

Co lze a co nelze

(... aneb několik úvah na téma "To nejde!")

Občasný Seminář z Matematické Analýzy

KAM FEI VŠB-TU Ostrava, 15.3.2016
Mirko Rokyta
KMA MFF UK Praha

Občasný Seminář z Matematické Analýzy

Občasný Seminář z Matematické Analýzy

Občasný Seminář z Matematiky

Občasný Sminář z Matematické Analýzy

Občasný Sminář z MAtematiky

Matematika je způsob, jakým přemýšlíme o světě kolem nás.

Občasný Seminář z Matematické Analýzy

Občasný Seminář z Matematiky

Matematika je způsob, jakým přemýšlíme o světě kolem nás.

Co to znamená, když se řekne, že něco "nejde"?

Občasný Seminář z Matematické Analýzy

Občasný Seminář z Matematiky

Matematika je způsob, jakým přemýšlíme o světě kolem nás.

Co to znamená, když se řekne, že něco "nejde"?
Pozor, nezaměňovat s výrokem "Já to neumím".

Občasný Seminář z Matematické Analýzy

Občasný Seminář z Matematiky

Matematika je způsob, jakým přemýšlíme o světě kolem nás.

Co to znamená, když se řekne, že něco "nejde"?

Pozor, nezaměňovat s výrokem "Já to neumím".

(Tomáš Baťa: Neříkej, že to nejde, řekni, že to neumíš.)

Občasný Seminář z Matematické Analýzy

Občasný Seminář z Matematiky

Matematika je způsob, jakým přemýšlíme o světě kolem nás.

Co to znamená, když se řekne, že něco "nejde"?

Pozor, nezaměňovat s výrokem "Já to neumím".

(Tomáš Baťa: Neříkej, že to nejde, řekni, že to neumíš.)

(Opravdu je to tak? Co když některé věci opravdu nejdou udělat?)

Občasný Seminář z Matematické Analýzy

Občasný Seminář z Matematiky

Matematika je způsob, jakým přemýšlíme o světě kolem nás.

Co to znamená, když se řekne, že něco "nejde"?

Pozor, nezaměňovat s výrokem "Já to neumím".

(Tomáš Baťa: Neříkej, že to nejde, řekni, že to neumíš.)

(Opravdu je to tak? Co když některé věci opravdu nejdou udělat?)

Pokud si matematik myslí, že něco NELZE, měl by umět DOKÁZAT, že to nelze.

Příklady:

- V padesáti nelze hrát špičkově hokej v současné NHL.

Příklady:

- V padesáti nelze hrát špičkově hokej v současné NHL. (Opravdu?)

Příklady:

- V padesáti nelze hrát špičkově hokej v současné NHL. (Opravdu?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel.

Příklady:

- V padesáti nelze hrát špičkově hokej v současné NHL. (Opravdu?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (A co $\sqrt{4} = \frac{2}{1}$?)

Příklady:

- V padesáti nelze hrát špičkově hokej v současné NHL. (Opravdu?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (A co $\sqrt{4} = \frac{2}{1}$?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla, **které není druhou mocninou přirozeného čísla**, nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel.

Příklady:

- V padesáti nelze hrát špičkově hokej v současné NHL. (Opravdu?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (A co $\sqrt{4} = \frac{2}{1}$?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla, **které není druhou mocninou přirozeného čísla**, nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (To je pravda.

Příklady:

- V padesáti nelze hrát špičkově hokej v současné NHL. (Opravdu?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (A co $\sqrt{4} = \frac{2}{1}$?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla, **které není druhou mocninou přirozeného čísla**, nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (To je pravda. Uměli byste to dokázat?)

Co je dnes na programu:

- 1 Problém vykousnuté šachovnice.

Co je dnes na programu:

- 1 Problém vykousnuté šachovnice.
- 2 Kam lze a kam nelze doskakat (na čtverečkovém papíru) - tzv. *Conway's Soldiers Problem*.

Co je dnes na programu:

- 1 Problém vykousnuté šachovnice.
- 2 Kam lze a kam nelze doskát (na čtverečkovém papíru) - tzv. *Conway's Soldiers Problem*.
- 3 Problém 4 barev.

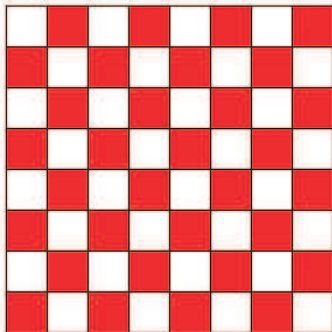
Co je dnes na programu:

- 1 Problém vykousnuté šachovnice.
- 2 Kam lze a kam nelze doskákat (na čtverečkovém papíru) - tzv. *Conway's Soldiers Problem*.
- 3 Problém 4 barev.
- 4 Trisekce úhlu, kvadratura kruhu, duplikace krychle.

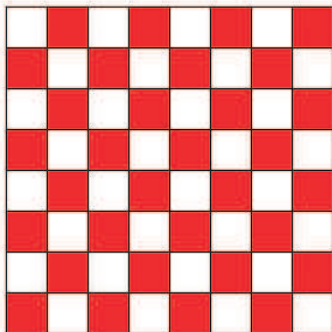
Co je dnes na programu:

- 1 Problém vykousnuté šachovnice.
- 2 Kam lze a kam nelze doskákat (na čtverečkovém papíru) - tzv. *Conway's Soldiers Problem*.
- 3 Problém 4 barev.
- 4 Trisekce úhlu, kvadratura kruhu, duplikace krychle.
- 5 Collatzův problém.

2. Problém vykousnuté šachovnice

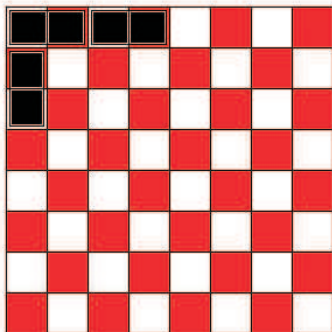


2. Problém vykousnuté šachovnice



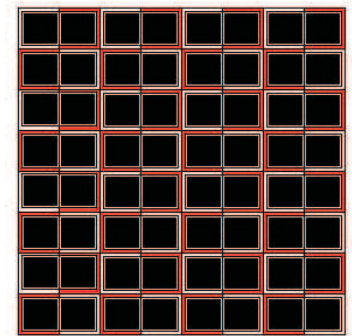
Otázka: Lze pokrýt šachovnici kostkami domina?

2. Problém vykousnuté šachovnice



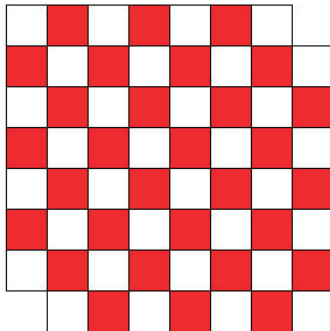
Začít je možno například takto...

2. Problém vykousnuté šachovnice



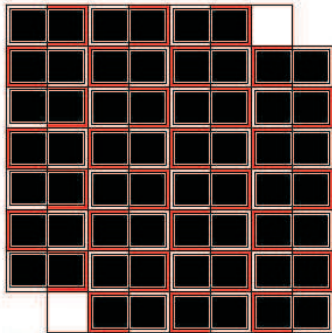
... a ... ano, samozřejmě to lze.

2. Problém vykousnuté šachovnice



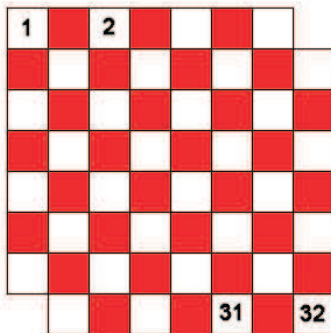
Otázka č.2: Lze pokrýt **takto "vykousnutou"** šachovnici kostkami domina?

2. Problém vykousnuté šachovnice



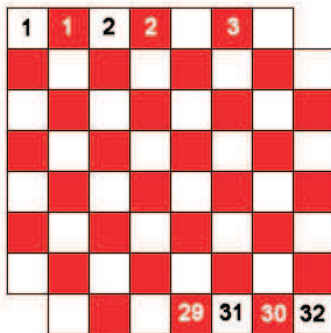
Je to problém typu "nelze" nebo problém typu "já to neumím"?

2. Problém vykousnuté šachovnice



Bílých polí je 32.

2. Problém vykousnuté šachovnice



Červených polí je 30.

2. Problém vykousnuté šachovnice

Tvrzení

"Vykousnutou" šachovnici nelze pokrýt kostkami domina.

2. Problém vykousnuté šachovnice

Tvrzení

"Vykousnutou" šachovnici nelze pokrýt kostkami domina.

Důkaz.

2. Problém vykousnuté šachovnice

Tvrzení

"Vykousnutou" šachovnici nelze pokrýt kostkami domina.

Důkaz.

- Bílých polí na vykousnuté šachovnici je 32.

2. Problém vykousnuté šachovnice

Tvrzení

"Vykousnutou" šachovnici nelze pokrýt kostkami domina.

Důkaz.

- Bílých polí na vykousnuté šachovnici je 32.
- Červených polí na vykousnuté šachovnici je 30.

Tvrzení

"Vykousnutou" šachovnici nelze pokrýt kostkami domina.

Důkaz.

- Bílých polí na vykousnuté šachovnici je 32.
- Červených polí na vykousnuté šachovnici je 30.
- Dominová kostka pokryje vždy právě jedno bílé a právě jedno červené pole.

Tvrzení

"Vykousnutou" šachovnici nelze pokrýt kostkami domina.

Důkaz.

- Bílých polí na vykousnuté šachovnici je 32.
- Červených polí na vykousnuté šachovnici je 30.
- Dominová kostka pokryje vždy právě jedno bílé a právě jedno červené pole.
- Když položím **jakkoli** 30 kostek domina, zbudou 2 bílá pole.

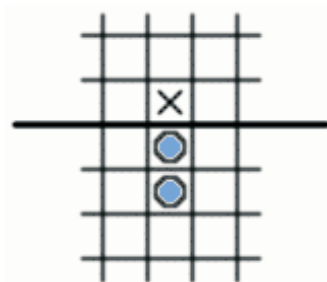
Tvrzení

"Vykousnutou" šachovnici nelze pokrýt kostkami domina.

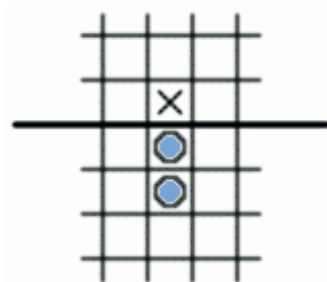
Důkaz.

- Bílých polí na vykousnuté šachovnici je 32.
- Červených polí na vykousnuté šachovnici je 30.
- Dominová kostka pokryje vždy právě jedno bílé a právě jedno červené pole.
- Když položím **jakkoli** 30 kostek domina, zbudou 2 bílá pole.
- Ale dvě pole stejné barvy nelze pokrýt jednou kostkou domina, protože pole stejné barvy neleží vedle sebe.

3. Do které řady lze doskákat?

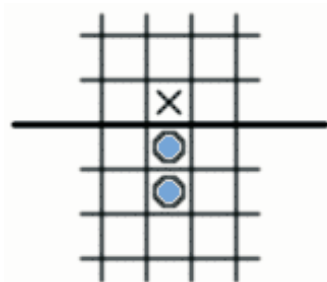


3. Do které řady lze doskákat?



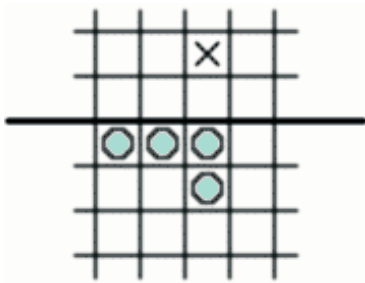
Konfigurace pro skok do první řady za bariéru je triviální.

3. Do které řady lze doskákat?



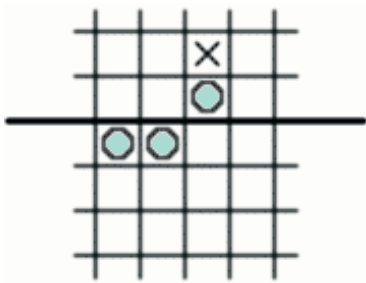
Konfigurace pro skok do první řady za bariéru je triviální.
Uměli byste najít konfiguraci, pomocí které lze doskákat
do druhé řady?

3. Do které řady lze doskákat?



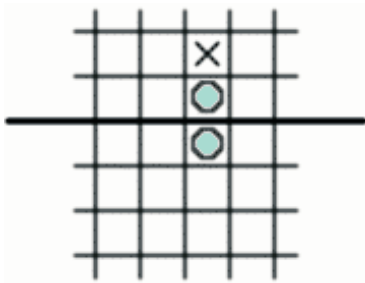
To je ona. Věříte?

3. Do které řady lze doskákat?



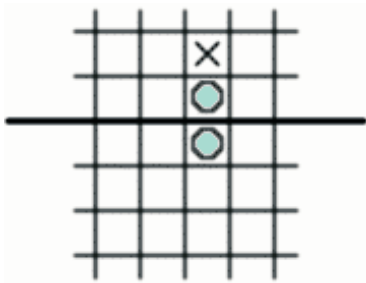
Přeskočený kámen je potřeba odstranit.

3. Do které řady lze doskákat?



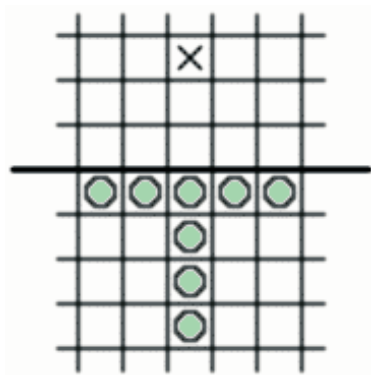
... a poslední skok už je jasný.

3. Do které řady lze doskákat?

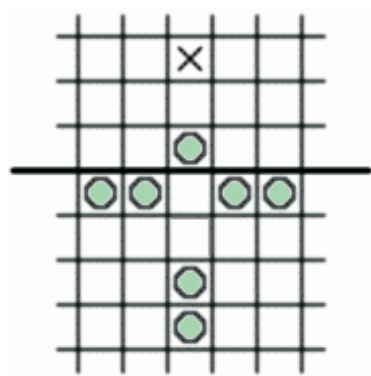


... a poslední skok už je jasný. A co třetí řada?

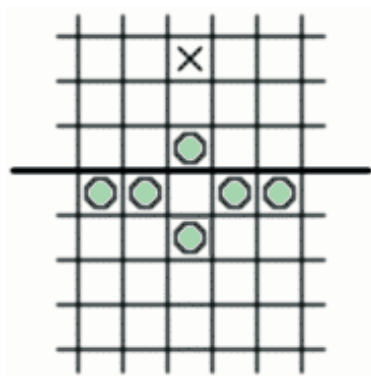
3. Do které řady lze doskákat?



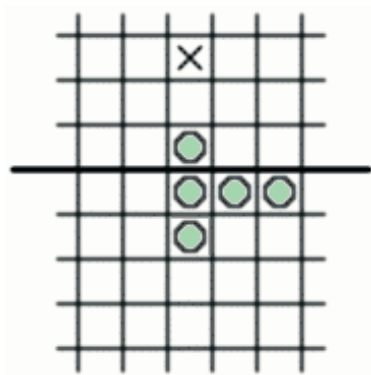
3. Do které řady lze doskákat?



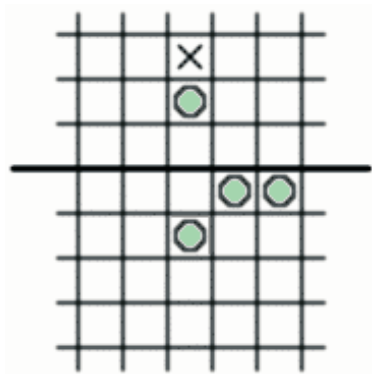
3. Do které řady lze doskákat?



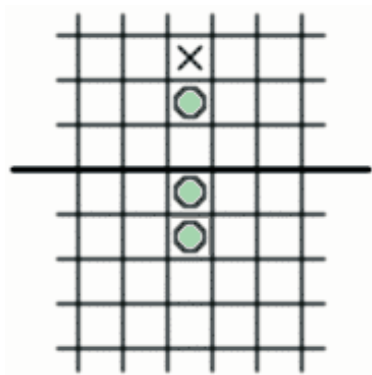
3. Do které řady lze doskákat?



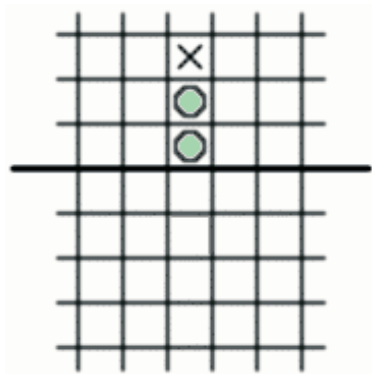
3. Do které řady lze doskákat?



3. Do které řady lze doskákat?



3. Do které řady lze doskákat?



3. Do které řady lze doskákat?

Krátké shrnutí:

3. Do které řady lze doskákat?

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.

3. Do které řady lze doskákat?

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.

3. Do které řady lze doskákat?

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.

3. Do které řady lze doskákat?

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.
- Uměli byste doskákat do čtvrté řady?

3. Do které řady lze doskákat?

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.
- Uměli byste doskákat do čtvrté řady?
- A kolik kamenů je k tomu minimálně potřeba?

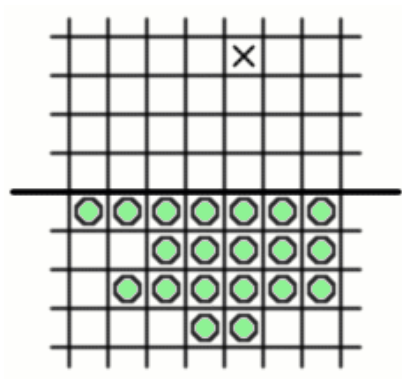
3. Do které řady lze doskákat?

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.
- Uměli byste doskákat do čtvrté řady?
- A kolik kamenů je k tomu minimálně potřeba?

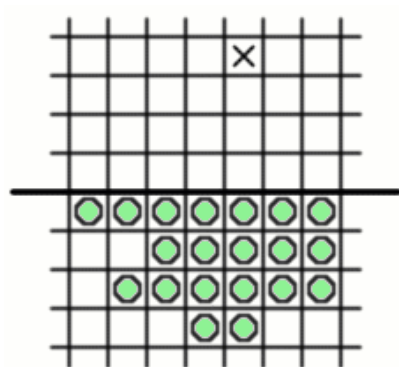
Překvapení č. 1: Je potřeba alespoň 20 kamenů.

3. Do které řady lze doskákat?



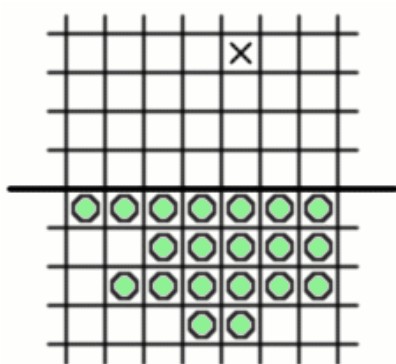
Toto je ona konfigurace.

3. Do které řady lze doskákat?



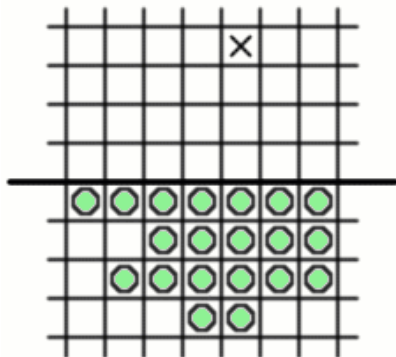
Toto je ona konfigurace. (Skákejte za domácí cvičení.)

3. Do které řady lze dosákat?



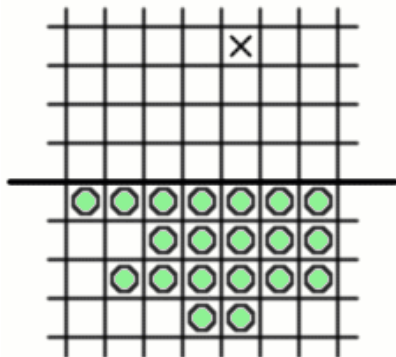
Toto je ona konfigurace. (Skákejte za domácí cvičení.)
(Případně se pokuste najít konfiguraci s méně než 20 kameny.

3. Do které řady lze doskákat?



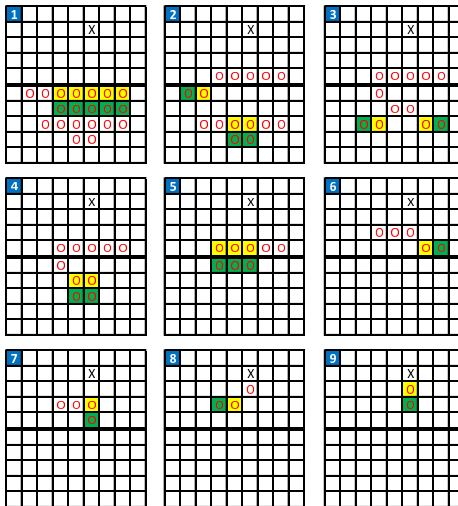
Toto je ona konfigurace. (Skákejte za domácí cvičení.)
(Případně se pokuste najít konfiguraci s méně než 20 kameny... nebo dokázat, že taková není.)

3. Do které řady lze doskákat?



Toto je ona konfigurace. (Skákejte za domácí cvičení.)
(Případně se pokuste najít konfiguraci s méně než 20 kameny... nebo dokázat, že taková není.) Na příštím slajdu je návod k tomu, jak skákat, který teď rychle přeskočím.

3. Do které řady lze doskákat?



Skáčíme do čtvrté řady - zelení skáčíou přes žluté

3. Do které řady lze doskákat?

Zásadní otázka:

3. Do které řady lze doskákat?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?

3. Do které řady lze doskákat?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

3. Do které řady lze doskákat?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Překvapení č. 2:

Do páté (a tedy ani do žádné další řady) **NELZE** doskákat pomocí žádné konfigurace konečně mnoha kamenů, ležících "pod bariérou".

3. Do které řady lze doskákat?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Překvapení č. 2:

Do páté (a tedy ani do žádné další řady) **NELZE** doskákat pomocí žádné konfigurace konečně mnoha kamenů, ležících "pod bariérou".

Umíme to dokázat?

3. Do které řady lze doskákat?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Překvapení č. 2:

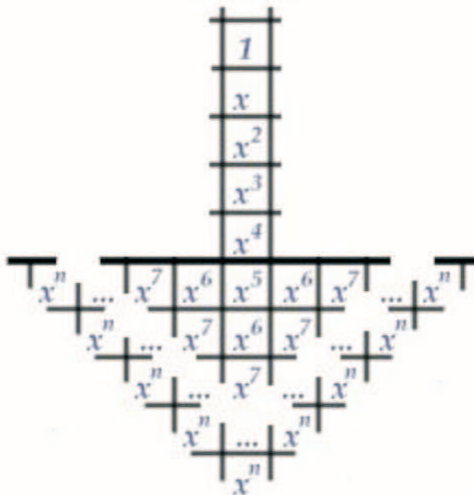
Do páté (a tedy ani do žádné další řady) **NELZE** doskákat pomocí žádné konfigurace konečně mnoha kamenů, ležících "pod bariérou".

Umíme to dokázat?

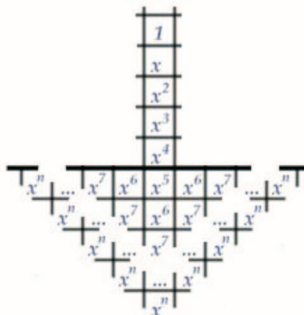
ANO. Umíme dokázat, že v tomto případě to **NELZE**.

3. Do které řady lze doskákat?

První krok Conwayova důkazu: chytré očíslování polí.



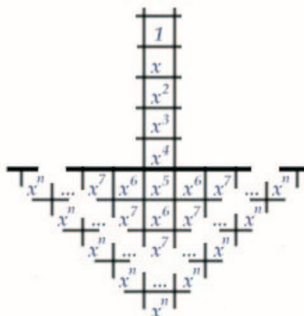
3. Do které řady lze doskákat?



Budeme volit $0 < x < 1$ a uvažovat $S \dots$ součet hodnot všech polí v dolní polovině, na kterých leží kámen:

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

3. Do které řady lze doskákat?



Budeme volit $0 < x < 1$ a uvažovat $S \dots$ součet hodnot všech polí v dolní polorovině, na kterých leží kámen:

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

(ostrá nerovnost platí pro konečně mnoho kamenů).

3. Do které řady lze doskákat?

Ukážeme:

- Existuje taková volba $x \in (0, 1)$, že $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.

3. Do které řady lze doskákat?

Ukážeme:

- Existuje taková volba $x \in (0, 1)$, že $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskoceného kamene) se hodnota S **nezvětší**, tedy **po celou dobu skákání zůstává $S < 1$.**

3. Do které řady lze doskákat?

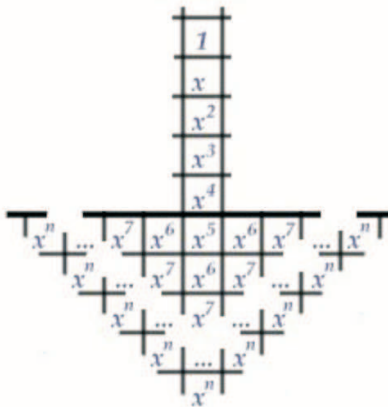
Ukážeme:

- Existuje taková volba $x \in (0, 1)$, že $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskoceného kamene) se hodnota S **nezvětší**, tedy **po celou dobu skákání zůstává $S < 1$.**

Odtud plyne:

Pokud by bylo možno doskákat do páté řady, ležel by po dosažení tohoto cíle poslední kámen na poli s hodnotou 1, tedy by v té chvíli platilo $S = 1$, což je spor.

3. Do které řady lze doskákat?



(Ani ranní ptáče nedoskáče dál, než do čtvrté řady.)

3. Do které řady lze dosáákat?

Postupujme podle vytčené strategie:

3. Do které řady lze doskákat?

Postupujme podle vytčené strategie:

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0, 1).$$

3. Do které řady lze doskákat?

Postupujme podle vytčené strategie:

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy
 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0, 1)$. Potom

3. Do které řady lze doskákat?

Postupujme podle vytčené strategie:

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0, 1)$. Potom

$$S < (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots$$

3. Do které řady lze doskákat?

Postupujme podle vytčené strategie:

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0, 1)$. Potom

$$\begin{aligned} S &< (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} + \end{aligned}$$

3. Do které řady lze doskákat?

Postupujme podle vytčené strategie:

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0, 1)$. Potom

$$\begin{aligned} S &< (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \end{aligned}$$

3. Do které řady lze doskákat?

Postupujme podle vytčené strategie:

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0, 1)$. Potom

$$\begin{aligned} S &< (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots \end{aligned}$$

3. Do které řady lze doskákat?

Postupujeme podle vytčené strategie:

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0, 1)$. Potom

$$\begin{aligned} S &< (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots \\ &= \frac{2x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots - \frac{x^5}{1-x} \end{aligned}$$

3. Do které řady lze doskákat?

Postupujme podle vytčené strategie:

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0, 1)$. Potom

$$\begin{aligned} S &< (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots \\ &= \frac{2x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots - \frac{x^5}{1-x} \\ &= \frac{2x^5}{1-x} (1 + x + x^2 + \dots) - \frac{x^5}{1-x} \end{aligned}$$

3. Do které řady lze doskákat?

Postupujeme podle vytčené strategie:

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0, 1)$. Potom

$$\begin{aligned} S &< (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots \\ &= \frac{2x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots - \frac{x^5}{1-x} \\ &= \frac{2x^5}{1-x} (1 + x + x^2 + \dots) - \frac{x^5}{1-x} \\ &= \frac{2x^5}{(1-x)^2} - \frac{x^5(1-x)}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

3. Do které řady lze doskákat?

Postupujme podle vytčené strategie:

Volíme x kladné řešení rovnice $x^2 + x = 1$, tedy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618 \in (0, 1)$. Potom

$$\begin{aligned} S &< (x^5 + x^6 + \dots) + 2(x^6 + x^7 + \dots) + 2(x^7 + x^8 + \dots) + \dots \\ &= \frac{x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots \\ &= \frac{2x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x} + \frac{2x^7}{1-x} + \dots - \frac{x^5}{1-x} \\ &= \frac{2x^5}{1-x} (1 + x + x^2 + \dots) - \frac{x^5}{1-x} \\ &= \frac{2x^5}{(1-x)^2} - \frac{x^5(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{x^6 + x^5}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

3. Do které řady lze doskákat?

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

3. Do které řady lze doskákat?

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

$$S < \frac{x^6 + x^5}{(1 - x)^2}$$

3. Do které řady lze doskákat?

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

$$S < \frac{x^6 + x^5}{(1 - x)^2} = \frac{x^6 + x^5}{x^4}$$

3. Do které řady lze doskákat?

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

$$S < \frac{x^6 + x^5}{(1 - x)^2} = \frac{x^6 + x^5}{x^4} = x^2 + x$$

3. Do které řady lze doskákat?

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

$$S < \frac{x^6 + x^5}{(1 - x)^2} = \frac{x^6 + x^5}{x^4} = x^2 + x = 1.$$

3. Do které řady lze doskákat?

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

$$S < \frac{x^6 + x^5}{(1 - x)^2} = \frac{x^6 + x^5}{x^4} = x^2 + x = 1.$$

Tím je splněn první cíl:

- Existuje taková volba $x \in (0, 1)$, že $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.

3. Do které řady lze doskákat?

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

$$S < \frac{x^6 + x^5}{(1 - x)^2} = \frac{x^6 + x^5}{x^4} = x^2 + x = 1.$$

Tím je splněn první cíl:

- Existuje taková volba $x \in (0, 1)$, že $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.
- *Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskoceného kamene) se hodnota S nezvětší, tedy vždy je $S < 1$.*

3. Do které řady lze doskákat?

Dále využijeme toho, že x splňuje jednak nerovnosti $0 < x < 1$ a jednak rovnici $x^2 + x = 1$ (tedy že je $1 - x = x^2$), a dostaneme

$$S < \frac{x^6 + x^5}{(1 - x)^2} = \frac{x^6 + x^5}{x^4} = x^2 + x = 1.$$

Zbývá přesvědčit se o tom, že platí i:

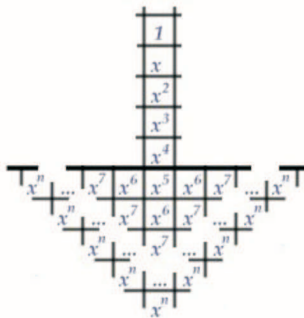
- *Existuje taková volba $x \in (0, 1)$, že $S < 1$, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.*
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskóčeného kamene) se hodnota S **nezvětší**, tedy **vždy je $S < 1$** .

3. Do které řady lze doskákat?

Změny v bodové hodnotě:

3. Do které řady lze doskákat?

Změny v bodové hodnotě:

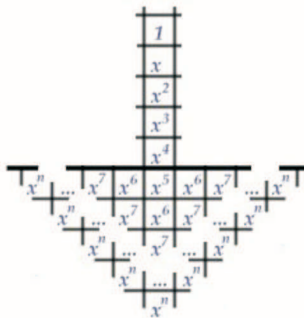


Skok nahoru nebo skok vodorovný, směrem "do středu":

■ před skokem: $x^{n+2} + x^{n+1}$

3. Do které řady lze doskákat?

Změny v bodové hodnotě:

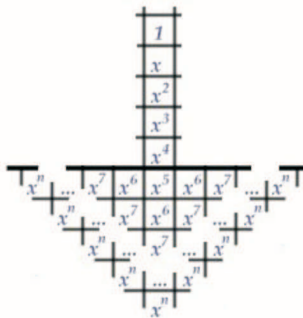


Skok nahoru nebo skok vodorovný, směrem "do středu":

■ před skokem: $x^{n+2} + x^{n+1}$ po skoku: x^n

3. Do které řady lze doskákat?

Změny v bodové hodnotě:



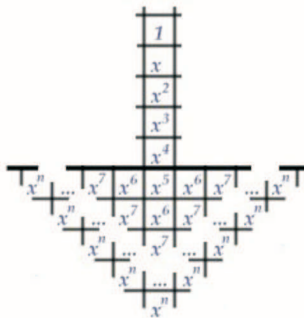
Skok nahoru nebo skok vodorovný, směrem "do středu":

- před skokem: $x^{n+2} + x^{n+1}$ po skoku: x^n
- změna: $x^n - x^{n+1} - x^{n+2}$

- změna: $x^n - x^{n+1} - x^{n+2}$

3. Do které řady lze doskákat?

Změny v bodové hodnotě:

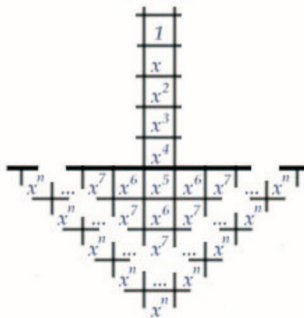


Skok nahoru nebo skok vodorovný, směrem "do středu":

- před skokem: $x^{n+2} + x^{n+1}$ po skoku: x^n
- změna: $x^n - x^{n+1} - x^{n+2} = x^n \underbrace{(1 - x - x^2)}_{=0}$

3. Do které řady lze doskákat?

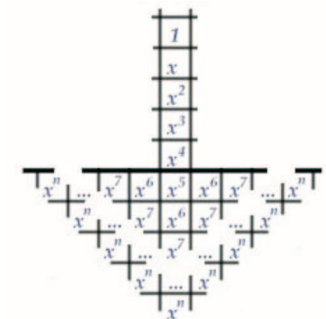
Změny v bodové hodnotě:



Skok nahoru nebo skok vodorovný, směrem "do středu":

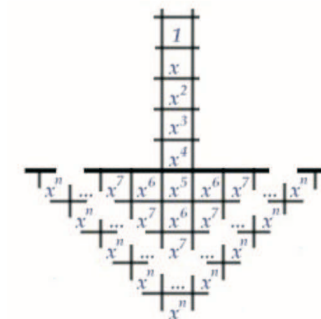
- před skokem: $x^{n+2} + x^{n+1}$ po skoku: x^n
- změna: $x^n - x^{n+1} - x^{n+2} = x^n \underbrace{(1 - x - x^2)}_{=0} = 0.$

3. Do které řady lze doskákat?



Skok vodorovný, směrem "**od** středu", nebo skok dolů:

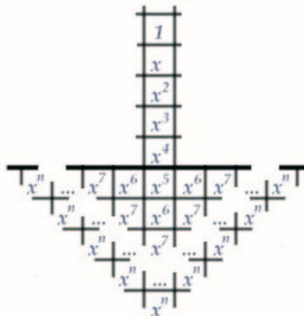
3. Do které řady lze doskákat?



Skok vodorovný, směrem "od středu", nebo skok dolů:

■ před skokem: $x^n + x^{n+1}$ po skoku: x^{n+2}

3. Do které řady lze doskákat?

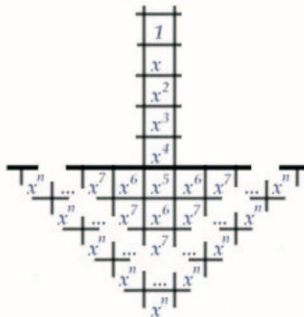


Skok vodorovný, směrem "od středu", nebo skok dolů:

- před skokem: $x^n + x^{n+1}$ po skoku: x^{n+2}
- změna:

$$x^{n+2} - x^n - x^{n+1}$$

3. Do které řady lze doskákat?



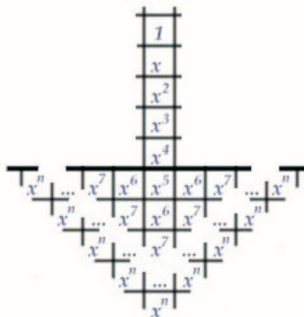
Skok vodorovný, směrem "od středu", nebo skok dolů:

■ před skokem: $x^n + x^{n+1}$ po skoku: x^{n+2}

■ změna:

$$x^{n+2} - x^n - x^{n+1} = x^n(\underbrace{x^2 - 1}_{=-x} - x)$$

3. Do které řady lze doskákat?



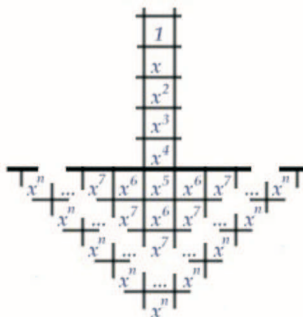
Skok vodorovný, směrem "od středu", nebo skok dolů:

■ před skokem: $x^n + x^{n+1}$ po skoku: x^{n+2}

■ změna:

$$x^{n+2} - x^n - x^{n+1} = x^n(\underbrace{x^2 - 1}_{=-x} - x) = -2x^{n+1} < 0.$$

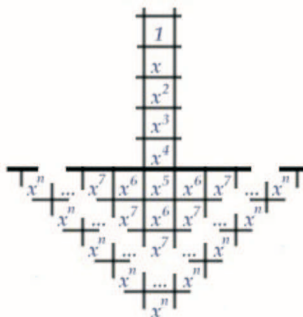
3. Do které řady lze doskákat?



Skok vodorovný, přes středový sloupec:

■ před skokem: $x^{n+1} + x^n$

3. Do které řady lze doskákat?



Skok vodorovný, přes středový sloupec:

■ před skokem: $x^{n+1} + x^n$ po skoku: x^{n+1}

3. Do které řady lze doskákat?

Tedy skutečně: Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší**

3. Do které řady lze doskákat?

Tedy skutečně: Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší** (přesvědčili jsme se, že buď zůstane stejná, nebo se zmenší),

3. Do které řady lze doskákat?

Tedy skutečně: Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší** (přesvědčili jsme se, že buď zůstane stejná, nebo se zmenší), tedy **vždy je** $S < 1$.

3. Do které řady lze doskákat?

Tedy skutečně: Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší** (přesvědčili jsme se, že buď zůstane stejná, nebo se zmenší), tedy **vždy je** $S < 1$.

Tím je důkaz toho, proč nelze doskákat do páté řady, hotov.

3. Do které řady lze doskákat?

Tedy skutečně: Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší** (přesvědčili jsme se, že buď zůstane stejná, nebo se zmenší), tedy **vždy je** $S < 1$.

Tím je důkaz toho, proč nelze doskákat do páté řady, hotov.

K rozmyšlení: podobný důkaz nemůže projít pro první až čtvrtou řadu (neboť do nich doskákat lze). V čem a kde tento důkaz selže?

3. Do které řady lze doskákat?

Poznámky

- Conwayův důkaz funguje pro libovolný konečný počet kamenů.

3. Do které řady lze dosákat?

Poznámky

- Conwayův důkaz funguje pro libovolný konečný počet kamenů. Při zaplnění celé dolní poloviny je $S = 1$ a řešení by teoreticky mohlo existovat.

3. Do které řady lze dosákat?

Poznámky

- Conwayův důkaz funguje pro libovolný konečný počet kamenů. Při zaplnění celé dolní poloviny je $S = 1$ a řešení by teoreticky mohlo existovat. Pak nutně **s nekonečným počtem skoků**.

3. Do které řady lze doskákat?

Poznámky

- Conwayův důkaz funguje pro libovolný konečný počet kamenů. Při zaplnění celé dolní poloviny je $S = 1$ a řešení by teoreticky mohlo existovat. Pak nutně **s nekonečným počtem skoků**. Tatham a Taylor popsali (netriviální) způsob, jakým oněch nekonečně mnoho skoků učinit a dostali kámen do 5. řady.

3. Do které řady lze doskákat?

Poznámky

- Conwayův důkaz funguje pro libovolný konečný počet kamenů. Při zaplnění celé dolní poloviny je $S = 1$ a řešení by teoreticky mohlo existovat. Pak nutně **s nekonečným počtem skoků**. Tatham a Taylor popsali (netriviální) způsob, jakým oněch nekonečně mnoho skoků učinit a dostali kámen do 5. řady. Viz

<http://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/solarmy/>.

3. Do které řady lze doskákat?

Poznámky

- Conwayův důkaz funguje pro libovolný konečný počet kamenů. Při zaplnění celé dolní poloviny je $S = 1$ a řešení by teoreticky mohlo existovat. Pak nutně **s nekonečným počtem skoků**. Tatham a Taylor popsali (netriviální) způsob, jakým oněch nekonečně mnoho skoků učinit a dostali kámen do 5. řady. Viz <http://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/solarmy/>.
- Pokud by byly povoleny diagonální skoky, lze doskákat do 8. řady, ale ne do 9. řady - dokažte! :)

3. Do které řady lze doskákat?

Poznámky

- Conwayův důkaz funguje pro libovolný konečný počet kamenů. Při zaplnění celé dolní poloviny je $S = 1$ a řešení by teoreticky mohlo existovat. Pak nutně **s nekonečným počtem skoků**. Tatham a Taylor popsali (netriviální) způsob, jakým oněch nekonečně mnoho skoků učinit a dostali kámen do 5. řady. Viz <http://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/solarmy/>.
- Pokud by byly povoleny diagonální skoky, lze doskákat do 8. řady, ale ne do 9. řady - dokažte! :)
- V n -dimenzionální verzi je možno dokázat pomocí Conwayovy techniky, že nelze doskákat do řady číslo $3n-1$.

3. Do které řady lze doskákat?

Poznámky

- Conwayův důkaz funguje pro libovolný konečný počet kamenů. Při zaplnění celé dolní poloviny je $S = 1$ a řešení by teoreticky mohlo existovat. Pak nutně **s nekonečným počtem skoků**. Tatham a Taylor popsali (netriviální) způsob, jakým oněch nekonečně mnoho skoků učinit a dostali kámen do 5. řady. Viz <http://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/solarmy/>.
- Pokud by byly povoleny diagonální skoky, lze doskákat do 8. řady, ale ne do 9. řady - dokažte! :)
- V n -dimenzionální verzi je možno dokázat pomocí Conwayovy techniky, že nelze doskákat do řady číslo $3n-1$. Do řady $3n-2$ vždy doskákat lze

3. Do které řady lze doskákat?

Poznámky

- Conwayův důkaz funguje pro libovolný konečný počet kamenů. Při zaplněné celé dolní polovině je $S = 1$ a řešení by teoreticky mohlo existovat. Pak nutně **s nekonečným počtem skoků**. Tatham a Taylor popsali (netriviální) způsob, jakým oněch nekonečně mnoho skoků učinit a dostali kámen do 5. řady. Viz <http://www.chiark.greenend.org.uk/~sgtatham/solarmy/>.
- Pokud by byly povoleny diagonální skoky, lze doskákat do 8. řady, ale ne do 9. řady - dokažte! :)
- V n -dimenzionální verzi je možno dokázat pomocí Conwayovy techniky, že nelze doskákat do řady číslo $3n-1$. Do řady $3n-2$ vždy doskákat lze (H. Eriksson and B. Lindstrom, Twin jumping checkers in Z_d , *Europ. J. Combinatorics*, 16 (1995), 153–157), důkaz je však těžký.

Problém 4 barev:

4. Problém 4 barev

Problém 4 barev:

F. Guthrie (1852), kartograf:

Problém 4 barev:

F. Guthrie (1852), kartograf:

Mám obarvit mapu anglických hrabství tak, aby každé hrabství mělo nějakou barvu, a přitom žádná dvě sousední hrabství neměla stejnou barvu. Kolik nejméně pastelek budu potřebovat?

Problém 4 barev:

F. Guthrie (1852), kartograf:

Mám obarvit mapu anglických hrabství tak, aby každé hrabství mělo nějakou barvu, a přitom žádná dvě sousední hrabství neměla stejnou barvu. Kolik nejméně pastelek budu potřebovat?

(Pozn.: pokud se dvě hrabství dotýkají jen jediným bodem, nejsou považována za sousední.)

Problém 4 barev:

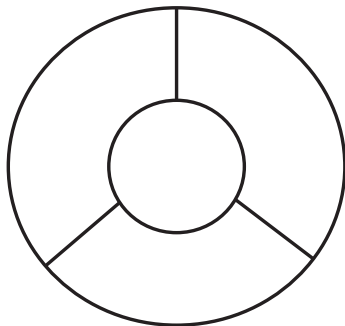
F. Guthrie (1852), kartograf:

Mám obarvit mapu anglických hrabství tak, aby každé hrabství mělo nějakou barvu, a přitom žádná dvě sousední hrabství neměla stejnou barvu. Kolik nejméně pastelek budu potřebovat?

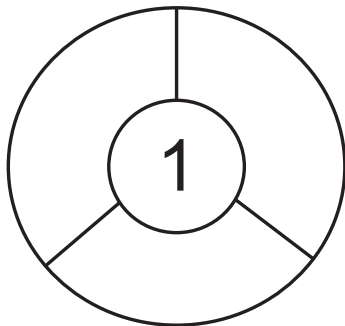
(Pozn.: pokud se dvě hrabství dotýkají jen jediným bodem, nejsou považována za sousední.)

Není těžké ukázat, že alespoň 4 jsou potřeba:

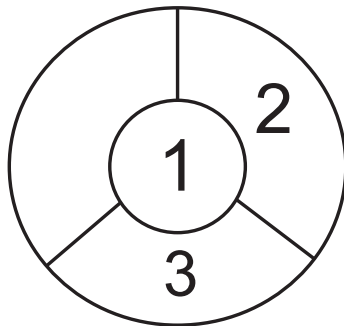
4. Problém 4 barev



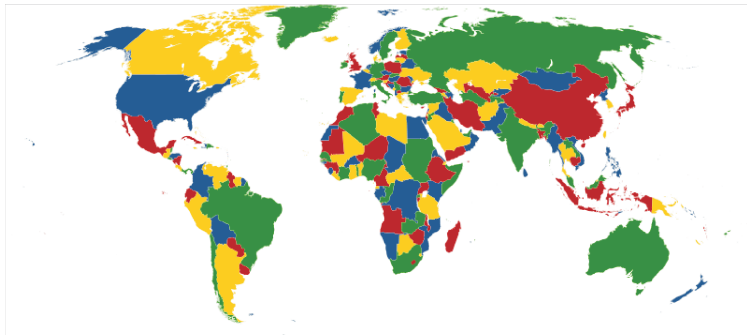
4. Problém 4 barev



4. Problém 4 barev

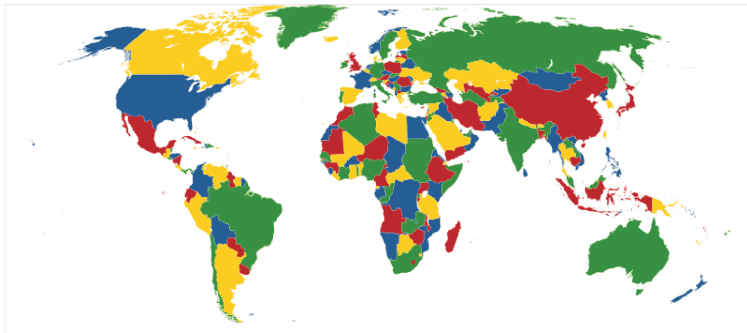


4. Problém 4 barev



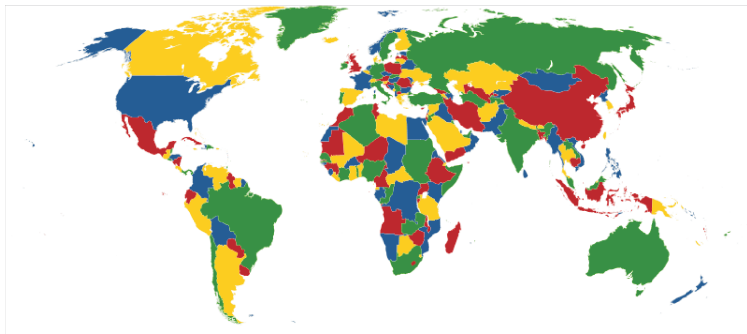
Je potřeba víc?

4. Problém 4 barev



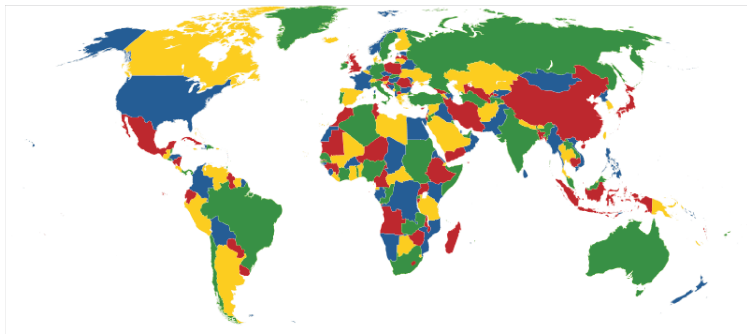
Je potřeba víc? Appel and Haken (1977): Stačí čtyři.

4. Problém 4 barev



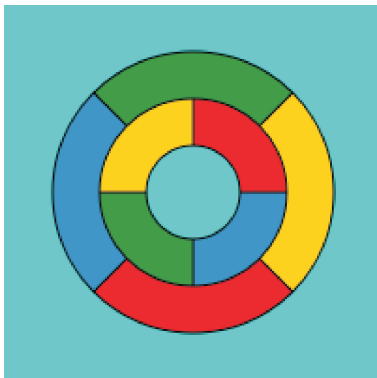
Je potřeba víc? Appel and Haken (1977): Stačí čtyři.
Robertson et al. (1996; Thomas 1998): Mají pravdu.

4. Problém 4 barev



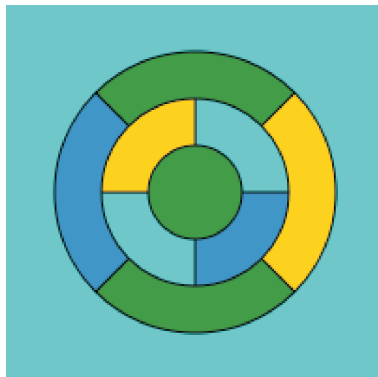
Je potřeba víc? Appel and Haken (1977): Stačí čtyři.
Robertson et al. (1996; Thomas 1998): Mají pravdu.
Důkaz se opírá o počítačem generované obarvování
velkého množství složitých "elementárních" pozic.

4. Problém 4 barev



Velmi těžký důkaz – někteří raději hledají protipříklady, ...

4. Problém 4 barev



... které jsou většinou poměrně brzo vyvráceny.

Tři starověké konstrukční úlohy:

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle*

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle (Délský problém)*

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle (Délský problém):* nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu než má daná krychle.

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle (Délský problém):* nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu než má daná krychle. Konstrukce: je-li dána úsečka délky 1, nalezněte úsečku délky $\sqrt[3]{2}$.

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle (Délský problém):* nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu než má daná krychle. Konstrukce: je-li dána úsečka délky 1, nalezněte úsečku délky $\sqrt[3]{2}$.
- *Trisekce úhlu*

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle (Délský problém):* nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu než má daná krychle. Konstrukce: je-li dána úsečka délky 1, nalezněte úsečku délky $\sqrt[3]{2}$.
- *Trisekce úhlu:* rozdělení daného úhlu na třetiny.

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle (Délský problém):* nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu než má daná krychle. Konstrukce: je-li dána úsečka délky 1, nalezněte úsečku délky $\sqrt[3]{2}$.
- *Trisekce úhlu:* rozdělení daného úhlu na třetiny.
- *Kvadratura kruhu*

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle (Délský problém):* nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu než má daná krychle. Konstrukce: je-li dána úsečka délky 1, nalezněte úsečku délky $\sqrt[3]{2}$.
- *Trisekce úhlu:* rozdělení daného úhlu na třetiny.
- *Kvadratura kruhu:* nalezení strany čtverce, jehož obsah je roven obsahu daného kruhu.

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle (Délský problém):* nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu než má daná krychle. Konstrukce: je-li dána úsečka délky 1, nalezněte úsečku délky $\sqrt[3]{2}$.
- *Trisekce úhlu:* rozdělení daného úhlu na třetiny.
- *Kvadratura kruhu:* nalezení strany čtverce, jehož obsah je roven obsahu daného kruhu. Konstrukce: je-li dána úsečka délky 1, nalezněte úsečku délky $\sqrt{\pi}$.

Konstrukce kružítkem a pravítkem:

Konstrukce kružítkem a pravítkem:

- Pravítko slouží pouze k narýsování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.

Konstrukce kružítkem a pravítkem:

- Pravítko slouží pouze k narýsování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.

Pravítko nesmí mít na sobě žádné značky, "jednotky délky", měřítko, atd. Není ani dovoleno žádné značky na pravítku v průběhu konstrukce vytvářet.

Konstrukce kružítkem a pravítkem:

- Pravítko slouží pouze k narýsování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.
Pravítko nesmí mít na sobě žádné značky, "jednotky délky", měřítko, atd. Není ani dovoleno žádné značky na pravítku v průběhu konstrukce vytvářet.
- Kružítko slouží pouze k opsání oblouku kružnice o středu, ležícím ve zkonstruovaném bodě, a o poloměru, který odpovídá vzdálenosti dvou nějakých již zkonstruovaných bodů.

Konstrukce kružítkem a pravítkem:

- Pravítko slouží pouze k narýsování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.
Pravítko nesmí mít na sobě žádné značky, "jednotky délky", měřítko, atd. Není ani dovoleno žádné značky na pravítku v průběhu konstrukce vytvářet.
- Kružítko slouží pouze k opsání oblouku kružnice o středu, ležícím ve zkonstruovaném bodě, a o poloměru, který odpovídá vzdálenosti dvou nějakých již zkonstruovaných bodů.
- Konstrukce musí sestávat pouze z *konečného počtu kroků*.

Konstrukce kružítkem a pravítkem:

- Pravítko slouží pouze k narysování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.
Pravítko nesmí mít na sobě žádné značky, "jednotky délky", měřítko, atd. Není ani dovoleno žádné značky na pravítku v průběhu konstrukce vytvářet.
- Kružítko slouží pouze k opsání oblouku kružnice o středu, ležícím ve zkonstruovaném bodě, a o poloměru, který odpovídá vzdálenosti dvou nějakých již zkonstruovaných bodů.
- Konstrukce musí sestávat pouze z *konečného počtu kroků*.
- Konstrukce musí být *přesná*. Přibližná řešení nejsou považována za řešení úlohy.

Konstrukce kružítkem a pravítkem:

- Pravítko slouží pouze k narysování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.
Pravítko nesmí mít na sobě žádné značky, "jednotky délky", měřítko, atd. Není ani dovoleno žádné značky na pravítku v průběhu konstrukce vytvářet.
- Kružítko slouží pouze k opsání oblouku kružnice o středu, ležícím ve zkonstruovaném bodě, a o poloměru, který odpovídá vzdálenosti dvou nějakých již zkonstruovaných bodů.
- Konstrukce musí sestávat pouze z *konečného počtu kroků*.
- Konstrukce musí být *přesná*. Přibližná řešení nejsou považována za řešení úlohy.
- Nedílnou součástí řešení je *důkaz*.

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Překvapivé završení snah o uvedené tři konstrukce:
žádnou z nich nelze provést

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Překvapivé završení snah o uvedené tři konstrukce:
žádnou z nich nelze provést
(při splnění všech uvedených konstrukčních pravidel).

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Překvapivé završení snah o uvedené tři konstrukce:
žádnou z nich nelze provést
(při splnění všech uvedených konstrukčních pravidel).

Základní idea důkazu: algebraický popis množiny čísel, které lze zkonstruovat (jako vzdálenosti bodů v rovině) z délky 1 pomocí konstrukčních pravidel

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Překvapivé završení snah o uvedené tři konstrukce:
žádnou z nich nelze provést
(při splnění všech uvedených konstrukčních pravidel).

Základní idea důkazu: algebraický popis množiny čísel, které lze zkonstruovat (jako vzdálenosti bodů v rovině) z délky 1 pomocí konstrukčních pravidel (jaké body získáme jako průsečíky přímk a kružnic?

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Překvapivé završení snah o uvedené tři konstrukce:
žádnou z nich nelze provést
(při splnění všech uvedených konstrukčních pravidel).

Základní idea důkazu: algebraický popis množiny čísel, které lze zkonstruovat (jako vzdálenosti bodů v rovině) z délky 1 pomocí konstrukčních pravidel (jaké body získáme jako průsečíky přímk a kružnic? jde o řešení soustav lineárních a kvadratických rovnic...

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Překvapivé završení snah o uvedené tři konstrukce:
žádnou z nich nelze provést
(při splnění všech uvedených konstrukčních pravidel).

Základní idea důkazu: algebraický popis množiny čísel, které lze zkonstruovat (jako vzdálenosti bodů v rovině) z délky 1 pomocí konstrukčních pravidel (jaké body získáme jako průsečíky přímek a kružnic? jde o řešení soustav lineárních a kvadratických rovnic... .. pouze konečné kombinace "něčeho jako sudé odmocniny").

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Překvapivé završení snah o uvedené tři konstrukce:
žádnou z nich nelze provést
(při splnění všech uvedených konstrukčních pravidel).

Základní idea důkazu: algebraický popis množiny čísel, které lze zkonstruovat (jako vzdálenosti bodů v rovině) z délky 1 pomocí konstrukčních pravidel (jaké body získáme jako průsečíky přímek a kružnic? jde o řešení soustav lineárních a kvadratických rovnic... .. pouze konečné kombinace "nečeho jako sudé odmocniny"). Poté se ukáže, že požadované délky (např. $\sqrt[3]{2}$) neleží v této množině.

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Jaká nejjednodušší modifikace konstrukčních pravidel umožní alespoň některou z uvedených konstrukcí provést?

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Konstrukce kružítkem a pravítkem (připomenutí):

Konstrukce kružítkem a pravítkem (připomenutí):

- Pravítko slouží pouze k narýsování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.
Pravítko nesmí mít na sobě žádné značky, "jednotky délky", měřítko, atd. Není ani dovoleno žádné značky na pravítku v průběhu konstrukce vytvářet.
- Kružítko slouží pouze k opsání oblouku kružnice o středu, ležícím ve zkonstruovaném bodě, a o poloměru, který odpovídá vzdálenosti dvou nějakých již zkonstruovaných bodů.
- Konstrukce musí sestávat pouze z *konečného počtu kroků*.
- Konstrukce musí být *přesná*. Přibližná řešení nejsou považována za řešení úlohy.
- Nedílnou součástí řešení je *důkaz*.

Konstrukce kružítkem a pravítkem (připomenutí):

- Pravítko slouží pouze k narysování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.
Pravítko nesmí mít na sobě žádné značky, "jednotky délky", měřítko, atd. **Není ani dovoleno žádné značky na pravítku v průběhu konstrukce vytvářet.**
- Kružítko slouží pouze k opsání oblouku kružnice o středu, ležícím ve zkonstruovaném bodě, a o poloměru, který odpovídá vzdálenosti dvou nějakých již zkonstruovaných bodů.
- Konstrukce musí sestávat pouze z *konečného počtu kroků*.
- Konstrukce musí být *přesná*. Přibližná řešení nejsou považována za řešení úlohy.
- Nedílnou součástí řešení je *důkaz*.

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Platí:

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Platí:

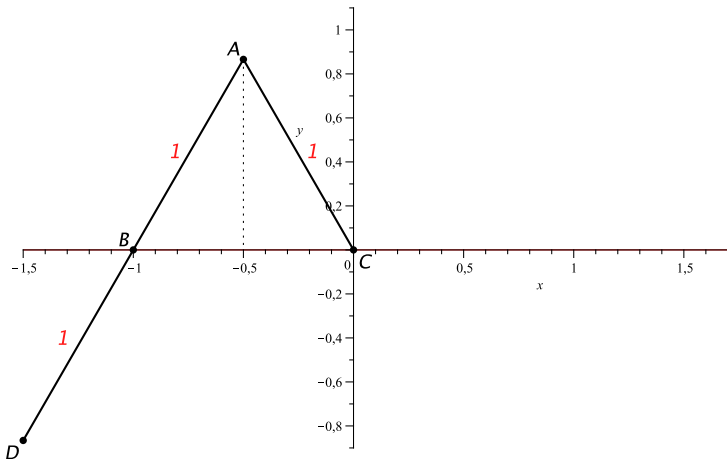
Je-li dovoleno učinit na pravítku v průběhu konstrukce značky, lze provést zdvojení krychle a trisekci úhlu při zachování všech ostatních konstrukčních pravidel.

Platí:

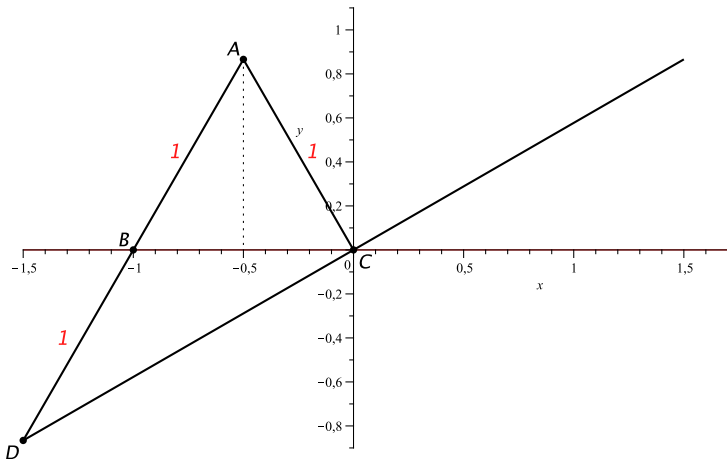
Je-li dovoleno učinit na pravítku v průběhu konstrukce značky, lze provést zdvojení krychle a trisekci úhlu při zachování všech ostatních konstrukčních pravidel. Konstrukce je přesná (což lze dokázat) a sestává z konečného počtu kroků.

6. Duplikace krychle pomocí kružítko a označeného pravítka

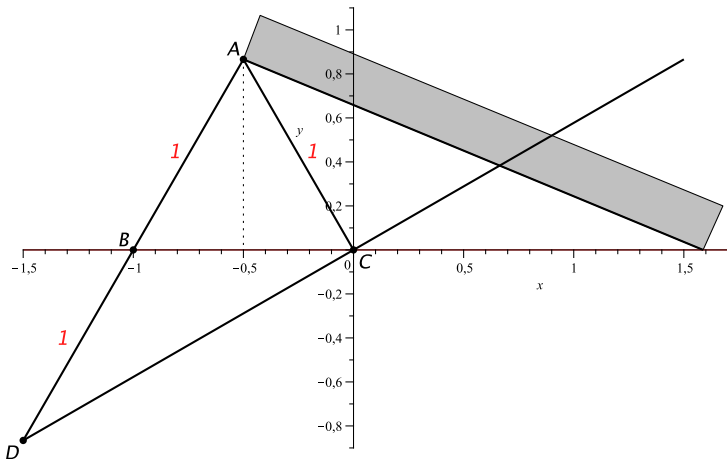
6. Duplikace krychle pomocí kružítká a označeného pravítka



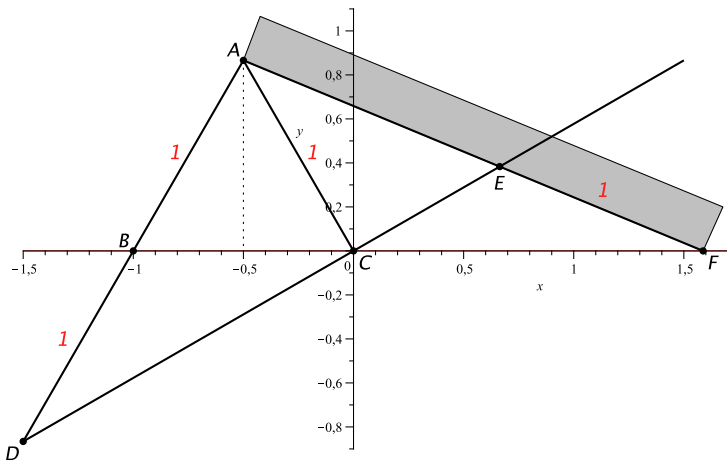
6. Duplikace krychle pomocí kružítka a označeného pravítka



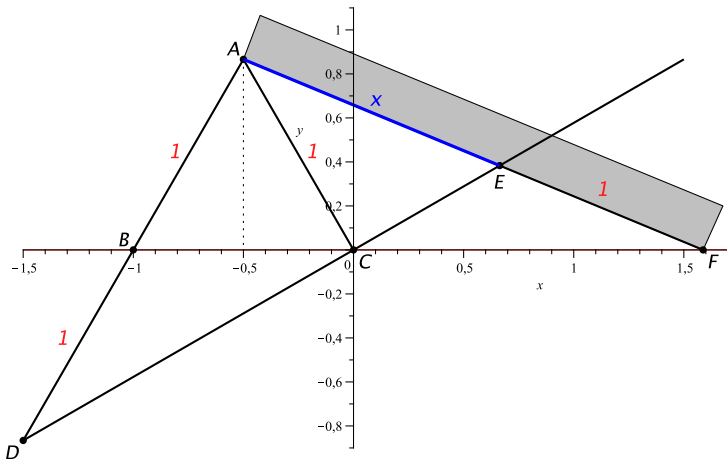
6. Duplikace krychle pomocí kružítká a označeného pravítka



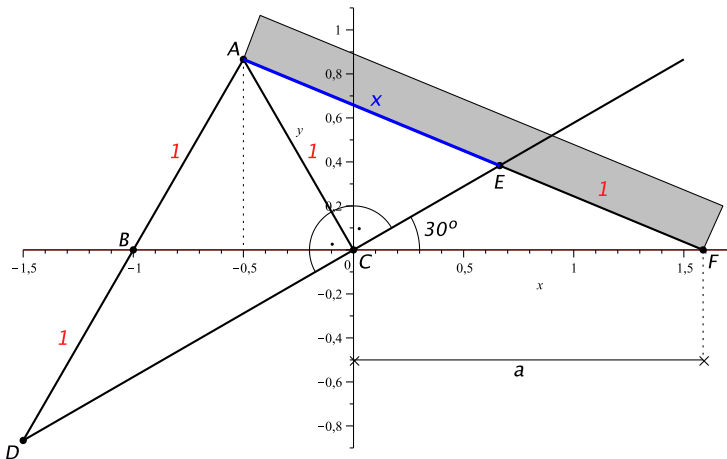
6. Duplikace krychle pomocí kružítká a označeného pravítka



6. Duplikace krychle pomocí kružítká a označeného pravítka

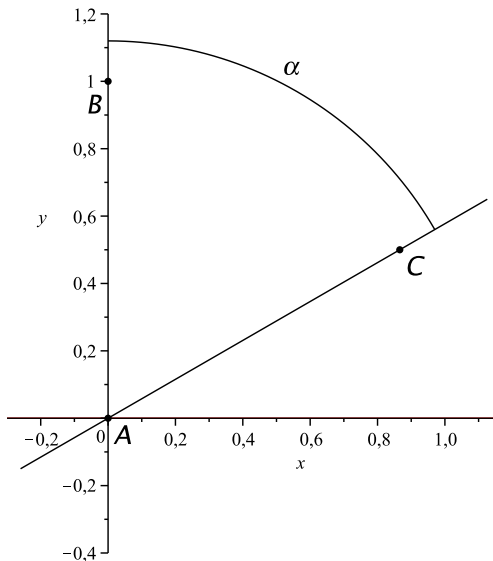


6. Duplikace krychle pomocí kružítka a označeného pravítka

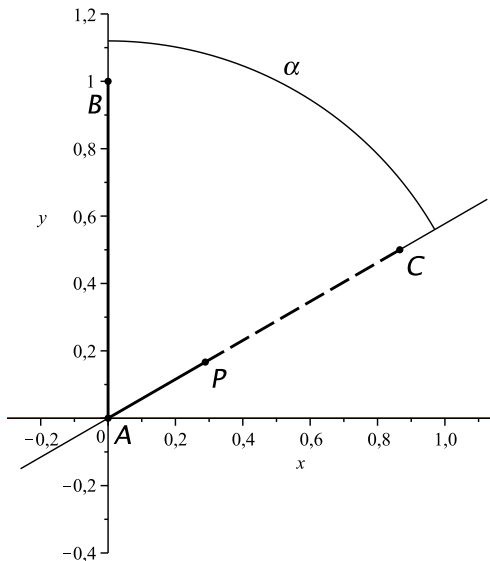


7. Trisekce úhlu pomocí kružítká a označeného pravítka

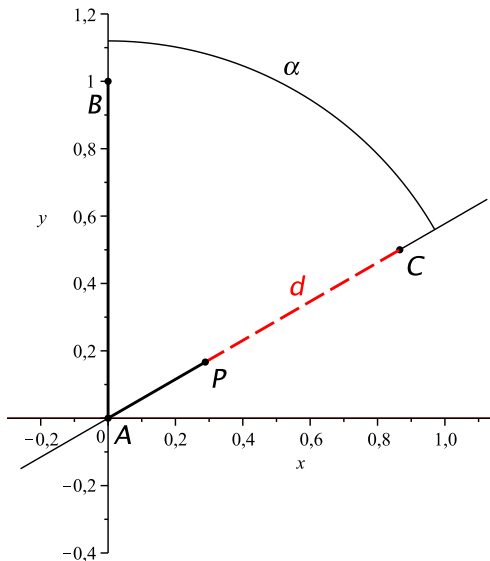
7. Trisekce úhlu pomocí kružítka a označeného pravítka



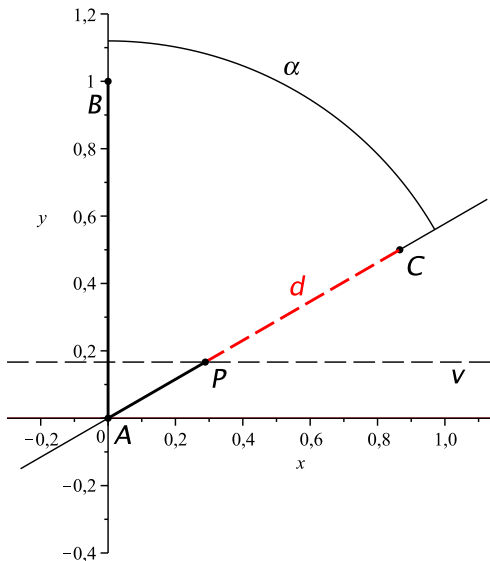
7. Trisekce úhlu pomocí kružítka a označeného pravítka



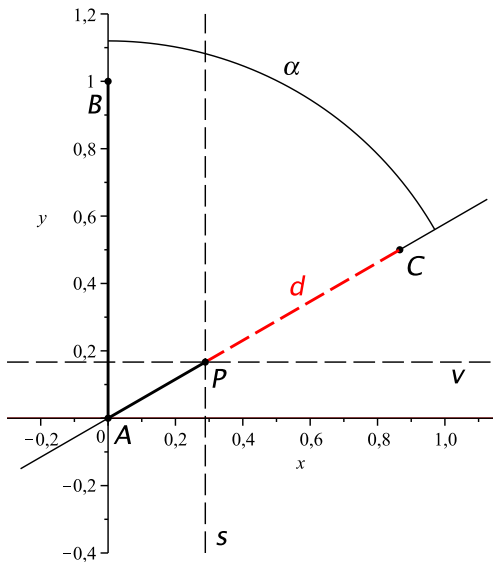
7. Trisekce úhlu pomocí kružítka a označeného pravítka



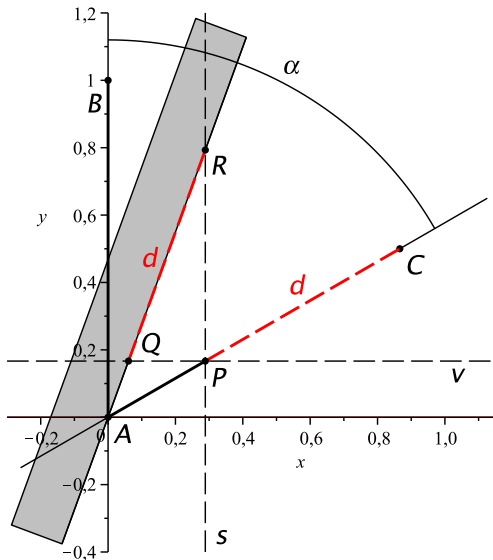
7. Trisekce úhlu pomocí kružítka a označeného pravítka



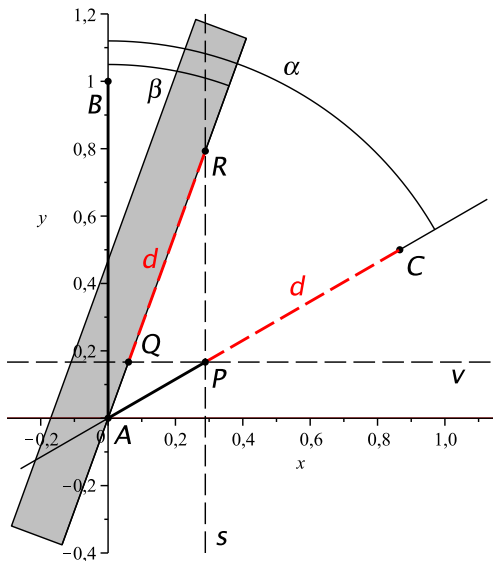
7. Trisekce úhlu pomocí kružítká a označeného pravítka



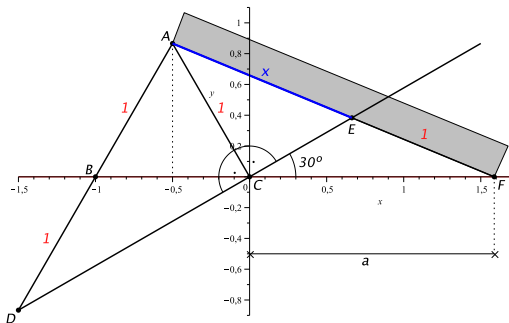
7. Trisekce úhlu pomocí kružítka a označeného pravítka



7. Trisekce úhlu pomocí kružítká a označeného pravítka

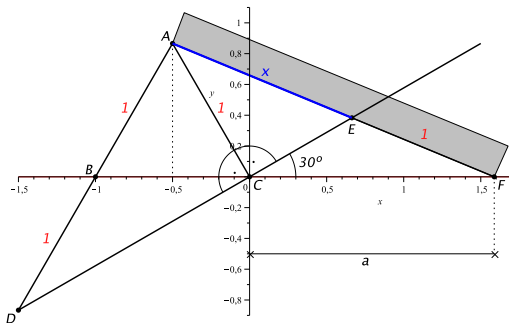


8. Důkazy pro zdatné trisektory



Jaká je vzdálenost $x = |AE|$, za podmínky, že $|EF| = 1$?

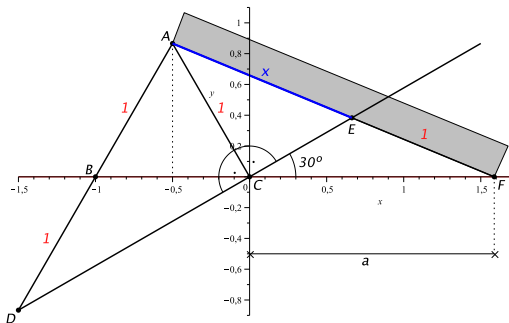
8. Důkazy pro zdatné trisektory



Jaká je vzdálenost $x = |AE|$, za podmínky, že $|EF| = 1$?

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$

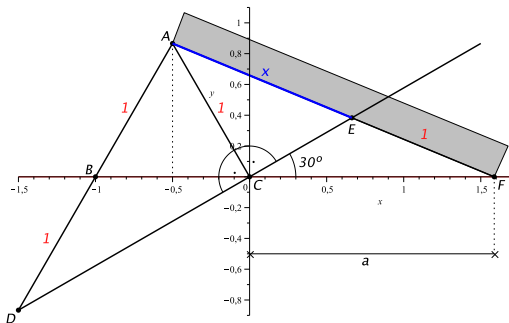
8. Důkazy pro zdatné trisektory



Jaká je vzdálenost $x = |AE|$, za podmínky, že $|EF| = 1$?

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, F = [a, 0],$$

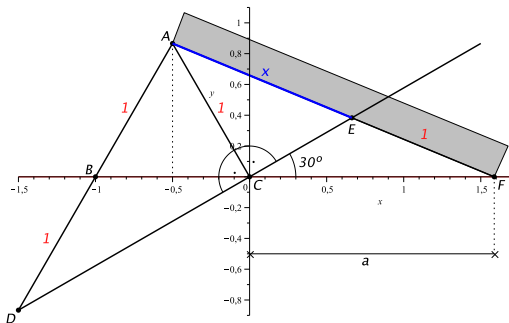
8. Důkazy pro zdatné trisektory



Jaká je vzdálenost $x = |AE|$, za podmínky, že $|EF| = 1$?

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], F = [a, 0], D = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right],$$

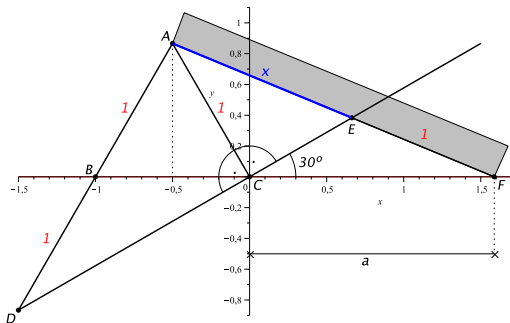
8. Důkazy pro zdatné trisektory



Jaká je vzdálenost $x = |AE|$, za podmínky, že $|EF| = 1$?

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], F = [a, 0], D = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right], C = [0, 0]$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory



Jaká je vzdálenost $x = |AE|$, za podmínky, že $|EF| = 1$?

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, F = [a, 0], D = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, C = [0, 0]$$

$$\dots \implies E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} \right]$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right], E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} \right]$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right], E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} \right]$$

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \dots$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right], E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} \right]$$

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$$

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

$$E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right], F = [a, 0]$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$$

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

$$E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right], F = [a, 0]$$

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$$

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

$$E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right], F = [a, 0]$$

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$$

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

$$E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right], F = [a, 0]$$

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$$

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

$$E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right], F = [a, 0]$$

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2$$

Pak ovšem $|AE|^2 = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2} =$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$$

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

$$E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right], F = [a, 0]$$

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2$$

Pak ovšem $|AE|^2 = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2} = \frac{4}{a^2}$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$$

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

$$E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right], F = [a, 0]$$

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$$

$$\boxed{a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2}$$

Pak ovšem $|AE|^2 = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2} = \frac{4}{a^2} \implies |AE| = \frac{2}{a}.$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$$

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

$$E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right], F = [a, 0]$$

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2$$

Pak ovšem $|AE|^2 = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2} = \frac{4}{a^2} \implies |AE| = \frac{2}{a}.$

Tedy $x = \frac{2}{a}$, kde $a > 0$ splňuje: $a^2(a^2+a+1) = (a+2)^2.$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$x = \frac{2}{a}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$\begin{aligned} a^2(a^2 + a + 1) &= (a + 2)^2 & / : a^2 > 0 \\ a^2 + a + 1 &= \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} \end{aligned}$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a)$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a) \quad / : (a^2 + a) > 0$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a) \quad / : (a^2 + a) > 0$$

$$1 = \frac{4}{a^3}$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a) \quad / : (a^2 + a) > 0$$

$$1 = \frac{4}{a^3}$$

$$\implies a = \sqrt[3]{4}$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a) \quad / : (a^2 + a) > 0$$

$$1 = \frac{4}{a^3}$$

$$\implies a = \sqrt[3]{4} \implies x = \frac{2}{a}$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a) \quad / : (a^2 + a) > 0$$

$$1 = \frac{4}{a^3}$$

$$\implies a = \sqrt[3]{4} \implies x = \frac{2}{a} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a) \quad / : (a^2 + a) > 0$$

$$1 = \frac{4}{a^3}$$

$$\implies a = \sqrt[3]{4} \implies x = \frac{2}{a} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{8}{4}}$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

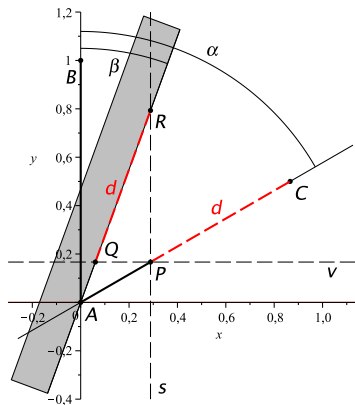
$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a) \quad / : (a^2 + a) > 0$$

$$1 = \frac{4}{a^3}$$

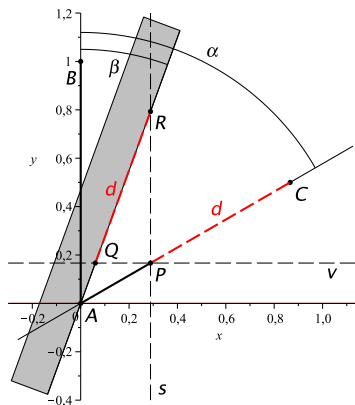
$$\implies a = \sqrt[3]{4} \implies x = \frac{2}{a} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{8}{4}} = \sqrt[3]{2}.$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory



Nikoli důkaz, ale návod: vyjdeme z pozorování
 $|AR| - |AQ| = d,$

8. Důkazy pro zdatné trisektory



Nikoli důkaz, ale návod: vyjdeme z pozorování
 $|AR| - |AQ| = d$, které lze po jisté námaze upravit na

$$\frac{d \sin \alpha}{2 \sin \beta} - \frac{d \cos \alpha}{2 \cos \beta} = d.$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

Ze vztahu

$$\frac{d \sin \alpha}{2 \sin \beta} - \frac{d \cos \alpha}{2 \cos \beta} = d$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

Ze vztahu

$$\frac{d \sin \alpha}{2 \sin \beta} - \frac{d \cos \alpha}{2 \cos \beta} = d$$

plyne

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = 2 \sin \beta \cos \beta ,$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

Ze vztahu

$$\frac{d \sin \alpha}{2 \sin \beta} - \frac{d \cos \alpha}{2 \cos \beta} = d$$

plyne

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = 2 \sin \beta \cos \beta ,$$

neboli

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin 2\beta .$$

8. Důkazy pro zdatné trisektory

Ze vztahu

$$\frac{d \sin \alpha}{2 \sin \beta} - \frac{d \cos \alpha}{2 \cos \beta} = d$$

plyne

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = 2 \sin \beta \cos \beta ,$$

neboli

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin 2\beta .$$

Pro $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ má tato rovnice jediné řešení,

8. Důkazy pro zdatné trisektory

Ze vztahu

$$\frac{d \sin \alpha}{2 \sin \beta} - \frac{d \cos \alpha}{2 \cos \beta} = d$$

plyne

$$\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = 2 \sin \beta \cos \beta ,$$

neboli

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin 2\beta .$$

Pro $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ má tato rovnice jediné řešení, a sice $\alpha = 3\beta$, což jsme chtěli ukázat.

Poznámky:

Poznámky:

- Kvadraturu kruhu nelze provést ani s takto modifikovanými pravidly.

Poznámky:

- Kvadraturu kruhu nelze provést ani s takto modifikovanými pravidly. (*Pravděpodobný důvod: π je transcendentní.*)

Poznámky:

- Kvadraturu kruhu nelze provést ani s takto modifikovanými pravidly. (*Pravděpodobný důvod: π je transcendentní.*)
- Otevřený problém: charakterizace toho, co lze zkonstruovat kružítkem a označeným pravítkem.
- Může být překvapivé: dodnes se neví, které všechny pravidelné n -úhelníky je možno zkonstruovat kružítkem a pravítkem, i když je známá jejich úplná charakterizace.

Poznámky:

- Kvadraturu kruhu nelze provést ani s takto modifikovanými pravidly. (*Pravděpodobný důvod: π je transcendentní.*)
- Otevřený problém: charakterizace toho, co lze zkonstruovat kružítkem a označeným pravítkem.
- Může být překvapivé: dodnes se neví, které všechny pravidelné n -úhelníky je možno zkonstruovat kružítkem a pravítkem, i když je známá jejich úplná charakterizace. Jak je to možné?

9. Co na to Fermat?

Tvrzení (C.F.Gauss (1796))

Pravidelný n -úhelník ($n \geq 3$) lze zkonstruovat kružítkem a pravítkem, pokud je číslo n buď tvaru $n = 2^k$, $k = 2, 3, 4, \dots$ nebo tvaru $n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_m$, kde $k \in \mathbb{N}$ a kde p_j jsou navzájem různá tzv. Fermatova prvočísla.

9. Co na to Fermat?

Tvrzení (C.F.Gauss (1796))

Pravidelný n -úhelník ($n \geq 3$) lze zkonstruovat kružítkem a pravítkem, pokud je číslo n buď tvaru $n = 2^k$, $k = 2, 3, 4, \dots$ nebo tvaru $n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_m$, kde $k \in \mathbb{N}$ a kde p_j jsou navzájem různá tzv. Fermatova prvočísla.

Tvrzení (Pierre Wantzel (1837))

*V jiných případech pravidelný n -úhelník ($n \geq 3$) **nelze** zkonstruovat pouze kružítkem a pravítkem.*

9. Co na to Fermat?

Tvrzení (C.F.Gauss (1796))

Pravidelný n -úhelník ($n \geq 3$) lze zkonstruovat kružítkem a pravítkem, pokud je číslo n buď tvaru $n = 2^k$, $k = 2, 3, 4, \dots$ nebo tvaru $n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_m$, kde $k \in \mathbb{N}$ a kde p_j jsou navzájem různá tzv. Fermatova prvočísla.

Tvrzení (Pierre Wantzel (1837))

*V jiných případech pravidelný n -úhelník ($n \geq 3$) **nelze** zkonstruovat pouze kružítkem a pravítkem.*

Úplnou charakterizaci tedy máme, je zde však problém: neznáme všechna Fermatova prvočísla.

9. Co na to Fermat?

- 1 P. Fermat: domnívám se, že všechna čísla tvaru

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

jsou prvočísla.

9. Co na to Fermat?

- 1 P. Fermat: domnívám se, že všechna čísla tvaru

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

jsou prvočísla. Sledujte:

9. Co na to Fermat?

- 1 P. Fermat: domnívám se, že všechna čísla tvaru

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

jsou prvočísla. Sledujte: $F_0 = 3$,

9. Co na to Fermat?

- 1 P. Fermat: domnívám se, že všechna čísla tvaru

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

jsou prvočísla. Sledujte: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$,

9. Co na to Fermat?

- 1 P. Fermat: domnívám se, že všechna čísla tvaru

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

jsou prvočísla. Sledujte: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$,

9. Co na to Fermat?

- 1 P. Fermat: domnívám se, že všechna čísla tvaru

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

jsou prvočísla. Sledujte: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$,
 $F_3 = 257$,

9. Co na to Fermat?

- 1 P. Fermat: domnívám se, že všechna čísla tvaru

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

jsou prvočísla. Sledujte: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$,
 $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$, ...

9. Co na to Fermat?

- ❶ P. Fermat: domnívám se, že všechna čísla tvaru

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

jsou prvočísla. Sledujte: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$,
 $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$, ...

- ❷ L. Euler: omyl, drahý Pierre,
 $F_5 = 4\,294\,967\,297$

9. Co na to Fermat?

- ❶ P. Fermat: domnívám se, že všechna čísla tvaru

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

jsou prvočísla. Sledujte: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$,
 $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$, ...

- ❷ L. Euler: omyl, drahý Pierre,

$$F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

9. Co na to Fermat?

- ❶ P. Fermat: domnívám se, že všechna čísla tvaru

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

jsou prvočísla. Sledujte: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$,
 $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$, ...

- ❷ L. Euler: omyl, drahý Pierre,

$$F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

- ❸ Překvapení: k dnešnímu dni jsou naopak F_0 , F_1 , F_2 ,
 F_3 , F_4 jediná známá prvočísla mezi čísly tvaru (1).

9. Co na to Fermat?

- ❶ P. Fermat: domnívám se, že všechna čísla tvaru

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

jsou prvočísla. Sledujte: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$,
 $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$, ...

- ❷ L. Euler: omyl, drahý Pierre,

$$F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

- ❸ Překvapení: k dnešnímu dni jsou naopak F_0 , F_1 , F_2 ,
 F_3 , F_4 jediná známá prvočísla mezi čísly tvaru (1).
Víme, že $F_5, \dots, F_{32}$ jsou složená.

9. Co na to Fermat?

- ❶ P. Fermat: domnívám se, že všechna čísla tvaru

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

jsou prvočísla. Sledujte: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$,
 $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$, ...

- ❷ L. Euler: omyl, drahý Pierre,

$$F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

- ❸ Překvapení: k dnešnímu dni jsou naopak F_0 , F_1 , F_2 ,
 F_3 , F_4 jediná známá prvočísla mezi čísly tvaru (1).
Víme, že $F_5, \dots, F_{32}$ jsou složená. Ale ani současná
výpočetní technika není schopna ověřit, jestli je číslo
 F_{33} složené nebo ne.

9. Co na to Fermat?

- ❶ P. Fermat: domnívám se, že všechna čísla tvaru

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

jsou prvočísla. Sledujte: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$,
 $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$, ...

- ❷ L. Euler: omyl, drahý Pierre,

$$F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

- ❸ Překvapení: k dnešnímu dni jsou naopak F_0 , F_1 , F_2 ,
 F_3 , F_4 jediná známá prvočísla mezi čísly tvaru (1).
Víme, že $F_5, \dots, F_{32}$ jsou složená. Ale ani současná
výpočetní technika není schopna ověřit, jestli je číslo
 F_{33} složené nebo ne. (Toto číslo má přes dvě a půl
miliardy cifer!)

9. Co na to Fermat?

Co tedy lze a co nelze zkonstruovat?

9. Co na to Fermat?

Co tedy lze a co nelze zkonstruovat?

Pro $3 \leq n \leq 100$ lze zkonstruovat kružítkem a pravítkem právě těchto 24 n -úhelníků:

9. Co na to Fermat?

Co tedy lze a co nelze zkonstruovat?

Pro $3 \leq n \leq 100$ lze zkonstruovat kružítkem a pravítkem právě těchto 24 n -úhelníků:

$n =$ 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32,
 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96 .

9. Co na to Fermat?

Co tedy lze a co nelze zkonstruovat?

Pro $3 \leq n \leq 100$ lze zkonstruovat kružítkem a pravítkem právě těchto 24 n -úhelníků:

$$n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, \\ 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96.$$

První n -úhelník, o kterém nevíme, zda lze zkonstruovat pouze kružítkem a pravítkem je pro $n = F_{33}$.

9. Co na to Fermat?

Co tedy lze a co nelze zkonstruovat?

Pro $3 \leq n \leq 100$ lze zkonstruovat kružítkem a pravítkem právě těchto 24 n -úhelníků:

$$n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, \\ 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96.$$

První n -úhelník, o kterém nevíme, zda lze zkonstruovat pouze kružítkem a pravítkem je pro $n = F_{33}$. Ten má ovšem přes dvě a půl miliardy stran, takže jeho velmi dobrou aproximaci lze zkonstruovat pouze kružítkem. :-)

Problém (za 1000 liber).

10. Collatzova posloupnost

Problém (za 1000 liber). NEVÍ SE, jestli jej lze nebo nelze vyřešit.

10. Collatzova posloupnost

Problém (za 1000 liber). NEVÍ SE, jestli jej lze nebo nelze vyřešit.

Collatzův problém (Lothar Collatz (1910-1990)),

Problém (za 1000 liber). NEVÍ SE, jestli jej lze nebo nelze vyřešit.

Collatzův problém (Lothar Collatz (1910-1990)),
Kakutaniho problém, Ulamův problém, $3n+1$ problém

10. Collatzova posloupnost

Problém (za 1000 liber). NEVÍ SE, jestli jej lze nebo nelze vyřešit.

Collatzův problém (Lothar Collatz (1910-1990)),
Kakutaniho problém, Ulamův problém, $3n+1$ problém

"Mathematics may not yet be ready for such problems."
(Paul Erdős)

10. Collatzova posloupnost

Problém (za 1000 liber). NEVÍ SE, jestli jej lze nebo nelze vyřešit.

Collatzův problém (Lothar Collatz (1910-1990)),
Kakutaniho problém, Ulamův problém, $3n+1$ problém

"Mathematics may not yet be ready for such problems."
(Paul Erdős)

$$a_0 \in \mathbb{N}$$

10. Collatzova posloupnost

Problém (za 1000 liber). NEVÍ SE, jestli jej lze nebo nelze vyřešit.

Collatzův problém (Lothar Collatz (1910-1990)),
Kakutaniho problém, Ulamův problém, $3n+1$ problém

"Mathematics may not yet be ready for such problems."
(Paul Erdős)

$$a_0 \in \mathbb{N}$$
$$a_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{je-li } a_n \text{ sudé} \end{cases}$$

10. Collatzova posloupnost

Problém (za 1000 liber). NEVÍ SE, jestli jej lze nebo nelze vyřešit.

Collatzův problém (Lothar Collatz (1910-1990)),
Kakutaniho problém, Ulamův problém, $3n+1$ problém

"Mathematics may not yet be ready for such problems."
(Paul Erdős)

$$a_0 \in \mathbb{N}$$
$$a_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{je-li } a_n \text{ sudé} \\ 3a_n + 1 & \text{je-li } a_n \text{ liché} \end{cases}$$

10. Collatzova posloupnost

1 :

10. Collatzova posloupnost

1 : 4,

10. Collatzova posloupnost

1 : 4,2

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, 1

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, 1 (4,

10. Collatzova posloupnost

$$1 : 4, 2, 1 \quad (\underline{4, 2, 1} \dots)$$

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, **1** ...)

2 :

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, 1 ...)

2 : **1**

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, 1 ...)

2 : **1**

3 :

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, 1 ...)

2 : **1**

3 : 10,

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, 1 ...)

2 : **1**

3 : 10, 5,

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, 1 ...)

2 : **1**

3 : 10, 5, 16,

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, 1 ...)

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8,

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, 1 ...)

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8, 4,

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, 1 ...)

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2,

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, 1 ...)

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, 1 ...)

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

...

5 :

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, 1 ...)

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

...

5 : 16,

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, 1 ...)

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

...

5 : 16, 8, 4, 2, 1

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, 1 ...)
2 : **1**
3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
...
5 : 16, 8, 4, 2, 1
...
51 :

10. Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1** (4, 2, 1 ...)
2 : **1**
3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
...
5 : 16, 8, 4, 2, 1
...
51 : 154, 77, 232, 116, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52,
26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

10. Collatzova posloupnost

$$\begin{aligned} 1 &: 4, 2, \underline{1} \quad (\underline{4, 2, 1} \dots) \\ 2 &: \underline{1} \\ 3 &: 10, 5, 16, 8, \underline{4, 2, 1} \\ &\dots \\ 5 &: 16, 8, \underline{4, 2, 1} \\ &\dots \\ 51 &: 154, 77, 232, 116, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, \\ &\quad 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, \underline{4, 2, 1} \end{aligned}$$

Otázka: Dorazíme pro všechna $n \in \mathbb{N}$ vždy k číslu 1?

10. Collatzova posloupnost

$$\begin{aligned} 1 & : 4, 2, \underline{1} \quad (\underline{4, 2, 1} \dots) \\ 2 & : \underline{1} \\ 3 & : 10, 5, 16, 8, \underline{4, 2, 1} \\ & \dots \\ 5 & : 16, 8, \underline{4, 2, 1} \\ & \dots \\ 51 & : 154, 77, 232, 116, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, \\ & \quad 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, \underline{4, 2, 1} \end{aligned}$$

Otázka: Dorazíme pro všechna $n \in \mathbb{N}$ vždy k číslu 1?
Počítačově ověřeno (stav k prosinci 2015) pro všechna

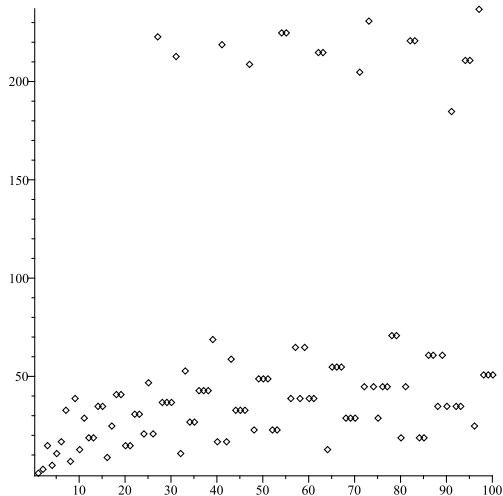
10. Collatzova posloupnost

- 1 : 4, 2, 1 (4, 2, 1 ...)
- 2 : 1
- 3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
- ...
- 5 : 16, 8, 4, 2, 1
- ...
- 51 : 154, 77, 232, 116, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52,
26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Otázka: Dorazíme pro všechna $n \in \mathbb{N}$ vždy k číslu 1?
Počítačově ověřeno (stav k prosinci 2015) pro všechna

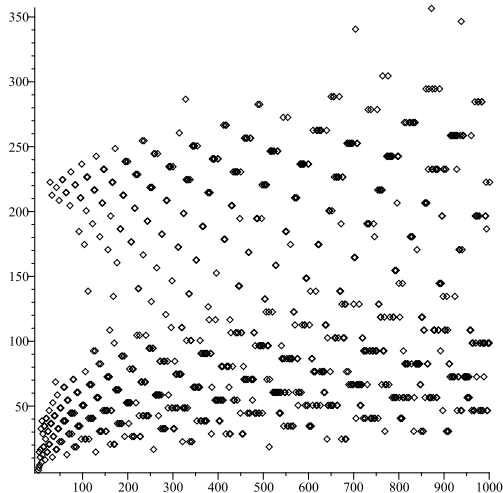
$$n \leq 5\,764\,607\,523\,034\,234\,880$$

10. Collatzova posloupnost



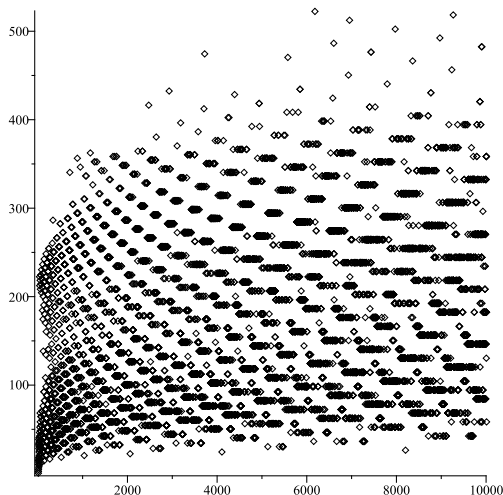
Počet kroků, po kterých se dosáhne hodnoty 1 z hodnoty n

10. Collatzova posloupnost



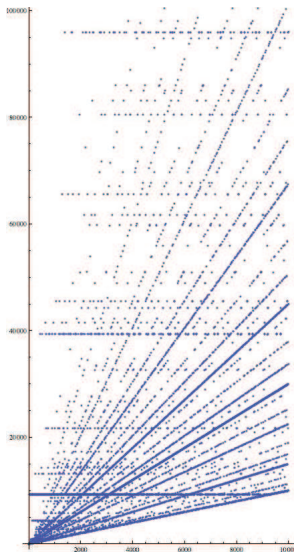
Počet kroků, po kterých se dosáhne hodnoty 1 z hodnoty n

10. Collatzova posloupnost



Počet kroků, po kterých se dosáhne hodnoty 1 z hodnoty n

10. Collatzova posloupnost



Největší číslo, kterého se dosáhne z hodnoty n



A to už je opravdu vše.

A to už je opravdu vše.

(Více toho, co lze či nelze, už možná nelze snést.)

Mirko Rokyta
KMA MFF Praha
Sokolovská 83
Praha 8 - Karlín

`mirko.rokyta@mff.cuni.cz`