

Taxikářská geometrie

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

OSMA, Ostrava, 13.12.2017

Anti-chairman measure





Tento obrázek nemá nic společného s tématem přednášky.

Eukleidovská geometrie

Eukleides: *Základy* (13 knih)

Eukleides: *Základy* (13 knih)

axiomatické základy geometrie

Eukleides: *Základy* (13 knih)

axiomatické základy geometrie

mnoho nepřesností

Eukleides: *Základy* (13 knih)

axiomatické základy geometrie

mnoho nepřesností (protnou se kružnice?

Eukleides: *Základy* (13 knih)

axiomatické základy geometrie

mnoho nepřesností (protnou se kružnice? obsahuje přímka alespoň dva body? nepostuluje se *spojitost*,

Eukleides: *Základy* (13 knih)

axiomatické základy geometrie

mnoho nepřesností (protnou se kružnice? obsahuje přímka alespoň dva body? nepostuluje se *spojitost*,...)

Eukleides: *Základy* (13 knih)

axiomatické základy geometrie

mnoho nepřesností (protnou se kružnice? obsahuje přímka alespoň dva body? nepostuluje se *spojitost*,...)

Bertrand Russell 1872-1970: “tissue of nonsense” (předivo nesmyslů), skandál

Eukleides: *Základy* (13 knih)

axiomatické základy geometrie

mnoho nepřesností (protnou se kružnice? obsahuje přímka alespoň dva body? nepostuluje se *spojitost*,...)

Bertrand Russell 1872-1970: “tissue of nonsense” (předivo nesmyslů), skandál

první pokus o organisovaný axiomatisovaný systém

Eukleides: *Základy* (13 knih)

axiomatické základy geometrie

mnoho nepřesností (protnou se kružnice? obsahuje přímka alespoň dva body? nepostuluje se *spojitost*,...)

Bertrand Russell 1872-1970: “tissue of nonsense” (předivo nesmyslů), skandál

první pokus o organisovaný axiomatisovaný systém

důkaz geniality: přes 2000 let pokusů o důkaz *pátého axiomu*

Eukleidovy axiomy

- dvěma body lze vést úsečku

Eukleidovy axiomy

- dvěma body lze vést úsečku
- úsečku lze prodloužit v přímku

Eukleidovy axiomy

- dvěma body lze vést úsečku
- úsečku lze prodloužit v přímku
- existuje kružnice o středu a poloměru

Eukleidovy axiomy

- dvěma body lze vést úsečku
- úsečku lze prodloužit v přímku
- existuje kružnice o středu a poloměru
- všechny pravé úhly jsou shodné

- dvěma body lze vést úsečku
- úsečku lze prodloužit v přímku
- existuje kružnice o středu a poloměru
- všechny pravé úhly jsou shodné
- protne-li přímka dvojici přímek tak, že na jedné její straně je součet vnitřních úhlů menší, než dva úhly pravé, pak se tyto přímky protnou na této její straně

- dvěma body lze vést úsečku
- úsečku lze prodloužit v přímku
- existuje kružnice o středu a poloměru
- všechny pravé úhly jsou shodné
- protne-li přímka dvojici přímek tak, že na jedné její straně je součet vnitřních úhlů menší, než dva úhly pravé, pak se tyto přímky protnou na této její straně

postulace konstrukcí

- dvěma body lze vést úsečku
- úsečku lze prodloužit v přímku
- existuje kružnice o středu a poloměru
- všechny pravé úhly jsou shodné
- protne-li přímka dvojici přímek tak, že na jedné její straně je součet vnitřních úhlů menší, než dva úhly pravé, pak se tyto přímky protnou na této její straně

postulace konstrukcí

otázka jednoznačnosti

Potíže s nekonečnem

Jak fyzicky ověříme, že se rovnoběžky protnou v nekonečnu?

*“Lines that are parallel
meet at Infinity!”
Euclid repeatedly
heatedly urged.*

*Until he died,
and so reached that vicinity;
in it he found
that the damned things diverged.*

Reformulace pátého axiomu

Reformulace pátého axiomu

Playfairův axiom (nejčastěji používaný ekvivalent Eukleidova pátého axiomu):

Playfairův axiom (nejčastěji používaný ekvivalent Eukleidova pátého axiomu):

K dané přímce a danému bodu mimo ni existuje nejvýše (právě) jedna přímka vedená tímto bodem, která se s danou přímkou neprotne (“rovnoběžka”).

John Playfair 1748-1819

John Playfair 1748-1819



John Playfair 1748-1819



John Playfair

Hon na pátý axiom

Hon na pátý axiom

štvánice za důkazem pátého axiomu - *od antiky do 19. století*

Hon na pátý axiom

štvanice za důkazem pátého axiomu - *od antiky do 19. století*

(trvala *šestkrát* déle než honba za důkazem velké Fermatovy věty)

Hon na pátý axiom

štvánice za důkazem pátého axiomu - *od antiky do 19. století*

(trvala *šestkrát* déle než honba za důkazem velké Fermatovy věty)

mnoho matematiků v domněnání, že jej dokázali, našlo *mnoho různých ekvivalentních formulací*

Hon na pátý axiom

štvánice za důkazem pátého axiomu - *od antiky do 19. století*

(trvala *šestkrát* déle než honba za důkazem velké Fermatovy věty)

mnoho matematiků v domněnání, že jej dokázali, našlo *mnoho různých ekvivalentních formulací*

- Pythagorova věta

štvánice za důkazem pátého axiomu - *od antiky do 19. století*

(trvala *šestkrát* déle než honba za důkazem velké Fermatovy věty)

mnoho matematiků v domněnání, že jej dokázali, našlo *mnoho různých ekvivalentních formulací*

- Pythagorova věta
- součet úhlů v trojúhelníku = 2x pravý

štvánice za důkazem pátého axiomu - *od antiky do 19. století*

(trvala *šestkrát* déle než honba za důkazem velké Fermatovy věty)

mnoho matematiků v domněnání, že jej dokázali, našlo *mnoho různých ekvivalentních formulací*

- Pythagorova věta
- součet úhlů v trojúhelníku = 2x pravý
- **Thales z Milétu**: důkaz závisí na *existenci obdélníka*

štvánice za důkazem pátého axiomu - *od antiky do 19. století*

(trvala *šestkrát* déle než honba za důkazem velké Fermatovy věty)

mnoho matematiků v domněnání, že jej dokázali, našlo *mnoho různých ekvivalentních formulací*

- Pythagorova věta
- součet úhlů v trojúhelníku = 2x pravý
- **Thales z Milétu**: důkaz závisí na *existenci obdélníka*
- **John Wallis (1601-1703)**: dva trojúhelníky mohou být podobné, aniž by byly shodné

štvánice za důkazem pátého axiomu - *od antiky do 19. století*

(trvala *šestkrát* déle než honba za důkazem velké Fermatovy věty)

mnoho matematiků v domněnání, že jej dokázali, nalezlo *mnoho různých ekvivalentních formulací*

- Pythagorova věta
- součet úhlů v trojúhelníku = 2x pravý
- **Thales z Milétu**: důkaz závisí na *existenci obdélníka*
- **John Wallis (16016-1703)**: dva trojúhelníky mohou být podobné, aniž by byly shodné
- **1763**: prokázána existence *28* různých důkazů, ani jeden správný

Co jde a co nejde

V 17. století: počátky hledání hranic eukleidovské geometrie

V 17. století: počátky hledání hranic eukleidovské geometrie

René Descartes 1596-1650:

V 17. století: počátky hledání hranic eukleidovské geometrie

René Descartes 1596-1650:

- formalisace geometrie algebrou

V 17. století: počátky hledání hranic eukleidovské geometrie

René Descartes 1596-1650:

- formalisace geometrie algebrou
- analytická geometrie, kartézský systém

V 17. století: počátky hledání hranic eukleidovské geometrie

René Descartes 1596-1650:

- formalisace geometrie algebrou
- analytická geometrie, kartézský systém
- poprvé se objevuje pojem **eukleidovská vzdálenost**

V 17. století: počátky hledání hranic eukleidovské geometrie

René Descartes 1596-1650:

- formalisace geometrie algebrou
- analytická geometrie, kartézský systém
- poprvé se objevuje pojem **eukleidovská vzdálenost**
- redukce na pravítko a kružítko = redukce na lineární a kvadratické rovnice

V 17. století: počátky hledání hranic eukleidovské geometrie

René Descartes 1596-1650:

- formalisace geometrie algebrou
- analytická geometrie, kartézský systém
- poprvé se objevuje pojem **eukleidovská vzdálenost**
- redukce na pravítko a kružítko = redukce na lineární a kvadratické rovnice

Pierre Wantzel 1837: důkaz nemožnosti trisekce úhlu

V 19. století se snaha o důkaz změnila v celosvětovou mánii.

V 19. století se snaha o důkaz změnila v celosvětovou mánii.

Maďarsko: Farkas Bolyai, János Bolyai.

V 19. století se snaha o důkaz změnila v celosvětovou mánii.

Maďarsko: Farkas Bolyai, János Bolyai.

János došel k názoru, že axiom je nezávislý a že i s jeho negací lze sestavit konsistentní geometrii.

V 19. století se snaha o důkaz změnila v celosvětovou mánii.

Maďarsko: Farkas Bolyai, János Bolyai.

János došel k názoru, že axiom je nezávislý a že i s jeho negací lze sestrojit konsistentní geometrii.

1823 “Sestrojil jsem nový vesmír z ničeho!” (dopis otci).

V 19. století se snaha o důkaz změnila v celosvětovou mánii.

Maďarsko: Farkas Bolyai, János Bolyai.

János došel k názoru, že axiom je nezávislý a že i s jeho negací lze sestrojit konsistentní geometrii.

1823 “Sestrojil jsem nový vesmír z ničeho!” (dopis otci).

Objev byl publikován v knize, ale až 1832. Mezitím (1829) víceméně totéž publikoval Lobačevskij.

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij 1792-1856

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij 1792-1856



Nikolaj Ivanovič Lobačevskij 1792-1856



Nikolaj Ivanovič Lobačevskij

Podivuhodný případ “geometrického Koperníka”

Podivuhodný případ “geometrického Koperníka”

Girolamo Saccheri 1667-1733: *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Eukleides vší poskvrny zbavený) 1733

Podivuhodný případ “geometrického Koperníka”

Girolamo Saccheri 1667-1733: *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Eukleides vší poskvrny zbavený) 1733

zdá se, že objevil (obě) neeukleidovské geometrie o sto let dříve

Podivuhodný případ “geometrického Koperníka”

Girolamo Saccheri 1667-1733: *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Eukleides vší poskvrny zbavený) 1733

zdá se, že objevil (obě) neeukleidovské geometrie o sto let dříve
bud' si toho nevšiml

Podivuhodný případ “geometrického Koperníka”

Girolamo Saccheri 1667-1733: *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Eukleides vší poskvrny zbavený) 1733

zdá se, že objevil (obě) neeukleidovské geometrie o sto let dříve

bud' si toho nevšiml

nebo schválně svůj objev popřel, aby prošel cenzurou

Podivuhodný případ “geometrického Koperníka”

Girolamo Saccheri 1667-1733: *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Eukleides vší poskvrny zbavený) 1733

zdá se, že objevil (obě) neeukleidovské geometrie o sto let dříve

bud' si toho nevšiml

nebo schválně svůj objev popřel, aby prošel cenzurou

Saccheri (možná) vycházel z díla perského učenice **Omara Chajjáma** z 11. století

Neeukleidovské geometrie

Před koncem 19. století bylo jasné, že 5. axiom je *nezávislý*.

Před koncem 19. století bylo jasné, že 5. axiom je *nezávislý*.

Dva nové typy konsistentních geometrií - dvě různé jeho negace:

Před koncem 19. století bylo jasné, že 5. axiom je *nezávislý*.

Dva nové typy konsistentních geometrií - dvě různé jeho negace:

- *existuje nekonečně mnoho rovnoběžek* (hyperbolická geometrie),

Před koncem 19. století bylo jasné, že 5. axiom je *nezávislý*.

Dva nové typy konsistentních geometrií - dvě různé jeho negace:

- *existuje nekonečně mnoho rovnoběžek* (hyperbolická geometrie),
- *neexistuje žádná rovnoběžka* (eliptická geometrie).

Hyperbolická geometrie

Lobačevskij, Bolyai, Gauss, Saccheri

Lobačevskij, Bolyai, Gauss, Saccheri

- součet úhlů v trojúhelníku je menší než 180 stupňů

Lobačevskij, Bolyai, Gauss, Saccheri

- součet úhlů v trojúhelníku je menší než 180 stupňů
- tento součet klesá při rostoucí délce stran

Lobačevskij, Bolyai, Gauss, Saccheri

- součet úhlů v trojúhelníku je menší než 180 stupňů
- tento součet klesá při rostoucí délce stran
- všechny podobné mnohoúhelníky jsou shodné

Lobačevskij, Bolyai, Gauss, Saccheri

- součet úhlů v trojúhelníku je menší než 180 stupňů
- tento součet klesá při rostoucí délce stran
- všechny podobné mnohoúhelníky jsou shodné
- obvod kružnice je větší než $\pi \times$ průměr

Lobačevskij, Bolyai, Gauss, Saccheri

- součet úhlů v trojúhelníku je menší než 180 stupňů
- tento součet klesá při rostoucí délce stran
- všechny podobné mnohoúhelníky jsou shodné
- obvod kružnice je větší než $\pi \times$ průměr
- míra zakřivení je záporná

Lobačevskij, Bolyai, Gauss, Saccheri

- součet úhlů v trojúhelníku je menší než 180 stupňů
- tento součet klesá při rostoucí délce stran
- všechny podobné mnohoúhelníky jsou shodné
- obvod kružnice je větší než $\pi \times$ průměr
- míra zakřivení je záporná
- existuje zobecnění na $\mathbb{R}^3$ i na $\mathbb{R}^n$

Eliptická geometrie

Riemann, Schläfli, Klein

Riemann, Schläfli, Klein

- součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180 stupňů

Riemann, Schläfli, Klein

- součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180 stupňů
- obvod kružnice je menší než $\pi \times \text{průměr}$

Riemann, Schläfli, Klein

- součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180 stupňů
- obvod kružnice je menší než $\pi \times \text{průměr}$
- každá geodetika je konečná a uzavřená

Riemann, Schläfli, Klein

- součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180 stupňů
- obvod kružnice je menší než $\pi \times \text{průměr}$
- každá geodetika je konečná a uzavřená
- každé dvě geodetiky se protnou

Riemann, Schläfli, Klein

- součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180 stupňů
- obvod kružnice je menší než $\pi \times \text{průměr}$
- každá geodetika je konečná a uzavřená
- každé dvě geodetiky se protnou
- míra zakřivení je kladná

Riemann, Schläfli, Klein

- součet úhlů v trojúhelníku je větší než 180 stupňů
- obvod kružnice je menší než $\pi \times$ průměr
- každá geodetika je konečná a uzavřená
- každé dvě geodetiky se protnou
- míra zakřivení je kladná
- existuje zobecnění na $\mathbb{R}^3$ i na $\mathbb{R}^n$

Ve 20. století Albert Einstein ve své teorii obecné relativity dokázal, že skutečný svět *není* eukleidovský.

Ve 20. století Albert Einstein ve své teorii obecné relativity dokázal, že skutečný svět *není* eukleidovský.

Je-li například trojúhelník tvořen třemi paprsky světla, pak v důsledku gravitace součet vnitřních úhlů *není* 180 stupňů.

Ve 20. století Albert Einstein ve své teorii obecné relativity dokázal, že skutečný svět *není* eukleidovský.

Je-li například trojúhelník tvořen třemi paprsky světla, pak v důsledku gravitace součet vnitřních úhlů *není* 180 stupňů.

Gravitační pole Země a Slunce jsou relativně slabá. Proto do 20. století nešlo teorii ověřit experimentálně.

Ve 20. století Albert Einstein ve své teorii obecné relativity dokázal, že skutečný svět *není* eukleidovský.

Je-li například trojúhelník tvořen třemi paprsky světla, pak v důsledku gravitace součet vnitřních úhlů *není* 180 stupňů.

Gravitační pole Země a Slunce jsou relativně slabá. Proto do 20. století nešlo teorii ověřit experimentálně.

Einstein ale předpověděl existenci odchylek.

Ve 20. století Albert Einstein ve své teorii obecné relativity dokázal, že skutečný svět *není* eukleidovský.

Je-li například trojúhelník tvořen třemi paprsky světla, pak v důsledku gravitace součet vnitřních úhlů *není* 180 stupňů.

Gravitační pole Země a Slunce jsou relativně slabá. Proto do 20. století nešlo teorii ověřit experimentálně.

Einstein ale předpověděl existenci odchylek.

Ty byly později ověřeny experimentálně (poprvé při zatmění Slunce 1919).

Ve 20. století Albert Einstein ve své teorii obecné relativity dokázal, že skutečný svět *není* eukleidovský.

Je-li například trojúhelník tvořen třemi paprsky světla, pak v důsledku gravitace součet vnitřních úhlů *není* 180 stupňů.

Gravitační pole Země a Slunce jsou relativně slabá. Proto do 20. století nešlo teorii ověřit experimentálně.

Einstein ale předpověděl existenci odchylek.

Ty byly později ověřeny experimentálně (poprvé při zatmění Slunce 1919).

Relativistickou korekci obsahuje i váš systém GPS.

Současný pohled na věc

Všechny tři uvedené geometrie jsou považovány za **konsistentní a bezchybné**.

Všechny tři uvedené geometrie jsou považovány za **konsistentní a bezchybné**.

Ta, která popisuje náš fyzický svět, by měla být určena **empiricky**.

Všechny tři uvedené geometrie jsou považovány za **konsistentní a bezchybné**.

Ta, která popisuje náš fyzický svět, by měla být určena **empiricky**.

Gauss: navrhl triangulaci tří horských vrcholů a měření součtu úhlů.

Všechny tři uvedené geometrie jsou považovány za **konsistentní a bezchybné**.

Ta, která popisuje náš fyzický svět, by měla být určena **empiricky**.

Gauss: navrhl triangulaci tří horských vrcholů a měření součtu úhlů. Experiment (snad) proběhl, ovšem s neprůkazným výsledkem.

Všechny tři uvedené geometrie jsou považovány za **konsistentní a bezchybné**.

Ta, která popisuje náš fyzický svět, by měla být určena **empiricky**.

Gauss: navrhl triangulaci tří horských vrcholů a měření součtu úhlů. Experiment (snad) proběhl, ovšem s neprůkazným výsledkem.

Poincaré, Russell: jestliže optické experimenty ukazují, že fyzický prostor není eukleidovský, zachovejme eukleidovskou geometrii a předpokládejme, že se světelné paprsky nepohybují po geodetikách.

Všechny tři uvedené geometrie jsou považovány za **konsistentní a bezchybné**.

Ta, která popisuje náš fyzický svět, by měla být určena **empiricky**.

Gauss: navrhl triangulaci tří horských vrcholů a měření součtu úhlů. Experiment (snad) proběhl, ovšem s neprůkazným výsledkem.

Poincaré, Russell: jestliže optické experimenty ukazují, že fyzický prostor není eukleidovský, zachovejme eukleidovskou geometrii a předpokládejme, že se světelné paprsky nepohybují po geodetikách.

Poincaré a Russell změnili názor na základě teorie relativity, jiní (například **Alfred North Whitehead**) nikdy.

Konsistence neeukleidovských geometrií

Důkazy konsistence eliptické a hyperbolické geometrie často využívají různé **modely**.

Důkazy konsistence eliptické a hyperbolické geometrie často využívají různé **modely**.

Důkaz je pak veden takto: je-li eukleidovská geometrie konsistentní, pak ta naše také.

Konsistence neeukleidovských geometrií

Důkazy konsistence eliptické a hyperbolické geometrie často využívají různé **modely**.

Důkaz je pak veden takto: je-li eukleidovská geometrie konsistentní, pak ta naše také.

Důkaz konsistence eukleidovské geometrie se opírá o její aritmetisaci (**Gerhard Gentzen 1936**).

Alan Calder: *The God exists because arithmetic is consistent. The Devil exists because we cannot prove it.*

Alan Calder: *The God exists because arithmetic is consistent. The Devil exists because we cannot prove it.*

Paul C. Rosenbloom: *The various metaproofs of arithmetic's consistency may not have eliminated the Devil, but they have reduced the size of hell almost to zero.*

Poslední mohykán

Jedním z posledních seriózních matematiků, který pochyboval o neeukleidovských geometriích, byl *Lewis Carroll 1832-1898*.

Jedním z posledních seriózních matematiků, který pochyboval o neeukleidovských geometriích, byl *Lewis Carroll 1832-1898*.

K tomu jeden citát:

Jedním z posledních seriózních matematiků, který pochyboval o neeukleidovských geometriích, byl *Lewis Carroll 1832-1898*.

K tomu jeden citát:

H.S.M. Coxeter:

Jedním z posledních seriózních matematiků, který pochyboval o neeukleidovských geometriích, byl *Lewis Carroll 1832-1898*.

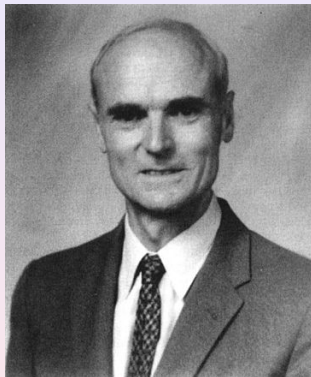
K tomu jeden citát:

H.S.M. Coxeter:

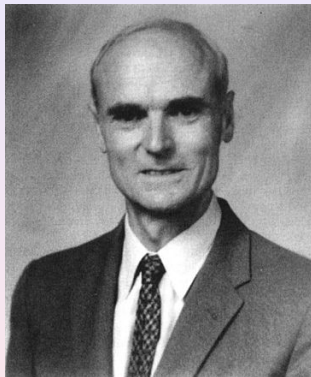
Je to zvláštní paradox, když se chlápek, jehož Alenka mění svou velikost tím, že sní malý koláček, nedokáže smířit s možností, že trojúhelník, jehož strany se protahují do nekonečna, má konečný obsah.

Harold Scott McDonald Coxeter 1907-2003

Harold Scott McDonald Coxeter 1907-2003



Harold Scott McDonald Coxeter 1907-2003



Harold Scott McDonald Coxeter





Circle Limit III (M.C. Escher, dřvořezba, 1959)

Circle Limit III - co vidíme na obrázku

Circle Limit III - co vidíme na obrázku

Několik pozorování:

Několik pozorování:

- jedno z mála Escherových děl obsahující několik barev

Několik pozorování:

- jedno z mála Escherových děl obsahující několik barev
- inspirace eukleidovským modelem hyperbolické roviny

Několik pozorování:

- jedno z mála Escherových děl obsahující několik barev
- inspirace eukleidovským modelem hyperbolické roviny
- původní model: **Henri Poincaré**, založen na *dláždění roviny*

Několik pozorování:

- jedno z mála Escherových děl obsahující několik barev
- inspirace eukleidovským modelem hyperbolické roviny
- původní model: **Henri Poincaré**, založen na *dláždění roviny*
- co je za hranicí kruhu?

Několik pozorování:

- jedno z mála Escherových děl obsahující několik barev
- inspirace eukleidovským modelem hyperbolické roviny
- původní model: **Henri Poincaré**, založen na *dláždění roviny*
- co je za hranicí kruhu? *“absolutní nicota”*

Několik pozorování:

- jedno z mála Escherových děl obsahující několik barev
- inspirace eukleidovským modelem hyperbolické roviny
- původní model: **Henri Poincaré**, založen na *dláždění roviny*
- co je za hranicí kruhu? *“absolutní nicota”*
- hyperbolickým tvorům připadá jejich svět nekonečný

Několik pozorování:

- jedno z mála Escherových děl obsahující několik barev
- inspirace eukleidovským modelem hyperbolické roviny
- původní model: **Henri Poincaré**, založen na *dláždění roviny*
- co je za hranicí kruhu? *“absolutní nicota”*
- hyperbolickým tvorům připadá jejich svět nekonečný
- první omyl: nepředstavujte si to jako sféru!

Několik pozorování:

- jedno z mála Escherových děl obsahující několik barev
- inspirace eukleidovským modelem hyperbolické roviny
- původní model: **Henri Poincaré**, založen na *dláždění roviny*
- co je za hranicí kruhu? *“absolutní nicota”*
- hyperbolickým tvorům připadá jejich svět nekonečný
- první omyl: nepředstavujte si to jako sféru!
- druhý omyl: bílé čáry *nejsou* hyperbolické geodetiky!

Circle Limit III - co nevidíme na obrázku

Ještě několik pozorování:

Ještě několik pozorování:

- místa setkání čtyř ploutví jsou vrcholy *rovnostranných* trojúhelníků s úhly *45* stupňů

Ještě několik pozorování:

- místa setkání čtyř ploutví jsou vrcholy *rovnostranných* trojúhelníků s úhly *45* stupňů
- takových trojúhelníků se tam vejde 8 (u Eukleida 6)

Ještě několik pozorování:

- místa setkání čtyř ploutví jsou vrcholy *rovnostranných* trojúhelníků s úhly *45* stupňů
- takových trojúhelníků se tam vejde 8 (u Eukleida 6)
- jejich středy jsou místa setkání tří ploutví a místa setkání tří čumáků

Ještě několik pozorování:

- místa setkání čtyř ploutví jsou vrcholy *rovnostranných* trojúhelníků s úhly *45* stupňů
- takových trojúhelníků se tam vejde 8 (u Eukleida 6)
- jejich středy jsou místa setkání tří ploutví a místa setkání tří čumáků
- Coxeter: *jde o "nejmatematictější" Escherovo dílo*

Eliptická geometrie - model

Zhruba řečeno, eliptickou geometrii je možné ilustrovat na sféře nebo na elipsoidu.

Zhruba řečeno, eliptickou geometrii je možné ilustrovat na sféře nebo na elipsoidu.

- geodetiky jsou maximální kružnice,

Zhruba řečeno, eliptickou geometrii je možné ilustrovat na sféře nebo na elipsoidu.

- geodetiky jsou maximální kružnice,
- žádné dvě nemohou být rovnoběžné.

Crank mathematicians

Crank mathematicians

crank mathematician = matematický pošuk

Crank mathematicians

crank mathematician = matematický pošuk

matematictí pošuci:

crank mathematician = matematický pošuk

matematictí pošuci:

- trisektoři,

crank mathematician = matematický pošuk

matematictí pošuci:

- trisektoři,
- kvadraturisti,

crank mathematician = matematický pošuk

matematictí pošuci:

- trisektoři,
- kvadraturisti,
- fermatisti,

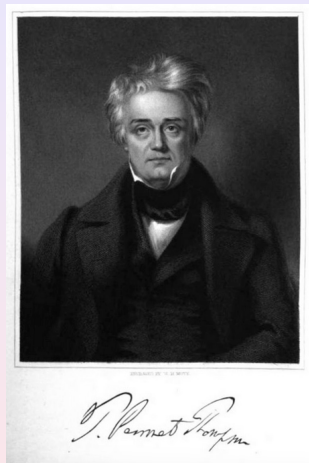
crank mathematician = matematický pošuk

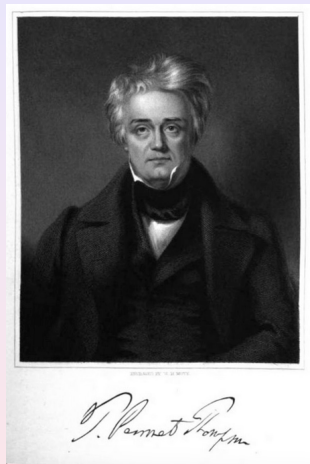
matematictí pošuci:

- trisektoři,
- kvadraturisti,
- fermatisti,
- dokazovači pátého axiomu.

generál Thompson 1783-1869

generál Thompson 1783-1869





generálmajor Thomas Perronet Thompson

Život a dílo generála Thompsona

Augustus De Morgan 1806-1871: *A Budget of Paradoxes*

Augustus De Morgan 1806-1871: *A Budget of Paradoxes*

Generál Thompson byl nejneúnavnější britský dokazovač pátého axiomu.

Augustus De Morgan 1806-1871: *A Budget of Paradoxes*

Generál Thompson byl nejneúnavnější britský dokazovač pátého axiomu.

Postupně poslal několik desítek důkazů, které neustále vylepšoval.

Augustus De Morgan 1806-1871: *A Budget of Paradoxes*

Generál Thompson byl nejneúnavnější britský dokazovač pátého axiomu.

Postupně poslal několik desítek důkazů, které neustále vylepšoval.

V jednom z nich objevil dosud nevídaný druh spirály.

Augustus De Morgan 1806-1871: *A Budget of Paradoxes*

Generál Thompson byl nejneúnavnější britský dokazovač pátého axiomu.

Postupně poslal několik desítek důkazů, které neustále vylepšoval.

V jednom z nich objevil dosud nevídaný druh spirály.

De Morgan se jej vytrvale snažil od této činnosti odradit.

Augustus De Morgan 1806-1871: *A Budget of Paradoxes*

Generál Thompson byl nejneúnavnější britský dokazovač pátého axiomu.

Postupně poslal několik desítek důkazů, které neustále vylepšoval.

V jednom z nich objevil dosud nevídaný druh spirály.

De Morgan se jej vytrvale snažil od této činnosti odradit.

To se mu nepovedlo.

Augustus De Morgan 1806-1871: *A Budget of Paradoxes*

Generál Thompson byl nejneúnavnější britský dokazovač pátého axiomu.

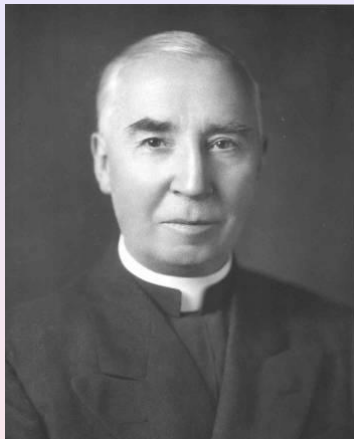
Postupně poslal několik desítek důkazů, které neustále vylepšoval.

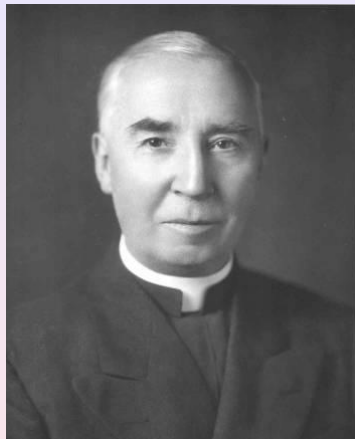
V jednom z nich objevil dosud nevídaný druh spirály.

De Morgan se jej vytrvale snažil od této činnosti odradit.

To se mu nepovedlo.

Thompson také navrhl úpravu klaviatury varhan, aby oktáva měla 40 tónů.





the Very Reverend Jeremiah Joseph Callahan, president of
Duquesne University in Pittsburgh

Život a dílo otce Callahana

1931 • otec Callahan oznámil, že právě úspěšně dokončil trisekci úhlu

1931 • otec Callahan oznámil, že právě úspěšně dokončil trisekci úhlu

(vyneslo mu to článek a fotografii v časopise *Time*)

1931 • otec Callahan oznámil, že právě úspěšně dokončil trisekci úhlu

(vyneslo mu to článek a fotografii v časopise *Time*)

1932 • otec Callahan vydal své zásadní dílo *Euclid or Einstein: A Proof of the Parallel Theory and a Critique of Metageometry* (nakladatelství *Devon-Adair*, 310 stránek)

Tak pravil otec Callahan

Několik citací z knihy otce Callahana (škoda překládat):

Několik citací z knihy otce Callahana (škoda překládat):

“Einstein is fuddled”, “has not a logical mind”, “is in a *mental fog*”, “is a careless thinker”, “his thought staggers, and reels, and stumbles, and falls, like a blind man rushing into unknown territory”, “Sometimes one feels like laughing and sometimes one feels a little irritated. *But there is no use expecting Einstein to reason.*”

Citace pro otce Callahana

Zajímá vás, jak vedl otec Callahan svůj jednoduchý důkaz a kde učinil elementární chybu?

Zajímá vás, jak vedl otec Callahan svůj jednoduchý důkaz a kde učinil elementární chybu?

Pohled'te sem:

Zajímá vás, jak vedl otec Callahan svůj jednoduchý důkaz a kde učinil elementární chybu?

Pohled'te sem:

D.R. Ward, *The Mathematical Gazette* 17 (1933), 101–104.

William L. Fischer (München): *Kritik der Nicht-Euklid'schen Geometrie* (1959 !)

William L. Fischer (München): *Kritik der Nicht-Euklid'schen Geometrie* (1959 !)

Obzvláště zábavná pasáž: stížnost na universitu v Cambridge, že se odmítla zabývat jeho knihou.

Richard Hazelett, Dean E. Turner:

Richard Hazelett, Dean E. Turner:

The Einstein Myth and the Ives Papers (1984 !!)

Richard Hazelett, Dean E. Turner:

The Einstein Myth and the Ives Papers (1984 !!)

(plamenná obhajoba důkazu otce Callahana)

Richard Hazelett, Dean E. Turner:

The Einstein Myth and the Ives Papers (1984 !!)

(plamenná obhajoba důkazu otce Callahana)

kvalifikace autorů:

Richard Hazelett, Dean E. Turner:

The Einstein Myth and the Ives Papers (1984 !!)

(plamenná obhajoba důkazu otce Callahana)

kvalifikace autorů: oba jsou pastory církve *The Disciples of Christ Church*

Martin Gardner:

Martin Gardner:

Prý neexistují jednoznačná kritéria pro odlišení matematického pošuka od poctivého matematika.

Martin Gardner:

Prý neexistují jednoznačná kritéria pro odlišení matematického pošuka od poctivého matematika.

Ano, ale právě tak neexistují jednoznačná kritéria pro rozlišení mezi dnem a nocí, mezi životem a smrtí, mezi oceánem a pevninou.

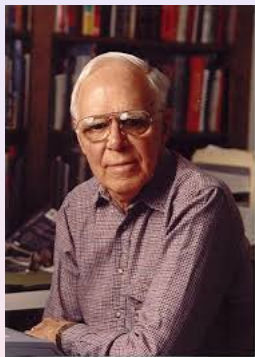
Martin Gardner:

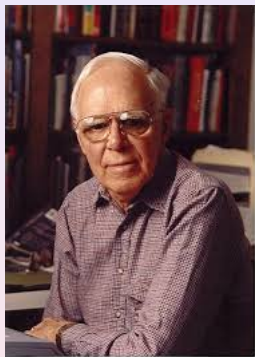
Prý neexistují jednoznačná kritéria pro odlišení matematického pošuka od poctivého matematika.

Ano, ale právě tak neexistují jednoznačná kritéria pro rozlišení mezi dnem a nocí, mezi životem a smrtí, mezi oceánem a pevninou.

Každopádně, milý čtenáři, máš-li důkaz pátého axiomu, **neposílej mi jej!**

Martin Gardner 1914-2010





Martin Gardner

Absolutní geometrie

Kromě tří zde zatím uvedených geometrií podle Bolyaie existuje **absolutní geometrie**, jejíž věty zůstávají v platnosti v libovolné z nich.

Kromě tří zde zatím uvedených geometrií podle Bolyaie existuje **absolutní geometrie**, jejíž věty zůstávají v platnosti v libovolné z nich.

Neuvěřitelná věc: prvních **28** vět z Euklidových základů patří do této kategorie.

Kromě tří zde zatím uvedených geometrií podle Bolyaie existuje **absolutní geometrie**, jejíž věty zůstávají v platnosti v libovolné z nich.

Neuvěřitelná věc: prvních **28** vět z Euklidových základů patří do této kategorie.

Bolyai dokázal mnoho dalších.

A ještě jeden limerick (anonym)

A ještě jeden limerick (anonym)

*A conjecture both deep and profound
Is whether a circle is round.
In a paper by Erdős,
Written in Kurdish,
A counterexample is found.*

Taxikářská geometrie

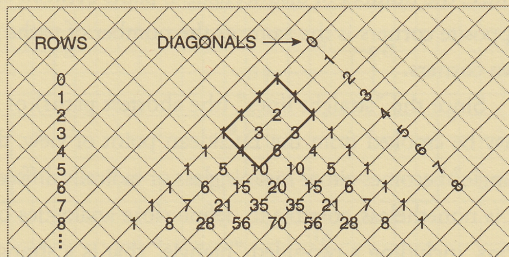
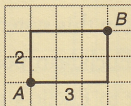




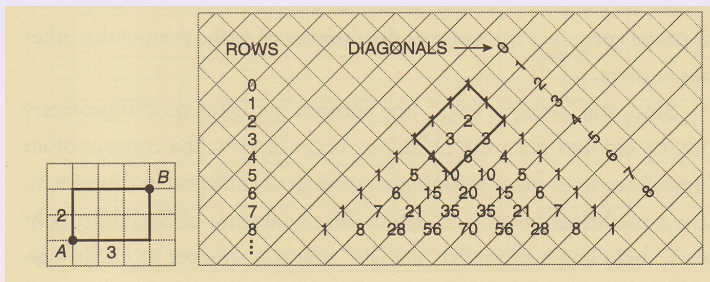
Proč taxikářská geometrie?

Spojnice dvou bodů

Spojnice dvou bodů

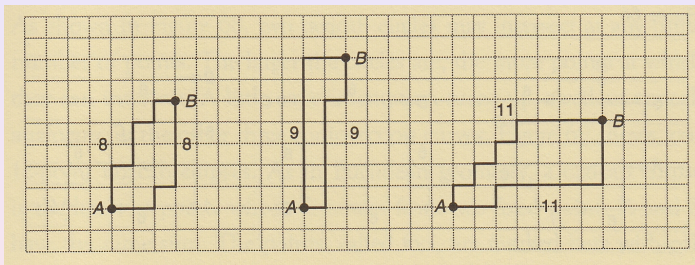


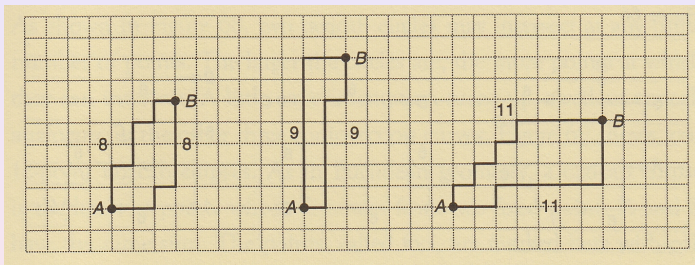
Spojnice dvou bodů



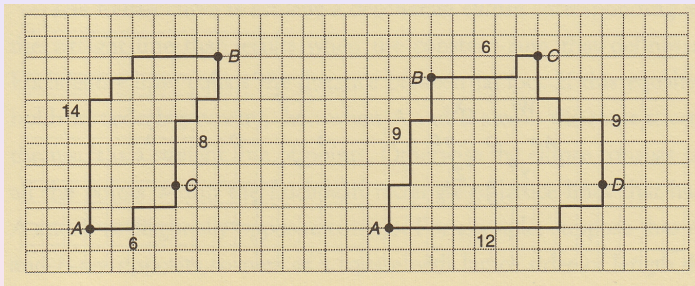
Kolik existuje různých spojníc dvou bodů?

Dvojúhelník

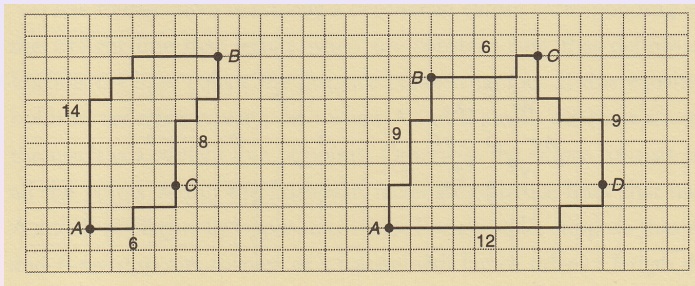




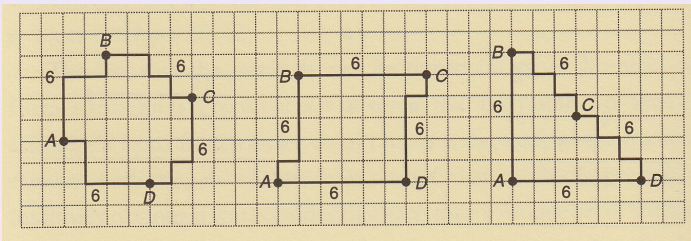
Co je to dvojúhelník?

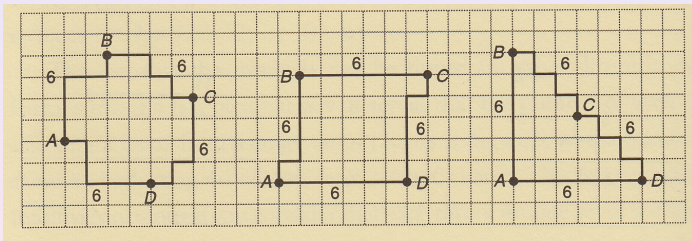


Trojúhelník

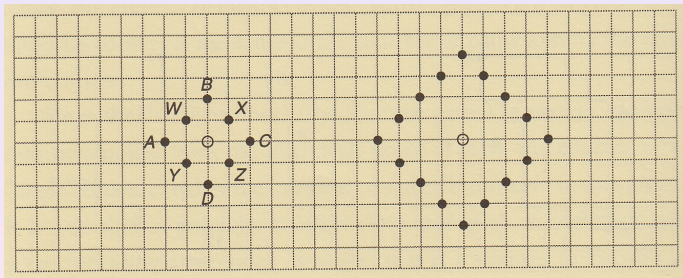


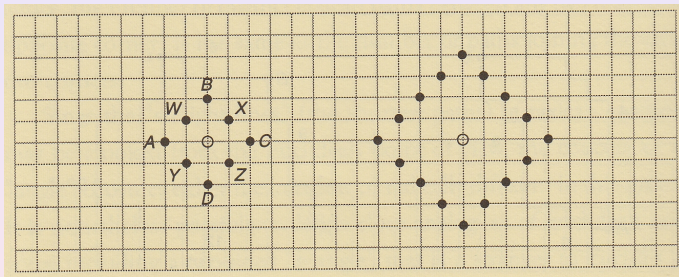
Platí trojúhelníková nerovnost?





Jsou úhlopříčky ve čtverci stejně dlouhé?

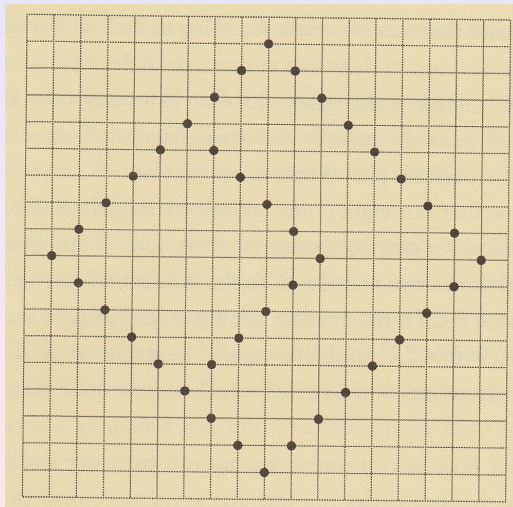


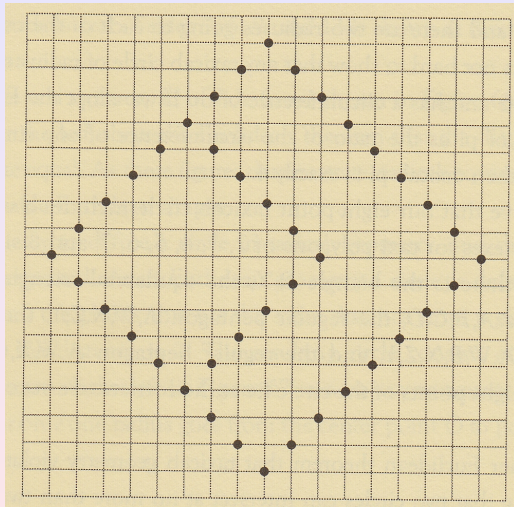


Co je to kružnice? A jak moc je kulatá?

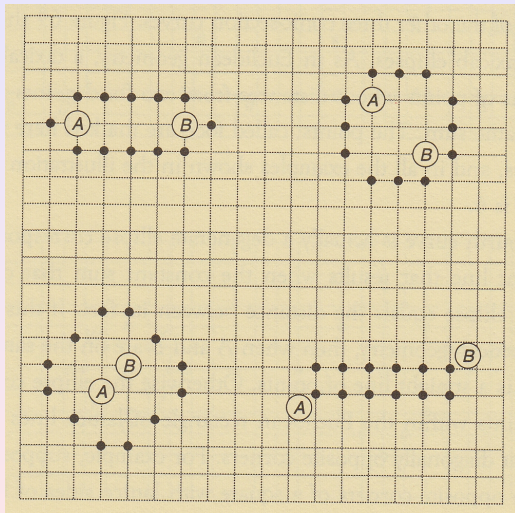
Dotyk kružnic

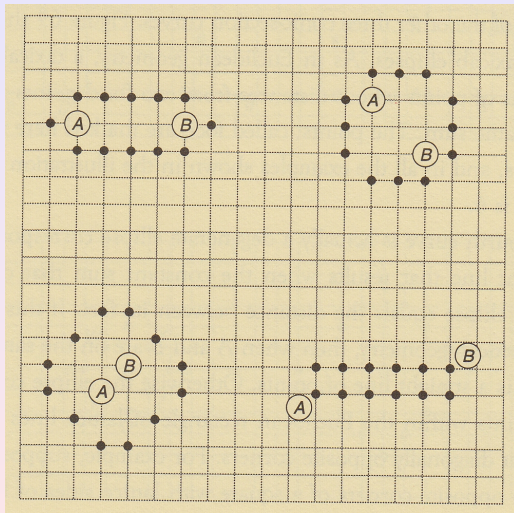
Dotyk kružnic





V kolika bodech se mohou dotýkat dvě různé kružnice?

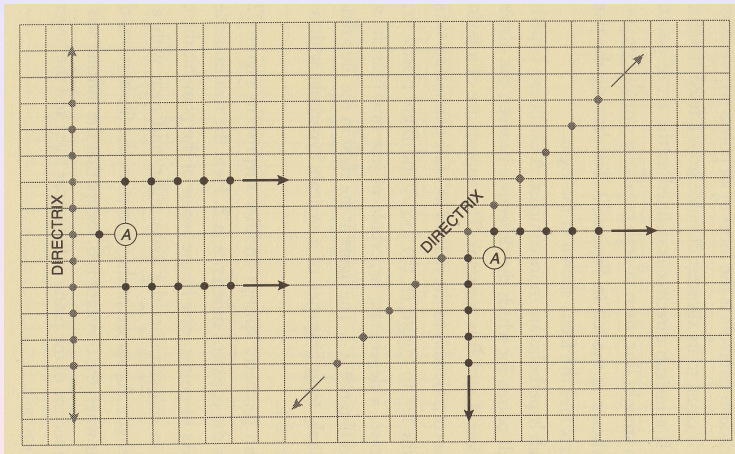


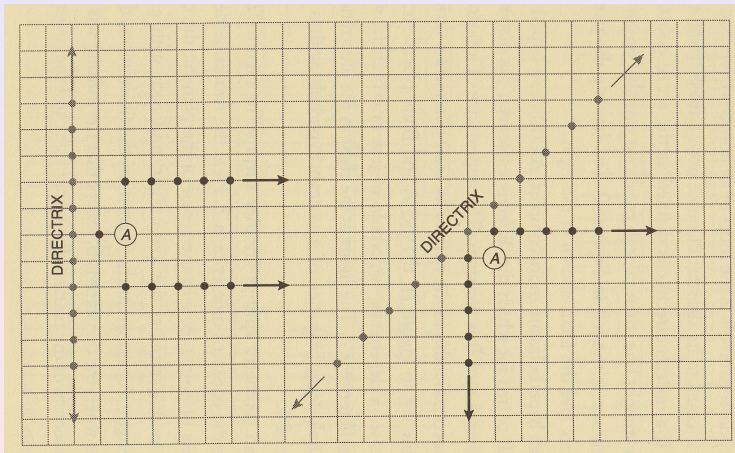


Co je to taxikářská elipsa?

Parabola

Parabola

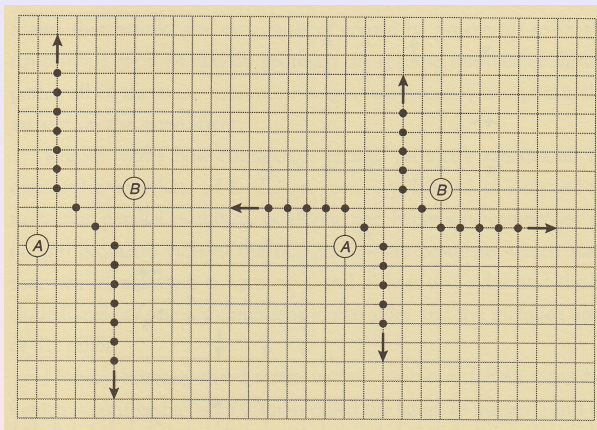




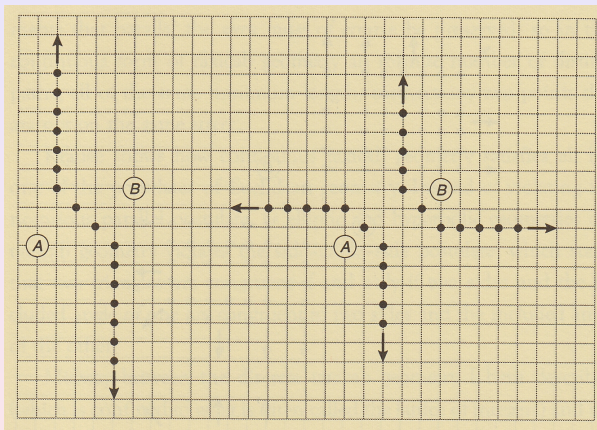
Co je to taxikářská parabola?

Hyperbola

Hyperbola



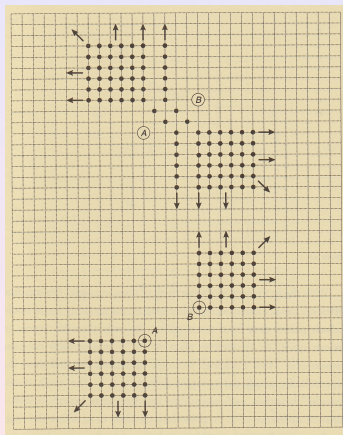
Hyperbola



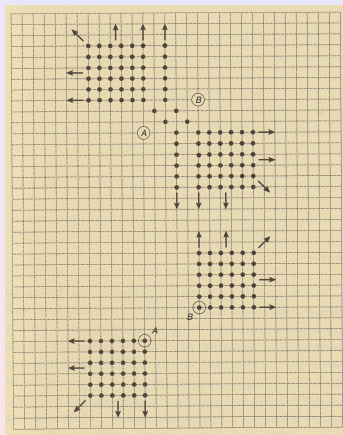
Co je to taxikářská hyperbola?

Hyperboly podruhé

Hyperboly podruhé

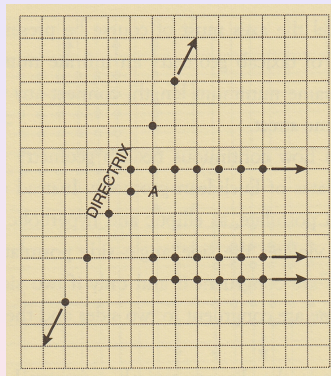


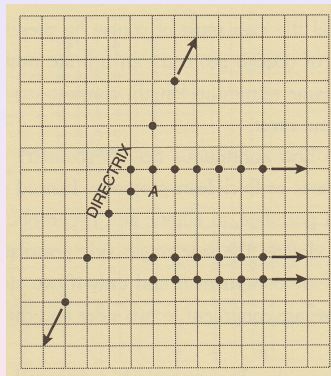
Hyperboly podruhé



Co je to taxikářská hyperbola?

Parabola - řešení





Ještě jedna taxikářská parabola.

Abbottovy kružnice

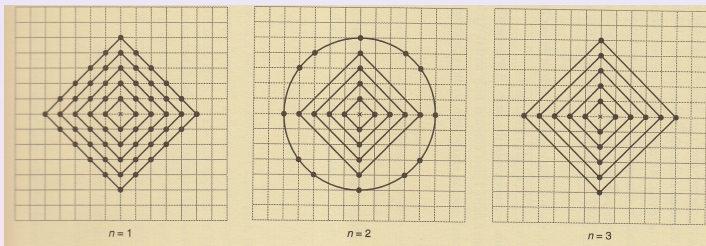
Kenneth W. Abbott: *“vzdáleností”* rozumíme číslo $\sqrt[n]{x^n + y^n}$,
pokud je celé.

Kenneth W. Abbott: *“vzdáleností”* rozumíme číslo $\sqrt[n]{x^n + y^n}$,
pokud je celé.

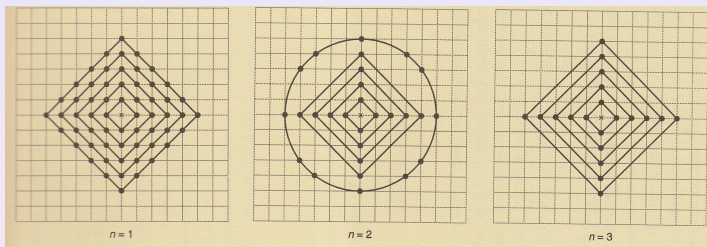
Triviální kružnicí rozumíme kružnici sestávající ze čtyř bodů.

Abbottovy kružnice

Abbotovy kružnice

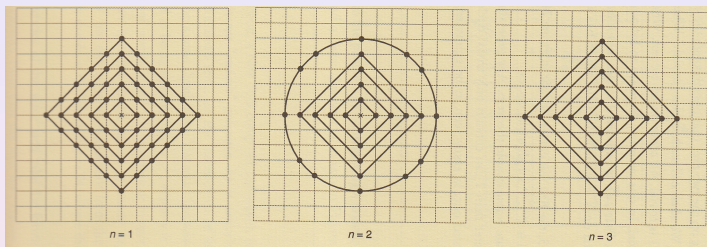


Abbottovy kružnice



Pro $n = 1$ je triviální pouze kružnice o poloměru 1.

Abbotovy kružnice



Pro $n = 1$ je triviální pouze kružnice o poloměru 1.

Pro $n = 2$ je až pátá kružnice netriviální, obou typů je nekonečně mnoho, $\pi = 2\sqrt{2}$ pro triviální kružnice, jinak mění hodnotu.

Věta do šatny

Věta: *Pro $n \geq 3$ jsou všechny Abbottovy kružnice triviální.*

Věta: *Pro $n \geq 3$ jsou všechny Abbottovy kružnice triviální.*

Otázka: jak těžká je tato věta?

Věta: *Pro $n \geq 3$ jsou všechny Abbottovy kružnice triviální.*

Otázka: jak těžká je tato věta?

Odpověď: je to velká Fermatova věta v převleku.

The last slide

The last slide





Díky za pozornost!