, vedoucí k explicitnímu (tzv. Faulhaberovu, resp. Bernoulliho) vzorci, potřebuje některé "nestředoškolské" znalosti, konkrétně je potřeba umět zacházet s těmito prvky kalkulu:

- rozvoj funkcí do Taylorových (nekonečných mocninných) řad,
- záměna pořadí sčítání u nekonečných součtů (diskrétní Fubini),
- násobení nekonečných řad (Cauchyův součin).

4. Třetí odvození

Odvození, vedoucí k explicitnímu (tzv. Faulhaberovu, resp. Bernoulliho) vzorci, potřebuje některé "nestředoškolské" znalosti, konkrétně je potřeba umět zacházet s těmito prvky kalkulu:

- rozvoj funkcí do Taylorových (nekonečných mocninných) řad,
- záměna pořadí sčítání u nekonečných součtů (diskrétní Fubini),
- násobení nekonečných řad (Cauchyův součin).

(Je to tu vyjmenováno hlavně proto, že v následujícím textu trochu odbudeme tzv. splnění požadavků příslušných vět...)

Vyjdeme ze stejného součtu $\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx}$ jako při předchozím odvození, ale exponenciály rozvineme do Taylorovy řady:

Vyjdeme ze stejného součtu $\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx}$ jako při předchozím odvození, ale exponenciály rozvineme do Taylorovy řady:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{kx} =$$

Vyjdeme ze stejného součtu $\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx}$ jako při předchozím odvození, ale exponenciály rozvineme do Taylorovy řady:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{kx} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(kx)^p}{p!} \right)$$

Vyjdeme ze stejného součtu $\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx}$ jako při předchozím odvození, ale exponenciály rozvineme do Taylorovy řady:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{kx} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(kx)^p}{p!} \right) \\ &= n + \sum_{p=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^p \right)}_{S_p(n-1)} \frac{x^p}{p!}\end{aligned}$$

Vyjdeme ze stejného součtu $\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx}$ jako při předchozím odvození, ale exponenciály rozvineme do Taylorovy řady:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{kx} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(kx)^p}{p!} \right) \\ &= n + \sum_{p=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^p \right)}_{S_p(n-1)} \frac{x^p}{p!}\end{aligned}$$

První postupný cíl:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = n + \sum_{p=1}^{\infty} S_p(n-1) \frac{x^p}{p!}$$

Vyjdeme ze stejného součtu $\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx}$ jako při předchozím odvození, ale exponenciály rozvineme do Taylorovy řady:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{kx} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(kx)^p}{p!} \right) \\ &= n + \sum_{p=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^p \right)}_{S_p(n-1)} \frac{x^p}{p!} \end{aligned}$$

První postupný cíl:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = n + \sum_{p=1}^{\infty} S_p(n-1) \frac{x^p}{p!}$$

Pozn.: Zapamatujme si, že tento vztah platí i pro $n = 1$ (s konvencí $S_p(0) = 0$), bude se to hodit.

Ale tutéž konečnou řadu exponenciál lze nejprve sečíst jako geometrickou řadu a teprve poté rozvinout:

Ale tutěž konečnou řadu exponenciál lze nejprve sečíst jako geometrickou řadu a teprve poté rozvinout:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = \frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x}$$

Ale tutěž konečnou řadu exponenciál lze nejprve sečíst jako geometrickou řadu a teprve poté rozvinout:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = \frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x} = \frac{e^{nx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1}$$

Ale tutéž konečnou řadu exponenciál lze nejprve sečíst jako geometrickou řadu a teprve poté rozvinout:

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = \frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x} = \frac{e^{nx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \quad (\text{opět je ok i pro } n=1)$$

Ale tutéž konečnou řadu exponenciál lze nejprve sečíst jako geometrickou řadu a teprve poté rozvinout:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} &= \frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x} = \frac{e^{nx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \quad (\text{opět je ok i pro } n=1) \\ &= \frac{1}{x} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(nx)^p}{p!} - 1 \right).\end{aligned}$$

Ale tutéž konečnou řadu exponenciál lze nejprve sečíst jako geometrickou řadu a teprve poté rozvinout:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} &= \frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x} = \frac{e^{nx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \quad (\text{opět je ok i pro } n=1) \\ &= \frac{1}{x} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(nx)^p}{p!} - 1 \right) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p x^p}{p!}\end{aligned}$$

Ale tutěž konečnou řadu exponenciál lze nejprve sečíst jako geometrickou řadu a teprve poté rozvinout:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} &= \frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x} = \frac{e^{nx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \quad (\text{opět je ok i pro } n=1) \\ &= \frac{1}{x} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(nx)^p}{p!} - 1 \right) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p x^p}{p!}\end{aligned}$$

(čísla B_p zatím neznáme, jen víme, že musí existovat, a že příslušné řady konvergují absolutně a lokálně stejnoměrně na okolí nuly - dokázali byste říct proč?)

Ale tutěž konečnou řadu exponenciál lze nejprve sečíst jako geometrickou řadu a teprve poté rozvinout:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} &= \frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x} = \frac{e^{nx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \quad (\text{opět je ok i pro } n=1) \\ &= \frac{1}{x} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(nx)^p}{p!} - 1 \right) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p x^p}{p!}\end{aligned}$$

(čísla B_p zatím neznáme, jen víme, že musí existovat, a že příslušné řady konvergují absolutně a lokálně stejnoměrně na okolí nuly - dokázali byste říct proč?)

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n^p x^{p-1}}{p!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p x^p}{p!}$$

Ale tutěž konečnou řadu exponenciál lze nejprve sečíst jako geometrickou řadu a teprve poté rozvinout:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} &= \frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x} = \frac{e^{nx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \quad (\text{opět je ok i pro } n=1) \\ &= \frac{1}{x} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(nx)^p}{p!} - 1 \right) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p x^p}{p!}\end{aligned}$$

(čísla B_p zatím neznáme, jen víme, že musí existovat, a že příslušné řady konvergují absolutně a lokálně stejnoměrně na okolí nuly - dokázali byste říct proč?)

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n^p x^{p-1}}{p!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p x^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^{p+1} x^p}{(p+1)!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p x^p}{p!}.$$

Ale tutěž konečnou řadu exponenciál lze nejprve sečíst jako geometrickou řadu a teprve poté rozvinout:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} &= \frac{1 - e^{nx}}{1 - e^x} = \frac{e^{nx} - 1}{x} \cdot \frac{x}{e^x - 1} \quad (\text{opět je ok i pro } n=1) \\ &= \frac{1}{x} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(nx)^p}{p!} - 1 \right) \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p x^p}{p!}\end{aligned}$$

(čísla B_p zatím neznáme, jen víme, že musí existovat, a že příslušné řady konvergují absolutně a lokálně stejnoměrně na okolí nuly - dokázali byste říct proč?)

$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n^p x^{p-1}}{p!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p x^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^{p+1} x^p}{(p+1)!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p x^p}{p!}.$$

Vše je připraveno na vynásobení dvou řad pomocí Cauchyova součinu.

Cauchyův součin dvou řad: obě řady konvergují na okolí nuly absolutně, tedy platí

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\right) \cdot \left(\sum_{p=0}^{\infty} b_p\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^p a_{p-j} b_j\right).$$

Cauchyův součin dvou řad: obě řady konvergují na okolí nuly absolutně, tedy platí

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\right) \cdot \left(\sum_{p=0}^{\infty} b_p\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^p a_{p-j} b_j\right).$$

Máme proto:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^{p+1} x^p}{(p+1)!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p x^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^p \frac{n^{p+1-j} x^{p-j}}{(p+1-j)!} \cdot \frac{B_j x^j}{j!}$$

Cauchyův součin dvou řad: obě řady konvergují na okolí nuly absolutně, tedy platí

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\right) \cdot \left(\sum_{p=0}^{\infty} b_p\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^p a_{p-j} b_j\right).$$

Máme proto:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^{p+1} x^p}{(p+1)!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p x^p}{p!} &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^p \frac{n^{p+1-j} x^{p-j}}{(p+1-j)!} \cdot \frac{B_j x^j}{j!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \right) \frac{x^p}{p!} \end{aligned}$$

Cauchyův součin dvou řad: obě řady konvergují na okolí nuly absolutně, tedy platí

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p\right) \cdot \left(\sum_{p=0}^{\infty} b_p\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^p a_{p-j} b_j\right).$$

Máme proto:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^{p+1} x^p}{(p+1)!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p x^p}{p!} &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{j=0}^p \frac{n^{p+1-j} x^{p-j}}{(p+1-j)!} \cdot \frac{B_j x^j}{j!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \right) \frac{x^p}{p!} \\ &= nB_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \right) \frac{x^p}{p!} \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = nB_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \right) \frac{x^p}{p!}$$

Dostali jsme tedy

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = nB_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \right) \frac{x^p}{p!}$$

což lze porovnat s již spočteným výsledkem

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = n + \sum_{p=1}^{\infty} S_p(n-1) \frac{x^p}{p!}$$

Dostali jsme tedy

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = nB_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \right) \frac{x^p}{p!}$$

což lze porovnat s již spočteným výsledkem

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = n + \sum_{p=1}^{\infty} S_p(n-1) \frac{x^p}{p!}$$

a dostat jednak $B_0 = 1$

Dostali jsme tedy

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = nB_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \right) \frac{x^p}{p!}$$

což lze porovnat s již spočteným výsledkem

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = n + \sum_{p=1}^{\infty} S_p(n-1) \frac{x^p}{p!}$$

a dostat jednak $B_0 = 1$ a jednak **Faulhaberův vzorec**

$$S_p(n-1) = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}.$$

5. Bernoulli byl pěkné číslo

5. Bernoulli byl pěkné číslo

Dobře, ale jak zjistím ta čísla B_p ?

5. Bernoulli byl pěkné číslo

Dobře, ale jak zjistím ta čísla B_p ? Dosazením $n = 1$ do právě odvozeného vztahu:

$$S_p(n-1) = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \quad | \quad n = 1$$

5. Bernoulli byl pěkné číslo

Dobře, ale jak zjistím ta čísla B_p ? Dosazením $n = 1$ do právě odvozeného vztahu:

$$S_p(n-1) = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \quad | \quad n = 1$$

$$0 = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j$$

5. Bernoulli byl pěkné číslo

Dobře, ale jak zjistím ta čísla B_p ? Dosazením $n = 1$ do právě odvozeného vztahu:

$$S_p(n-1) = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \quad \Big| \quad n = 1$$

$$0 = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j$$

$$0 = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} B_j + (p+1)B_p$$

5. Bernoulli byl pěkné číslo

Dobře, ale jak zjistím ta čísla B_p ? Dosazením $n = 1$ do právě odvozeného vztahu:

$$S_p(n-1) = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \quad | \quad n = 1$$

$$0 = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j$$

$$0 = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} B_j + (p+1)B_p$$

tedy

$$B_p = -\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} B_j, \quad \text{přičemž } B_0 = 1.$$

Dostáváme tak (rekurentně definovaná) slavná
Bernoulliho čísla

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2},$$

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0,$$

$$B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0,$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{13} = 0,$$

$$B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{15} = 0, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}, \quad B_{17} = 0, \quad \dots$$

Dostáváme tak (rekurentně definovaná) slavná
Bernoulliho čísla

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2},$$

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0,$$

$$B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0,$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{13} = 0,$$

$$B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{15} = 0, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}, \quad B_{17} = 0, \quad \dots$$

Dostáváme tak (rekurentně definovaná) slavná
Bernoulliho čísla

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2},$$

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0,$$

$$B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0,$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{13} = 0,$$

$$B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{15} = 0, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}, \quad B_{17} = 0, \quad \dots$$

Dostáváme tak (rekurentně definovaná) slavná
Bernoulliho čísla

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2},$$

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0,$$

$$B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0,$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}, \quad B_{11} = 0, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad B_{13} = 0,$$

$$B_{14} = \frac{7}{6}, \quad B_{15} = 0, \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}, \quad B_{17} = 0, \quad \dots$$

Pozn.:

Pozn.:

- S výjimkou $B_1 = -\frac{1}{2}$ jsou Bernoulliho čísla s lichým indexem nulová.

Pozn.:

- S výjimkou $B_1 = -\frac{1}{2}$ jsou Bernoulliho čísla s lichým indexem nulová.
- S výjimkou $B_0 = 1$ střídají Bernoulliho čísla se sudým indexem pravidelně znaménko.

Pozn.:

- S výjimkou $B_1 = -\frac{1}{2}$ jsou Bernoulliho čísla s lichým indexem nulová.
- S výjimkou $B_0 = 1$ střídají Bernoulliho čísla se sudým indexem pravidelně znaménko.
- Existují i jiné definice Bernoulliho čísel: přečíslení indexů tak, že všechna nulová čísla neuvažujeme,

Pozn.:

- S výjimkou $B_1 = -\frac{1}{2}$ jsou Bernoulliho čísla s lichým indexem nulová.
- S výjimkou $B_0 = 1$ střídají Bernoulliho čísla se sudým indexem pravidelně znaménko.
- Existují i jiné definice Bernoulliho čísel: přečíslení indexů tak, že všechna nulová čísla neuvažujeme, a/nebo změna znamének tak, že všechna nenulová Bernoulliho čísla jsou kladná.

Pozn.:

- S výjimkou $B_1 = -\frac{1}{2}$ jsou Bernoulliho čísla s lichým indexem nulová.
- S výjimkou $B_0 = 1$ střídají Bernoulliho čísla se sudým indexem pravidelně znaménko.
- Existují i jiné definice Bernoulliho čísel: přechíslení indexů tak, že všechna nulová čísla neuvažujeme, a/nebo změna znamének tak, že všechna nenulová Bernoulliho čísla jsou kladná.

Takže kromě "naší a Bernoulliho" definice

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, \\ B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30} \dots$$

Pozn.:

- S výjimkou $B_1 = -\frac{1}{2}$ jsou Bernoulliho čísla s lichým indexem nulová.
- S výjimkou $B_0 = 1$ střídají Bernoulliho čísla se sudým indexem pravidelně znaménko.
- Existují i jiné definice Bernoulliho čísel: přechíslení indexů tak, že všechna nulová čísla neuvažujeme, a/nebo změna znamének tak, že všechna nenulová Bernoulliho čísla jsou kladná.

Takže kromě "naší a Bernoulliho" definice

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, \\ B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30} \dots$$

Ize v literatuře najít např.. i

$$B_0^* = 1, B_1^* = \frac{1}{2}, B_2^* = \frac{1}{6}, B_3^* = \frac{1}{30}, B_4^* = \frac{1}{42}, B_5^* = \frac{1}{30} \dots$$

Pozn.:

- S výjimkou $B_1 = -\frac{1}{2}$ jsou Bernoulliho čísla s lichým indexem nulová.
- S výjimkou $B_0 = 1$ střídají Bernoulliho čísla se sudým indexem pravidelně znaménko.
- Existují i jiné definice Bernoulliho čísel: přechíslení indexů tak, že všechna nulová čísla neuvažujeme, a/nebo změna znamének tak, že všechna nenulová Bernoulliho čísla jsou kladná.

Takže kromě "naší a Bernoulliho" definice

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, \\ B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30} \dots$$

Ize v literatuře najít např.. i

$$B_0^* = 1, B_1^* = \frac{1}{2}, B_2^* = \frac{1}{6}, B_3^* = \frac{1}{30}, B_4^* = \frac{1}{42}, B_5^* = \frac{1}{30} \dots$$

⇒ **Pozor na definici Bernoulliho čísel u různých autorů.**

Pokračujme finální úpravou Faulhaberova vzorce:

$$S_p(n-1) = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

Pokračujme finální úpravou Faulhaberova vzorce:

$$S_p(n-1) = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

$$S_p(n-1) = \frac{B_0}{p+1} n^{p+1} + B_1 n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{j=2}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

Pokračujme finální úpravou Faulhaberova vzorce:

$$S_p(n-1) = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

$$S_p(n-1) = \frac{B_0}{p+1} n^{p+1} + B_1 n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{j=2}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

$$S_p(n-1) = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2} n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{j=2}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

Pokračujme finální úpravou Faulhaberova vzorce:

$$S_p(n-1) = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

$$S_p(n-1) = \frac{B_0}{p+1} n^{p+1} + B_1 n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{j=2}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

$$S_p(n-1) = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2} n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{j=2}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \quad \Bigg| + n^p$$

Pokračujme finální úpravou Faulhaberova vzorce:

$$S_p(n-1) = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

$$S_p(n-1) = \frac{B_0}{p+1} n^{p+1} + B_1 n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{j=2}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

$$S_p(n-1) = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2} n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{j=2}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \quad \Bigg| + n^p$$

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{p+1} \sum_{j=2}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

Pokračujme finální úpravou Faulhaberova vzorce:

$$S_p(n-1) = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

$$S_p(n-1) = \frac{B_0}{p+1} n^{p+1} + B_1 n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{j=2}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

$$S_p(n-1) = \frac{n^{p+1}}{p+1} - \frac{1}{2} n^p + \frac{1}{p+1} \sum_{j=2}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \quad \Bigg| + n^p$$

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{p+1} \sum_{j=2}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

(To je jeden z důvodů, proč se někdy klade $B_1 = \frac{1}{2}$.)

Finální Faulhaberův vzorec:

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{p+1} \sum_{j=2}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

Finální Faulhaberův vzorec:

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{p+1} \sum_{j=2}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

Porovnejme jej se vzorcem z našeho Tvzení z počátku přednášky:

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \sum_{j=2}^p \alpha_j n^{p+1-j}.$$

Finální Faulhaberův vzorec:

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{1}{p+1} \sum_{j=2}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}$$

Porovnejme jej se vzorcem z našeho Tvzení z počátku přednášky:

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \sum_{j=2}^p \alpha_j n^{p+1-j}.$$

Tedy jsme ony koeficienty α_j našli:

$$\alpha_j = \frac{1}{p+1} \binom{p+1}{j} B_j, \quad j = 2, \dots, p.$$

Můžeme například spočítat:

$$S_6(n) = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{1}{7} \left[\binom{7}{2} B_2 n^5 + \binom{7}{4} B_4 n^3 + \binom{7}{6} B_6 n \right]$$

Můžeme například spočítat:

$$\begin{aligned} S_6(n) &= \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{1}{7} \left[\binom{7}{2} B_2 n^5 + \binom{7}{4} B_4 n^3 + \binom{7}{6} B_6 n \right] \\ &= \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42} \\ &= \frac{6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n}{42} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)}{42}. \end{aligned}$$

Výrazy jsou však čím dál složitější, viz

Výrazy jsou však čím dál složitější, viz

$$\begin{aligned} S_{20}(n) = & \frac{n^{21}}{21} + \frac{n^{20}}{2} + \frac{5}{3}n^{19} - \frac{19}{2}n^{17} + \frac{1292}{21}n^{15} - 323n^{13} + \\ & + \frac{41990}{33}n^{11} - \frac{223193}{63}n^9 + 6460n^7 - \frac{68723}{10}n^5 + \\ & + \frac{219335}{63}n^3 - \frac{174611}{330}n. \end{aligned}$$

Výrazy jsou však čím dál složitější, viz

$$\begin{aligned} S_{20}(n) = & \frac{n^{21}}{21} + \frac{n^{20}}{2} + \frac{5}{3}n^{19} - \frac{19}{2}n^{17} + \frac{1292}{21}n^{15} - 323n^{13} + \\ & + \frac{41990}{33}n^{11} - \frac{223193}{63}n^9 + 6460n^7 - \frac{68723}{10}n^5 + \\ & + \frac{219335}{63}n^3 - \frac{174611}{330}n. \end{aligned}$$

Souvisí to pochopitelně i s tím, že pro vzrůstající n jsou Bernoulliho čísla (přestože jsou všechna racionální) čím dál komplikovanější:

$$B_{30} = \frac{8615841276005}{14322}.$$

A už B_{60} je poměrně zřůdné:

$$B_{60} = - \frac{1215233140483755572040304994079820246041491}{56786730}.$$

A už B_{60} je poměrně zrudné:

$$B_{60} = -\frac{1215233140483755572040304994079820246041491}{56786730}.$$

Proto je zajímavá tzv. asymptotika Bernoulliho čísel. Lze ukázat, že pro velká n se Bernoulliho čísla blíží zajímavé kombinaci známých matematických konstant:

$$|B_{2n}| \approx 4\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

A už B_{60} je poměrně zručné:

$$B_{60} = - \frac{1215233140483755572040304994079820246041491}{56786730}.$$

Proto je zajímavá tzv. asymptotika Bernoulliho čísel. Lze ukázat, že pro velká n se Bernoulliho čísla blíží zajímavé kombinaci známých matematických konstant:

$$|B_{2n}| \approx 4\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{\pi e} \right)^{2n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Srov.:

$$\begin{aligned} |B_{60}| &\approx 2.1399 \cdot 10^{34} \\ 4\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{\pi e} \right)^{2n} \Big|_{n=30} &\approx 2.1370 \cdot 10^{34} \end{aligned}$$

Existuje způsob, jak spočítat Bernoulliho čísla explicitě, skrývá však v sobě jeden malý zádrhel (*jaký?*):

Existuje způsob, jak spočítat Bernoulliho čísla explicitě, skrývá však v sobě jeden malý zádrhel (*jaký?*):

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (j+1)^n.$$

Existuje způsob, jak spočítat Bernoulliho čísla explicitě, skrývá však v sobě jeden malý zádrhel (*jaký?*):

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (j+1)^n.$$

Kde také najdeme Bernoulliho čísla?

Existuje způsob, jak spočítat Bernoulliho čísla explicitě, skrývá však v sobě jeden malý zádrhel (*jaký?*):

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (j+1)^n.$$

Kde také najdeme Bernoulliho čísla? Například v Taylorových rozvoích některých poměrně známých funkcí:

Existuje způsob, jak spočítat Bernoulliho čísla explicitě, skrývá však v sobě jeden malý zádrhel (*jaký?*):

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (j+1)^n.$$

Kde také najdeme Bernoulliho čísla? Například v Taylorových rozvoích některých poměrně známých funkcí:

$$\operatorname{tg} x =$$

Existuje způsob, jak spočítat Bernoulliho čísla explicitě, skrývá však v sobě jeden malý zádrhel (*jaký?*):

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (j+1)^n.$$

Kde také najdeme Bernoulliho čísla? Například v Taylorových rozvoích některých poměrně známých funkcí:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2},$$

Existuje způsob, jak spočítat Bernoulliho čísla explicitě, skrývá však v sobě jeden malý zádrhel (*jaký?*):

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (j+1)^n.$$

Kde také najdeme Bernoulliho čísla? Například v Taylorových rozvoích některých poměrně známých funkcí:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tgh} x =$$

Existuje způsob, jak spočítat Bernoulliho čísla explicitě, skrývá však v sobě jeden malý zádrhel (*jaký?*):

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (j+1)^n.$$

Kde také najdeme Bernoulliho čísla? Například v Taylorových rozvoích některých poměrně známých funkcí:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tgh} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Existuje způsob, jak spočítat Bernoulliho čísla explicitě, skrývá však v sobě jeden malý zádrhel (*jaký?*):

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (j+1)^n.$$

Kde také najdeme Bernoulliho čísla? Například v Taylorových rozvoích některých poměrně známých funkcí:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tgh} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} x^{2n-1}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

... a za chvíli uvidíme, že i ještě někde jinde ...

6. Trocha historie

Problémem součtu mocnin přirozených čísel má dlouhou historii:

- *Pythagoras* (572–497 př.n.l.),

Problémem součtu mocnin přirozených čísel má dlouhou historii:

- *Pythagoras* (572–497 př.n.l.), *Archimédés* (287–212 př.n.l.),

Problémem součtu mocnin přirozených čísel má dlouhou historii:

- *Pythagoras* (572–497 př.n.l.), *Archimédés* (287–212 př.n.l.), *Aryabhata* (476-??, Indie),

Problémem součtu mocnin přirozených čísel má dlouhou historii:

- *Pythagoras* (572–497 př.n.l.), *Archimédés* (287–212 př.n.l.), *Aryabhata* (476-??, Indie), *Abu Bakr al-Karaji* (??-1019, Persie),

Problémem součtu mocnin přirozených čísel má dlouhou historii:

- *Pythagoras* (572–497 př.n.l.), *Archimédés* (287–212 př.n.l.), *Aryabhata* (476-??, Indie), *Abu Bakr al-Karaji* (??-1019, Persie), *Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham* (965–1039, Irák)

Problémem součtu mocnin přirozených čísel má dlouhou historii:

- *Pythagoras* (572–497 př.n.l.), *Archimédés* (287–212 př.n.l.), *Aryabhata* (476-??, Indie), *Abu Bakr al-Karaji* (??-1019, Persie), *Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham* (965–1039, Irák) - známy vztahy pro součet prvních, druhých a třetích mocnin, ale pouze ve slovním vyjádření (nikoli jako vzorce), a odvození (spíše popis výsledku) bylo založeno na pozorování, nikoli na výpočtech.

Problémem součtu mocnin přirozených čísel má dlouhou historii:

- *Pythagoras* (572–497 př.n.l.), *Archimédés* (287–212 př.n.l.), *Aryabhata* (476-??, Indie), *Abu Bakr al-Karaji* (??-1019, Persie), *Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham* (965–1039, Irák) - známy vztahy pro součet prvních, druhých a třetích mocnin, ale pouze ve slovním vyjádření (nikoli jako vzorce), a odvození (spíše popis výsledku) bylo založeno na pozorování, nikoli na výpočtech.
- První vážnější algebraické pokusy: po roce 1500, zejména Angličan *West Thomas Harriot* (1560–1621),

Problémem součtu mocnin přirozených čísel má dlouhou historii:

- *Pythagoras* (572–497 př.n.l.), *Archimédés* (287–212 př.n.l.), *Aryabhata* (476–??, Indie), *Abu Bakr al-Karaji* (??–1019, Persie), *Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham* (965–1039, Irák) - známy vztahy pro součet prvních, druhých a třetích mocnin, ale pouze ve slovním vyjádření (nikoli jako vzorce), a odvození (spíše popis výsledku) bylo založeno na pozorování, nikoli na výpočtech.
- První vážnější algebraické pokusy: po roce 1500, zejména Angličan *West Thomas Harriot* (1560–1621), Němec *Johann Faulhaber* (1580–1635),

Problémem součtu mocnin přirozených čísel má dlouhou historii:

- *Pythagoras* (572–497 př.n.l.), *Archimédés* (287–212 př.n.l.), *Aryabhata* (476–??, Indie), *Abu Bakr al-Karaji* (??–1019, Persie), *Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham* (965–1039, Irák) - známy vztahy pro součet prvních, druhých a třetích mocnin, ale pouze ve slovním vyjádření (nikoli jako vzorce), a odvození (spíše popis výsledku) bylo založeno na pozorování, nikoli na výpočtech.
- První vážnější algebraické pokusy: po roce 1500, zejména Angličan *West Thomas Harriot* (1560–1621), Němec *Johann Faulhaber* (1580–1635), Francouzové *Pierre de Fermat* (1601–1665)

Problémem součtu mocnin přirozených čísel má dlouhou historii:

- *Pythagoras* (572–497 př.n.l.), *Archimédés* (287–212 př.n.l.), *Aryabhata* (476–??, Indie), *Abu Bakr al-Karaji* (??–1019, Persie), *Abu Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham* (965–1039, Irák) - známy vztahy pro součet prvních, druhých a třetích mocnin, ale pouze ve slovním vyjádření (nikoli jako vzorce), a odvození (spíše popis výsledku) bylo založeno na pozorování, nikoli na výpočtech.
- První vážnější algebraické pokusy: po roce 1500, zejména Angličan *West Thomas Harriot* (1560–1621), Němec *Johann Faulhaber* (1580–1635), Francouzové *Pierre de Fermat* (1601–1665) a *Blaise Pascal* (1623–1662).

- Zdá se, že *Thomas Harriot* byl první, kdo odvodil vzorce pro součet mocnin přirozených čísel v symbolickém tvaru, ale pouze pro součet až do čtvrté mocniny, nikoli obecně.

- Zdá se, že *Thomas Harriot* byl první, kdo odvodil vzorce pro součet mocnin přirozených čísel v symbolickém tvaru, ale pouze pro součet až do čtvrté mocniny, nikoli obecně. *Johann Faulhaber* odvodil vzorce pro součty až do 17. mocniny (*Academia Algebrae*, 1631), nicméně obecný vzorec nezískal.

- Zdá se, že *Thomas Harriot* byl první, kdo odvodil vzorce pro součet mocnin přirozených čísel v symbolickém tvaru, ale pouze pro součet až do čtvrté mocniny, nikoli obecně. *Johann Faulhaber* odvodil vzorce pro součty až do 17. mocniny (*Academia Algebrae*, 1631), nicméně obecný vzorec nezískal.
- Až Švýcar *Jakob Bernoulli* (1654–1705) jako první sestavil tabulku čísel $B_0, B_1, B_2, \dots$

- Zdá se, že *Thomas Harriot* byl první, kdo odvodil vzorce pro součet mocnin přirozených čísel v symbolickém tvaru, ale pouze pro součet až do čtvrté mocniny, nikoli obecně. *Johann Faulhaber* odvodil vzorce pro součty až do 17. mocniny (*Academia Algebrae*, 1631), nicméně obecný vzorec nezískal.
- Až Švýcar *Jakob Bernoulli* (1654–1705) jako první sestavil tabulku čísel $B_0, B_1, B_2, \dots$. Přesto, jak už tomu často v historii bývá, se výsledný vzorec, jehož autorem je Bernoulli, nazývá Faulhaberův.

- Zdá se, že *Thomas Harriot* byl první, kdo odvodil vzorce pro součet mocnin přirozených čísel v symbolickém tvaru, ale pouze pro součet až do čtvrté mocniny, nikoli obecně. *Johann Faulhaber* odvodil vzorce pro součty až do 17. mocniny (*Academia Algebrae*, 1631), nicméně obecný vzorec nezískal.
- Až Švýcar *Jakob Bernoulli* (1654–1705) jako první sestavil tabulku čísel $B_0, B_1, B_2, \dots$. Přesto, jak už tomu často v historii bývá, se výsledný vzorec, jehož autorem je Bernoulli, nazývá Faulhaberův.
- Bernoulli sám o svém objevu nadšeně poznamenal:
S pomocí mé tabulky mi trvalo méně než čtvrt hodiny sečíst prvních 1000 desátých mocnin a dostat výsledek

- Zdá se, že *Thomas Harriot* byl první, kdo odvodil vzorce pro součet mocnin přirozených čísel v symbolickém tvaru, ale pouze pro součet až do čtvrté mocniny, nikoli obecně. *Johann Faulhaber* odvodil vzorce pro součty až do 17. mocniny (*Academia Algebrae*, 1631), nicméně obecný vzorec nezískal.
- Až Švýcar *Jakob Bernoulli* (1654–1705) jako první sestavil tabulku čísel $B_0, B_1, B_2, \dots$. Přesto, jak už tomu často v historii bývá, se výsledný vzorec, jehož autorem je Bernoulli, nazývá Faulhaberův.
- Bernoulli sám o svém objevu nadšeně poznamenal:
S pomocí mé tabulky mi trvalo méně než čtvrt hodiny sečíst prvních 1000 desátých mocnin a dostat výsledek

91 409 924 241 424 243 424 241 924 242 500.

Bernoulliho vzorec byl publikován až posmrtně v knize *Ars Conjectandi*, 1713.

... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

Summae Potestatum

$$\sum n = \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$$

$$\sum nn = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$$

$$\sum n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn$$

$$\sum n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}nn$$

$$\sum n^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

$$\sum n^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}nn$$

$$\sum n^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{5}n^3 - \frac{1}{30}n$$

$$\sum n^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}nn$$

$$\sum n^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentius ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim

c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\int n^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2}{2 \cdot 3 \cdot 4}Bn^{c-3} \\ + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}Cn^{c-5} \\ + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4 \cdot c - 5 \cdot c - 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}Dn^{c-7} \dots \& \text{ ita deinceps,}$$

exponentem potestatis ipsius n continué minuendo binario, quosque perveniatur ad n vel nn . Literae capitales A, B, C, D & c . ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn, \int n^4, \int n^6, \int n^8$, & c . nempe

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}.$$

7. Co dál?

7. Co dál?

Bernoulliho čísla se tedy hodí k součtům řad kladných mocnin přirozených čísel $1^p + 2^p + \dots + n^p$.

7. Co dál?

Bernoulliho čísla se tedy hodí k součtům řad kladných mocnin přirozených čísel $1^p + 2^p + \dots + n^p$.

Trochu překvapivě (nebo ne?) se však Bernoulliho čísla vyskytují i ve vzorcích pro nekonečné součty **převrácených hodnot** sudých mocnin přirozených čísel, tj. v sumách typu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$.

7. Co dál?

Bernoulliho čísla se tedy hodí k součtům řad kladných mocnin přirozených čísel $1^p + 2^p + \dots + n^p$.

Trochu překvapivě (nebo ne?) se však Bernoulliho čísla vyskytují i ve vzorcích pro nekonečné součty **převrácených hodnot** sudých mocnin přirozených čísel, tj. v sumách typu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$.

Riemannova zeta funkce:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re(s) > 1.$$

Jde tedy o hodnoty $\zeta(2p)$, $p \in \mathbb{N}$.

Ještě kousek historie: Basilejský problém: najít součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$$

(Problém byl formulován Pietrem Mengolim v r. 1644.)

Ještě kousek historie: Basilejský problém: najít součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$$

(Problém byl formulován Pietrem Mengolim v r. 1644.)

Problém byl vyřešen až po 90 letech, Leonhardem Eulerem (v r. 1734, kdy mu bylo 28 let). Euler spočetl, že platí

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ještě kousek historie: Basilejský problém: najít součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$$

(Problém byl formulován Pietrem Mengolim v r. 1644.)

Problém byl vyřešen až po 90 letech, Leonhardem Eulerem (v r. 1734, kdy mu bylo 28 let). Euler spočetl, že platí

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Znamé hodnoty součtů:

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

Ještě kousek historie: Basilejský problém: najít součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$$

(Problém byl formulován Pietrem Mengolim v r. 1644.)

Problém byl vyřešen až po 90 letech, Leonhardem Eulerem (v r. 1734, kdy mu bylo 28 let). Euler spočetl, že platí

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Známé hodnoty součtů:

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945},$$

Ještě kousek historie: Basilejský problém: najít součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$$

(Problém byl formulován Pietrem Mengolim v r. 1644.)

Problém byl vyřešen až po 90 letech, Leonhardem Eulerem (v r. 1734, kdy mu bylo 28 let). Euler spočetl, že platí

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Známé hodnoty součtů:

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \quad \dots$$

Obecně platí pro $k = 1, 2, \dots$:

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1} |B_{2k}|}{(2k)!} \pi^{2k}$$

Obecně platí pro $k = 1, 2, \dots$:

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1} |B_{2k}|}{(2k)!} \pi^{2k} = r_{2k} \pi^{2k}, \quad r_{2k} \in \mathbb{Q}.$$

Obečně platí pro $k = 1, 2, \dots$:

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1} |B_{2k}|}{(2k)!} \pi^{2k} = r_{2k} \pi^{2k}, \quad r_{2k} \in \mathbb{Q}.$$

Tedy umíme vyjádřit v tzv. uzavřeném tvaru součty převrácených **sudých** mocnin přirozených čísel.

Obecně platí pro $k = 1, 2, \dots$:

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1} |B_{2k}|}{(2k)!} \pi^{2k} = r_{2k} \pi^{2k}, \quad r_{2k} \in \mathbb{Q}.$$

Tedy umíme vyjádřit v tzv. uzavřeném tvaru součty převrácených **sudých** mocnin přirozených čísel.

Pozn.: Pro liché mocniny stále nevíme, jestli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}} = ??,$$

kde vpravo je konečná kombinace hodnot elementárních funkcí resp. známých konstant.

Idea: něco se chytře rozvine "do Fouriera", něco "do Taylora" a porovnají se rozvoje.

Idea: něco se chytře rozvine "do Fouriera", něco "do Taylora" a porovnají se rozvoje.

Rozvoj $\alpha x \operatorname{cotgh}(\alpha x)$ (pro $x = 0$ dodefinovaná limitou 1) do Fourierovy řady v kosinech na $\langle \pi, \pi \rangle$ dá:

$$\alpha \pi \operatorname{cotgh}(\alpha x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + n^2} (-1)^n \cos nx.$$

Idea: něco se chytře rozvine "do Fouriera", něco "do Taylora" a porovnají se rozvoje.

Rozvoj $\alpha x \operatorname{cotgh}(\alpha x)$ (pro $x = 0$ dodefinovaná limitou 1) do Fourierovy řady v kosinech na $\langle \pi, \pi \rangle$ dá:

$$\alpha x \operatorname{cotgh}(\alpha x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + n^2} (-1)^n \cos nx.$$

Po dosazení hodnoty $x = \pi$ dostaneme

$$\alpha \pi \operatorname{cotgh}(\alpha \pi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + n^2}.$$

Idea: něco se chytře rozvine "do Fouriera", něco "do Taylora" a porovnají se rozvoje.

Rozvoj $\alpha x \operatorname{cotgh}(\alpha x)$ (pro $x = 0$ dodefinovaná limitou 1) do Fourierovy řady v kosinech na $\langle \pi, \pi \rangle$ dá:

$$\alpha \pi \operatorname{cotgh}(\alpha x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + n^2} (-1)^n \cos nx.$$

Po dosazení hodnoty $x = \pi$ dostaneme

$$\alpha \pi \operatorname{cotgh}(\alpha \pi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + n^2}.$$

Proč zrovna *cotgh*? Protože ji umíme porovnat s "Bernoulliiovskou funkcí" $\frac{t}{e^t - 1}$:

Idea: něco se chytře rozvine "do Fouriera", něco "do Taylora" a porovnají se rozvoje.

Rozvoj $\alpha x \operatorname{cotgh}(\alpha x)$ (pro $x = 0$ dodefinovaná limitou 1) do Fourierovy řady v kosinech na $\langle \pi, \pi \rangle$ dá:

$$\alpha \pi \operatorname{cotgh}(\alpha x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + n^2} (-1)^n \cos nx.$$

Po dosazení hodnoty $x = \pi$ dostaneme

$$\alpha \pi \operatorname{cotgh}(\alpha \pi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + n^2}.$$

Proč zrovna cotgh ? Protože ji umíme porovnat s "Bernoulliiovskou funkcí" $\frac{t}{e^t - 1}$: po dosazení $\frac{t}{2}$ za $\alpha \pi$ dostaneme vlevo

$$\frac{t}{2} \operatorname{cotgh} \frac{t}{2} = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2}$$

a tedy po úpravě vypadá ona "Fourierova řada" takto:

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

a tedy po úpravě vypadá ona "Fourierova řada" takto:

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

Už ale víme, že

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p t^p}{p!}$$

a tedy po úpravě vypadá ona "Fourierova řada" takto:

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

Už ale víme, že

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p t^p}{p!} = \underbrace{1 - \frac{t}{2}}_{B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k}}_{B_3=B_5=\dots=0}.$$

a tedy po úpravě vypadá ona "Fourierova řada" takto:

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

Už ale víme, že

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p t^p}{p!} = \underbrace{1 - \frac{t}{2}}_{B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k}}_{B_3=B_5=\dots=0}.$$

Porovnáním vidíme, že

a tedy po úpravě vypadá ona "Fourierova řada" takto:

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

Už ale víme, že

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p t^p}{p!} = \underbrace{1 - \frac{t}{2}}_{B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k}}_{B_3=B_5=\dots=0}.$$

Porovnáním vidíme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

a tedy po úpravě vypadá ona "Fourierova řada" takto:

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

Už ale víme, že

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{B_p t^p}{p!} = \underbrace{1 - \frac{t}{2}}_{B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k}}_{B_3=B_5=\dots=0}.$$

Porovnáním vidíme, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

Pěkné, ale ještě potřebujeme něco jako řadu v proměnné t vpravo...

Zázrak jménem geometrická řada (kvocient je menší než jedna - stačí nám konvergence pro t v okolí nuly):

$$\frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{t}{2\pi n} \right)^{2k}.$$

Zázrak jménem geometrická řada (kvocient je menší než jedna - stačí nám konvergence pro t v okolí nuly):

$$\frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{t}{2\pi n} \right)^{2k}.$$

Dosadíme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2}}$$

Zázrak jménem geometrická řada (kvocient je menší než jedna - stačí nám konvergence pro t v okolí nuly):

$$\frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{t}{2\pi n} \right)^{2k}.$$

Dosadíme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{t}{2\pi n} \right)^{2k}}$$

Zázrak jménem geometrická řada (kvocient je menší než jedna - stačí nám konvergence pro t v okolí nuly):

$$\frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{t}{2\pi n} \right)^{2k}.$$

Dosadíme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k} &= \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{t}{2\pi n} \right)^{2k}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) t^{2k}. \end{aligned}$$

Zázrak jménem geometrická řada (kvocient je menší než jedna - stačí nám konvergence pro t v okolí nuly):

$$\frac{2t^2}{t^2 + 4\pi^2 n^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{t}{2\pi n} \right)^{2k}.$$

Dosadíme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} t^{2k} &= \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{t}{2\pi n} \right)^{2k}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) t^{2k}. \end{aligned}$$

a porovnáním koeficientů u t^{2k} (neboli z jednoznačnosti Taylorova rozvoje) ...

...dostaneme

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

...dostaneme

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Odtud snadno spočteme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

...dostaneme

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Odtud snadno spočteme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

což je, s ohledem na to, že B_{2k} pravidelně střídají znaménka (a taky proto, že součet vlevo je pochopitelně kladný),

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1} |B_{2k}|}{(2k)!} \pi^{2k}$$

...dostaneme

$$\frac{B_{2k}}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Odtud snadno spočteme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

což je, s ohledem na to, že B_{2k} pravidelně střídají znaménka (a taky proto, že součet vlevo je pochopitelně kladný),

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1} |B_{2k}|}{(2k)!} \pi^{2k} \quad \text{c.b.d.}$$



Jacob Bernoulli



Johann Faulhaber



Leonhard Euler



Bernhard Riemann

Děkuji za pozornost.

Mirko Rokyta
KMA MFF Praha
Sokolovská 83
Praha 8 - Karlín

`mirko.rokyta@mff.cuni.cz`