

Sisyfos v Sofii aneb balkánský běs

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

OSMA, VŠB-TU Ostrava, 30.11.2016

Anti-chairman measure



Anti-chairman measure



Tento obrázek nemá nic společného s tématem přednášky

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

Sisyfos v Sofii aneb balkánský běs

Zahrajeme si takovou hru ...

1. hra: Omeleta Martina Gardnera

Gardnerova omeleta

Máme koš a v něm 100 vajec.

Máme koš a v něm 100 vajec. Kromě toho máme hromadu ošatek na vajíčka.

Máme koš a v něm 100 vajec. Kromě toho máme hromadu ošatek na vejíčka. V každém **tahu** buď přeneseme jedno vejíčko z koše do některé ošatky, nebo přeneseme jedno vejíčko z ošatky zpět do koše.

Máme koš a v něm 100 vajec. Kromě toho máme hromadu ošatek na vejíčka. V každém **tahu** buď přeneseme jedno vejíčko z koše do některé ošatky, nebo přeneseme jedno vejíčko z ošatky zpět do koše.

Úkolem je spakovat všechna vejíčka do ošatek a odnést si je domů za účelem výroby větší omelety.

Gardnerova omeleta

První verze strategie:

První verze strategie:

- ve dvou po sobě jdoucích tazích přeneseme dvě vajíčka po sobě z koše do ošatky,

První verze strategie:

- ve dvou po sobě jdoucích tazích přeneseme dvě vajíčka po sobě z koše do ošatky,
- v následujícím tahu vrátíme jedno vajíčko z ošatky zpět do koše,

První verze strategie:

- ve dvou po sobě jdoucích tazích přeneseme dvě vajíčka po sobě z koše do ošatky,
- v následujícím tahu vrátíme jedno vajíčko z ošatky zpět do koše,
- celou proceduru opakujeme tak dlouho, dokud v koši něco je.

První verze strategie:

- ve dvou po sobě jdoucích tazích přeneseme dvě vajíčka po sobě z koše do ošatky,
- v následujícím tahu vrátíme jedno vajíčko z ošatky zpět do koše,
- celou proceduru opakujeme tak dlouho, dokud v koši něco je.

Pozorování:

První verze strategie:

- ve dvou po sobě jdoucích tazích přeneseme dvě vajíčka po sobě z koše do ošatky,
- v následujícím tahu vrátíme jedno vajíčko z ošatky zpět do koše,
- celou proceduru opakujeme tak dlouho, dokud v koši něco je.

Pozorování:

- není to nejefektivnější způsob pakování vajec,

První verze strategie:

- ve dvou po sobě jdoucích tazích přeneseme dvě vajíčka po sobě z koše do ošatky,
- v následujícím tahu vrátíme jedno vajíčko z ošatky zpět do koše,
- celou proceduru opakujeme tak dlouho, dokud v koši něco je.

Pozorování:

- není to nejefektivnější způsob pakování vajec,
- ale zřejmě vede k cíli.

První verze strategie:

- ve dvou po sobě jdoucích tazích přeneseme dvě vajíčka po sobě z koše do ošatky,
- v následujícím tahu vrátíme jedno vajíčko z ošatky zpět do koše,
- celou proceduru opakujeme tak dlouho, dokud v koši něco je.

Pozorování:

- není to nejefektivnější způsob pakování vajec,
- ale zřejmě vede k cíli.

Gardnerova omeleta

Výsledkem je deterministický diskrétní dynamický systém.

Výsledkem je deterministický diskrétní dynamický systém.

Je zřejmé, že při této strategii **musí hra skončit** po konečně mnoha krocích.

Změna pravidel

Hrajeme-li se stejnou strategií, ale s **libovolným konečným počtem vajec**, ztrácíme obecný odhad počtu kroků.

Hrajeme-li se stejnou strategií, ale s **libovolným konečným počtem vajec**, ztrácíme obecný odhad počtu kroků.

Hra se stává **neomezenou**, pokud víme jen tolik, že vajec je libovolný konečný počet.

Hrajeme-li se stejnou strategií, ale s **libovolným konečným počtem vajec**, ztrácíme obecný odhad počtu kroků.

Hra se stává **neomezenou**, pokud víme jen tolik, že vajec je libovolný konečný počet.

Jakmile je však počáteční počet vajec stanoven, horní odhad je zpět.

Změna strategie

Nyní si představme, že naše strategie povoluje vrátit libovolný počet vajec v kteroukoli chvíli zpět do koše.

Nyní si představme, že naše strategie povoluje vrátit libovolný počet vajec v kteroukoli chvíli zpět do koše.

Pak nevíme o vývoji systému zhola nic.

Nyní si představme, že naše strategie povoluje vrátit libovolný počet vajec v kteroukoli chvíli zpět do koše.

Pak nevíme o vývoji systému zhola nic.

Žádný horní odhad na počet tahů, v němž hra skončí, pak nemáme dokonce ani v případě, kdy na počátku máme v koši jen dvě vejce.

Možné vývoje systému

Hra může skončit různě, uvedeme několik možností:

Hra může skončit různě, uvedeme několik možností:

- řešení mazané,

Hra může skončit různě, uvedeme několik možností:

- řešení mazané,
- řešení přibližlé,

Hra může skončit různě, uvedeme několik možností:

- řešení mazané,
- řešení přibližlé,
- řešení **sisyfovské**.





Sisyfos a jeho šutr

Sisyfovská hra

Definice. *Sisyfovská hra* je taková, kterou dokážeme protahovat do nekonečna.

Definice. *Sisyfovská hra* je taková, kterou dokážeme protahovat do nekonečna.

Jestliže nějaká hra nevyhnutelně skončí po konečně mnoha tazích, pak **není sisyfovská**.

Definice. *Sisyfovská hra* je taková, kterou dokážeme protahovat do nekonečna.

Jestliže nějaká hra nevyhnutelně skončí po konečně mnoha tazích, pak **není sisyfovská**.

Příklad. Gardnerova omeleta může a nemusí být sisyfovskou hrou, záleží na úpravě pravidel.

Zahrajeme si takovou hru ...

2. hra: kulečník Raymunda M. Smullyana

Smullyanův kulečník - popis hry

Máme **zásobárnu** a **krabici**.

Smullyanův kulečník - popis hry

Máme **zásobárnu** a **krabici**.

Zásobárna obsahuje nekonečně mnoho očíslovaných koulí.

Smullyanův kulečník - popis hry

Máme **zásobárnu** a **krabici**.

Zásobárna obsahuje nekonečně mnoho očíslovaných koulí.

Každá koule je označena nějakým (přirozeným) číslem.

Smullyanův kulečník - popis hry

Máme **zásobárnu** a **krabici**.

Zásobárna obsahuje nekonečně mnoho očíslovaných koulí.

Každá koule je označena nějakým (přirozeným) číslem.

Ke každému číslu máme k dispozici nekonečnou zásobu koulí.

Smullyanův kulečník - popis hry

Máme **zásobárnu** a **krabici**.

Zásobárna obsahuje nekonečně mnoho očíslovaných koulí.

Každá koule je označena nějakým (přirozeným) číslem.

Ke každému číslu máme k dispozici nekonečnou zásobu koulí.

Na počátku hry obsahuje krabice nějaký **konečný počet koulí**.

Smullyanův kulečník - popis hry

Máme **zásobárnu** a **krabici**.

Zásobárna obsahuje nekonečně mnoho očíslovaných koulí.

Každá koule je označena nějakým (přirozeným) číslem.

Ke každému číslu máme k dispozici nekonečnou zásobu koulí.

Na počátku hry obsahuje krabice nějaký **konečný počet koulí**.

Úkol:

Smullyanův kulečník - popis hry

Máme **zásobárnu** a **krabici**.

Zásobárna obsahuje nekonečně mnoho očíslovaných koulí.

Každá koule je označena nějakým (přirozeným) číslem.

Ke každému číslu máme k dispozici nekonečnou zásobu koulí.

Na počátku hry obsahuje krabice nějaký **konečný počet koulí**.

Úkol: Vyprázdnit krabici.

Smullyanův kulečník - pravidla

Tah:

Tah:

- vyhodíme z krabice libovolnou kouli

Tah:

- vyhodíme z krabice libovolnou kouli
- nahradíme ji libovolným počtem koulí **s nižšími čísly**

Tah:

- vyhodíme z krabice libovolnou kouli
- nahradíme ji libovolným počtem koulí **s nižšími čísly**
- koule s číslem 1 mizí bez náhrady

Tah:

- vyhodíme z krabice libovolnou kouli
- nahradíme ji libovolným počtem koulí **s nižšími čísly**
- koule s číslem 1 mizí bez náhrady

Příklad jednoho tahu:

Tah:

- vyhodíme z krabice libovolnou kouli
- nahradíme ji libovolným počtem koulí **s nižšími čísly**
- koule s číslem 1 mizí bez náhrady

Příklad jednoho tahu:

- vyhod' kouli s číslem 1000

Tah:

- vyhodíme z krabice libovolnou kouli
- nahradíme ji libovolným počtem koulí **s nižšími čísly**
- koule s číslem 1 mizí bez náhrady

Příklad jednoho tahu:

- vyhod' kouli s číslem 1000
- místo ní přines ze zásobárny miliardu koulí s číslem 999,

Tah:

- vyhodíme z krabice libovolnou kouli
- nahradíme ji libovolným počtem koulí **s nižšími čísly**
- koule s číslem 1 mizí bez náhrady

Příklad jednoho tahu:

- vyhod' kouli s číslem 1000
- místo ní přines ze zásobárny miliardu koulí s číslem 999,
- sto biliónů koulí s číslem 998,

Tah:

- vyhodíme z krabice libovolnou kouli
- nahradíme ji libovolným počtem koulí **s nižšími čísly**
- koule s číslem 1 mizí bez náhrady

Příklad jednoho tahu:

- vyhod' kouli s číslem 1000
- místo ní přines ze zásobárny miliardu koulí s číslem 999,
- sto biliónů koulí s číslem 998,
- tisíc kvintiliónů koulí s číslem 997,

Tah:

- vyhodíme z krabice libovolnou kouli
- nahradíme ji libovolným počtem koulí **s nižšími čísly**
- koule s číslem 1 mizí bez náhrady

Příklad jednoho tahu:

- vyhod' kouli s číslem 1000
- místo ní přines ze zásobárny miliardu koulí s číslem 999,
- sto biliónů koulí s číslem 998,
- tisíc kvintiliónů koulí s číslem 997,
- jednu kouli s číslem 41,

Tah:

- vyhodíme z krabice libovolnou kouli
- nahradíme ji libovolným počtem koulí **s nižšími čísly**
- koule s číslem 1 mizí bez náhrady

Příklad jednoho tahu:

- vyhod' kouli s číslem 1000
- místo ní přines ze zásobárny miliardu koulí s číslem 999,
- sto biliónů koulí s číslem 998,
- tisíc kvintiliónů koulí s číslem 997,
- jednu kouli s číslem 41,
- a dvě piva.

Smullyanův kulečník - problém

Smullyanův kulečník - problém

Otázka: je Smullyanův kulečník sisyfovská hra?

Smullyanův kulečník - odpověď

Odpověď: Není.

Smullyanův kulečník - komentář

John Horton Conway:

John Horton Conway:

The procedure is "**unboundedly unbounded**".

John Horton Conway:

The procedure is "**unboundedly unbounded**".

Jestliže se v krabici nachází alespoň jedna koule s číslem větším než 1, pak není možné udat horní mez na počet tahů.

John Horton Conway:

The procedure is "**unboundedly unbounded**".

Jestliže se v krabici nachází alespoň jedna koule s číslem větším než 1, pak není možné udat horní mez na počet tahů.

Hra získává horní mez až v okamžiku, když máme v krabici pouze koule s číslem 1.

Smullyanův kulečník - reference

Raymund M. Smullyan, *Trees and ball games*, Annals of New York Academy of Sciences **321** (1979), 86–90.

Raymund M. Smullyan, *Trees and ball games*, Annals of New York Academy of Sciences **321** (1979), 86–90.

Hra má úzký vztah k hluboké větě o nekonečných systémech konečných stromů (Joseph B. Kruskal, C. Nash-Williams, Nachum Derchowitz, Zohar Manna).

Raymund M. Smullyan, *Trees and ball games*, Annals of New York Academy of Sciences **321** (1979), 86–90.

Hra má úzký vztah k hluboké větě o nekonečných systémech konečných stromů (Joseph B. Kruskal, C. Nash-Williams, Nachum Derchowitz, Zohar Manna).

Aplikace: důkaz, že některé počítačové programy obsahující "unboundedly unbounded" operace se jednou zastaví.

Smullyanův kulečník - stromové řešení

Existuje několik důkazů toho, že hra není sisyfovská.

Existuje několik důkazů toho, že hra není sisyfovská.

Asi nejjednodušší je důkaz **indukcí**.

Existuje několik důkazů toho, že hra není sisyfovská.

Asi nejjednodušší je důkaz **indukcí**.

Smullyan dále uvádí dva důkazy pomocí tzv. **stromových modelů**.

Existuje několik důkazů toho, že hra není sisyfovská.

Asi nejjednodušší je důkaz **indukcí**.

Smullyan dále uvádí dva důkazy pomocí tzv. **stromových modelů**.

Strom je systém úseček, z nichž každá spojuje dva vrcholy.

Existuje několik důkazů toho, že hra není sisyfovská.

Asi nejjednodušší je důkaz **indukcí**.

Smullyan dále uvádí dva důkazy pomocí tzv. **stromových modelů**.

Strom je systém úseček, z nichž každá spojuje dva vrcholy.

Každý vrchol je jednoznačnou cestou propojen s "kořenem" stromu.

Tzv. sekernické řešení

Tzv. sekernické řešení



Tzv. sekernické řešení



Tisíc bonsajů nenahradí jednu sekvoj

Zahrajeme si takovou hru ...

3. hra: Hydra Laurence Kirbyho a Jeffa Parise

Hydra představuje komplikovanější hru založenou na principu mýcení stromů.

Hydra představuje komplikovanější hru založenou na principu mýcení stromů.

Hydrou nazýváme stromový graf, jehož koncové body představují hlavy.

Hydra představuje komplikovanější hru založenou na principu mýcení stromů.

Hydrou nazýváme stromový graf, jehož koncové body představují hlavy.

Herkules (nikoli salám) má za úkol tzv. **totální dekapitaci**.

Hydra představuje komplikovanější hru založenou na principu mýcení stromů.

Hydrou nazýváme stromový graf, jehož koncové body představují hlavy.

Herkules (nikoli salám) má za úkol tzv. **totální dekapitaci**.

Je-li některá hlava odstraněna, Hydra získává jednu nebo více kopií.

V prvním tahu Herkules odstraní jednu libovolně zvolenou hlavu.

Hydra - popis pravidel

V prvním tahu Herkules odstraní jednu libovolně zvolenou hlavu.

Z místa o jednu hranu níže než je místo seku (bod k) vyroste **kopie** toho, co z bodu k raší.

V prvním tahu Herkules odstraní jednu libovolně zvolenou hlavu.

Z místa o jednu hranu níže než je místo seku (bod k) vyroste **kopie** toho, co z bodu k raší.

Ve druhém tahu se vše opakuje až na to, že tentokrát se objeví **dvě** kopie.

V prvním tahu Herkules odstraní jednu libovolně zvolenou hlavu.

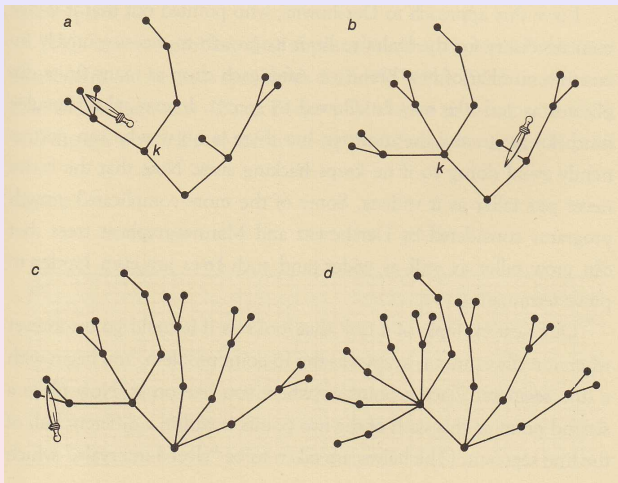
Z místa o jednu hranu níže než je místo seku (bod k) vyroste **kopie** toho, co z bodu k raší.

Ve druhém tahu se vše opakuje až na to, že tentokrát se objeví **dvě** kopie.

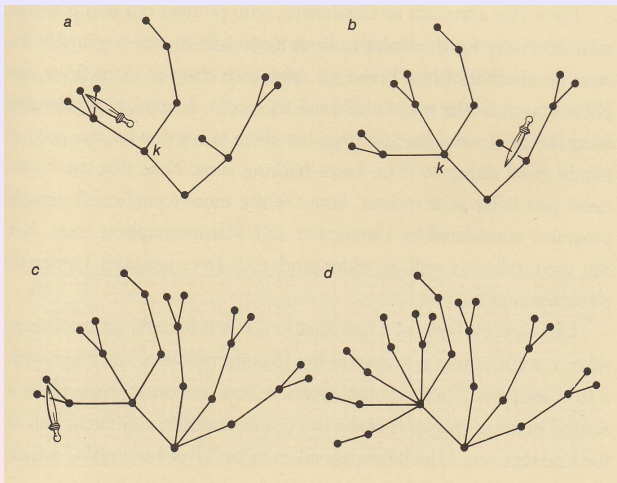
Ve třetím tahu **tři** atd.

Hydra a přirůstající kopie

Hydra a přirůstající kopie



Hydra a přirůstající kopie



zoufalý Herkules a rašící Hydra

Hydra a přirůstající kopie

Otázka: je Hydra sisyfovskou hrou?

Hydra a přirůstající kopie

Otázka: je Hydra sisyfovskou hrou?

Není.

Otázka: je Hydra sisyfovskou hrou?

Není.

Důkaz je založen na pozoruhodně hlubokém výsledku britského logika R. L. Goldsteina.

Otázka: je Hydra sisyfovskou hrou?

Není.

Důkaz je založen na pozoruhodně hlubokém výsledku britského logika R. L. Goldsteina.

Laurie Kirby a Jeff Paris, *Accessible independence results for Peano arithmetic*, Bull. London Math. Soc. 14 (1982), 285–293.

Zahrajeme si takovou hru ...

4. hra: Steinhausova logistika

Steinhausova logistika - pravidla

Máme úsečku.

Máme úsečku.

Umístíme na ni bod.

Máme úsečku.

Umístíme na ni bod.

Umístíme druhý bod tak, aby ležel **v opačné polovině** úsečky než první bod.

Máme úsečku.

Umístíme na ni bod.

Umístíme druhý bod tak, aby ležel **v opačné polovině** úsečky než první bod.

Umístíme třetí bod tak, aby každý ze tří bodů ležel **v jiné třetině** úsečky.

Máme úsečku.

Umístíme na ni bod.

Umístíme druhý bod tak, aby ležel **v opačné polovině** úsečky než první bod.

Umístíme třetí bod tak, aby každý ze tří bodů ležel **v jiné třetině** úsečky.

Což se nemusí podařit.

Máme úsečku.

Umístíme na ni bod.

Umístíme druhý bod tak, aby ležel **v opačné polovině** úsečky než první bod.

Umístíme třetí bod tak, aby každý ze tří bodů ležel **v jiné třetině** úsečky.

Což se nemusí podařit.

Proto přidáme nové pravidlo.

Máme úsečku.

Umístíme na ni bod.

Umístíme druhý bod tak, aby ležel **v opačné polovině** úsečky než první bod.

Umístíme třetí bod tak, aby každý ze tří bodů ležel **v jiné třetině** úsečky.

Což se nemusí podařit.

Proto přidáme nové pravidlo. **Zpětná korekce je povolena!**

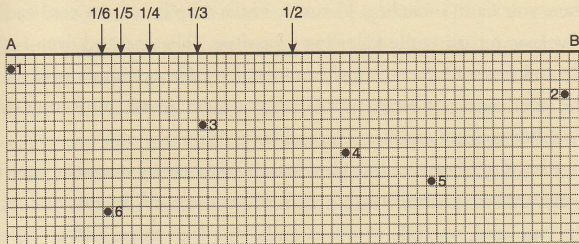
Steinhausova logistika - problém

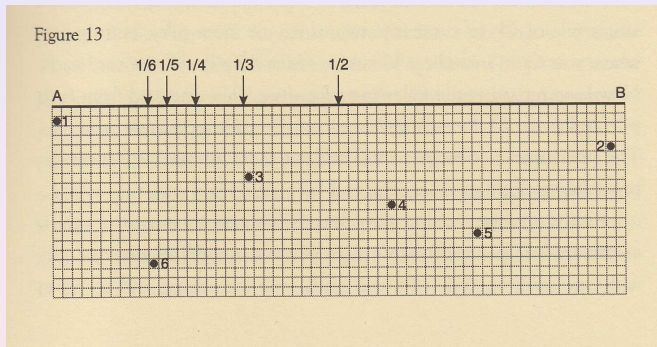
Otázka: je Steinhausova logistika sisyfovská hra?

Steinhausova logistika - příklad

Steinhausova logistika - příklad

Figure 13





steinhausovské rozmístění šesti bodů

Steinhausova logistika - odpověď

Odpověď: Steinhausova logistika není sisyfovská.

Odpověď: Steinhausova logistika není sisyfovská.

Končí po nejvýše 17 tazích.

Steinhausova logistika - na golf je to málo

Příklad rozmístění pro 17 bodů na intervalu $(0, 1)$:

Příklad rozmístění pro 17 bodů na intervalu $(0, 1)$:

0,71; 0,009; 0,42; 0,85;
0,27; 0,54; 0,925; 0,17;
0,62; 0,355; 0,78; 0,03; 0,48;
0,97; 0,22; 0,66; 0,32.

Autor hry: **Hugo Steinhaus** (1887–1972).

Autor hry: **Hugo Steinhaus** (1887–1972).

Podal **14-bodové řešení** a předpověděl, že to do nekonečna nepůjde.

Autor hry: **Hugo Steinhaus** (1887–1972).

Podal **14-bodové řešení** a předpověděl, že to do nekonečna nepůjde.

Řešení: **Elwyn R. Berlekamp, Ronald L. Graham**: *Irregularities in the Distributions of Finite Sequences*, Journal of Number Theory 2 (1970), 152–161.

Autor hry: **Hugo Steinhaus** (1887–1972).

Podal **14-bodové řešení** a předpověděl, že to do nekonečna nepůjde.

Řešení: **Elwyn R. Berlekamp, Ronald L. Graham**: *Irregularities in the Distributions of Finite Sequences*, Journal of Number Theory **2** (1970), 152–161.

Jiné řešení: **M. Warmus** (stejný časopis, 1976).

Autor hry: **Hugo Steinhaus** (1887–1972).

Podal **14-bodové řešení** a předpověděl, že to do nekonečna nepůjde.

Řešení: **Elwyn R. Berlekamp, Ronald L. Graham**: *Irregularities in the Distributions of Finite Sequences*, Journal of Number Theory **2** (1970), 152–161.

Jiné řešení: **M. Warmus** (stejný časopis, 1976). Existuje celkem 768 různých rozmístění pro 17 bodů.

Zahrajeme si takovou hru ...

5. hra: bulharský solitér

Bulharský solitér - popis hry

Ministerstvo vytáček potřebuje zvýšit počet svých oddělení.

Ministerstvo vytáček potřebuje zvýšit počet svých oddělení.

Přitom ale nechce platit nové zaměstnance.

Ministerstvo vytáček potřebuje zvýšit počet svých oddělení.

Přitom ale nechce platit nové zaměstnance.

Jak na to?

Ministerstvo vytáček potřebuje zvýšit počet svých oddělení.

Přitom ale nechce platit nové zaměstnance.

Jak na to?

Nápad: vytvoříme nové oddělení a převedeme do něj jednoho pracovníka z každého existujícího oddělení.

Bulharský solitér - karetní model hry

Bulharský solitér - karetní model hry

Máme **balíček** n karet

Bulharský solitér - karetní model hry

Máme **balíček n karet** (tzv. **zobecněný Mirek Černý**).

Bulharský solitér - karetní model hry

Máme **balíček n karet** (tzv. **zobecněný Mirek Černý**).

Rozdělíme jej na několik menších podbalíčků.

Bulharský solitér - karetní model hry

Máme **balíček n karet** (tzv. **zobecněný Mirek Černý**).

Rozdělíme jej na několik menších podbalíčků.

Tah:

Bulharský solitér - karetní model hry

Máme **balíček n karet** (tzv. **zobecněný Mirek Černý**).

Rozdělíme jej na několik menších podbalíčků.

Tah:

- vezmeme jednu kartu z každého podbalíčku

Bulharský solitér - karetní model hry

Máme **balíček n karet** (tzv. **zobecněný Mirek Černý**).

Rozdělíme jej na několik menších podbalíčků.

Tah:

- vezmeme jednu kartu z každého podbalíčku
- z nich vytvoříme nový podbalíček

Bulharský solitér - karetní model hry

Máme **balíček n karet** (tzv. **zobecněný Mirek Černý**).

Rozdělíme jej na několik menších podbalíčků.

Tah:

- vezmeme jednu kartu z každého podbalíčku
- z nich vytvoříme nový podbalíček
- podbalíčky o jedné kartě zaniknou

Bulharský solitér - karetní model hry

Máme **balíček n karet** (tzv. **zobecněný Mirek Černý**).

Rozdělíme jej na několik menších podbalíčků.

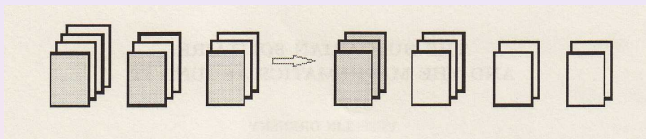
Tah:

- vezmeme jednu kartu z každého podbalíčku
- z nich vytvoříme nový podbalíček
- podbalíčky o jedné kartě zaniknou

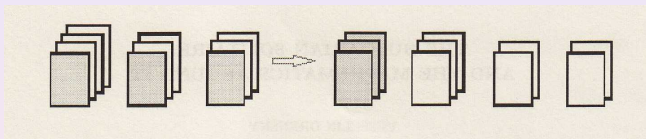
Hra končí, jestliže **tah nezmění pozici**.

Bulharský solitér - karetní model - příklad

Bulharský solitér - karetní model - příklad



Bulharský solitér - karetní model - příklad



tah pro balíček 10 karet

Bulharský solitér - Youngův diagram

Aktuální pozici ve hře **bulharský solitér** lze znázornit pomocí tzv. **Youngova diagramu**.

Bulharský solitér - Youngův diagram

Bulharský solitér - Youngův diagram

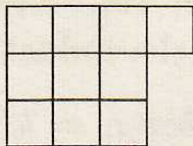


Fig. 2. $[\lambda] = [4, 3, 3]$

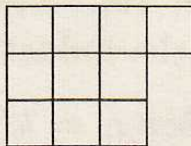


Fig. 2. $[\lambda] = [4, 3, 3]$

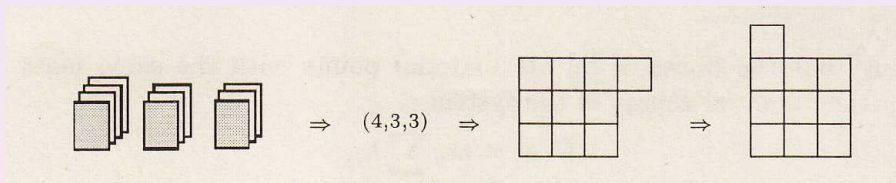
Youngův diagram rozdělení

Bulharský solitér - Youngův diagram a karty

Je výhodné potočit Youngův diagram o $\frac{\pi}{2}$.

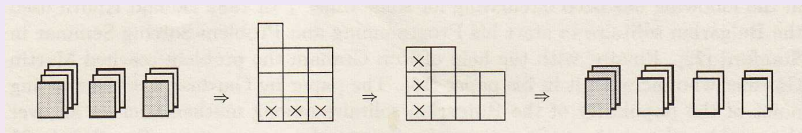
Bulharský solitér - Youngův diagram a karty

Je výhodné pootočit Youngův diagram o $\frac{\pi}{2}$.

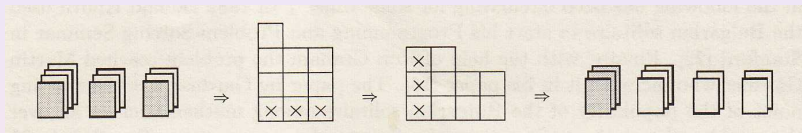


Bulharský solitér - tah

Bulharský solitér - tah



Bulharský solitér - tah

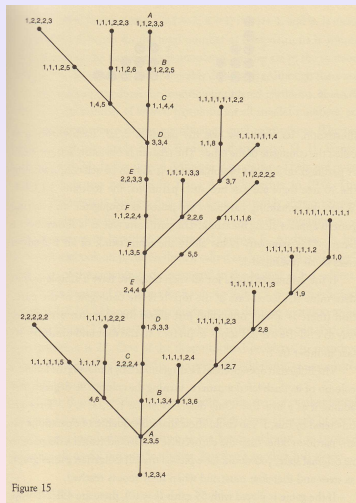


znázornění tahu na Youngově diagramu

Bulharský solitér - problém

Otázka: jak se bude hra vyvíjet?

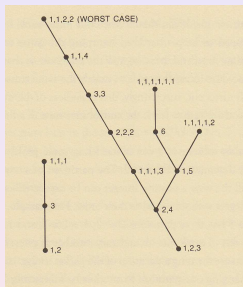
Bulharský solitér - vývoj hry pro $n = 10$



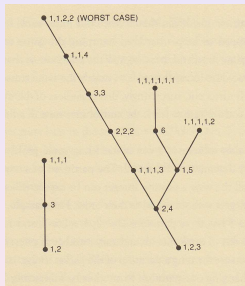
10 karet, 3 nejhorší pozice, 14 rajských pozic, konjugované páry

Bulharský solitér - vývoj hry pro $n = 3$ a $n = 6$

Bulharský solitér - vývoj hry pro $n = 3$ a $n = 6$



Bulharský solitér - vývoj hry pro $n = 3$ a $n = 6$



stromy pro 3 a pro 6 karet

Bulharský solitér - partition function

Otázka: A kolik je vůbec různých rozkladů?

Otázka: A kolik je vůbec různých rozkladů?

Odpověď: O tom rozhoduje tzv. **partition function**.

Otázka: A kolik je vůbec různých rozkladů?

Odpověď: O tom rozhoduje tzv. **partition function**.

Hodnoty partition function pro prvních pár čísel:

Otázka: A kolik je vůbec různých rozkladů?

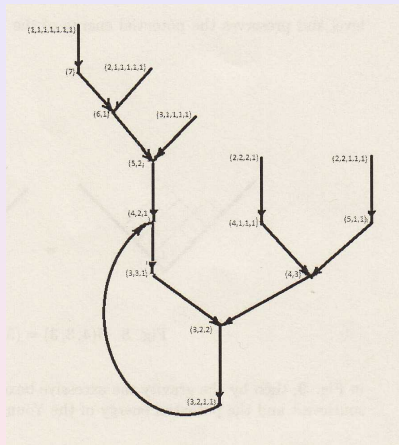
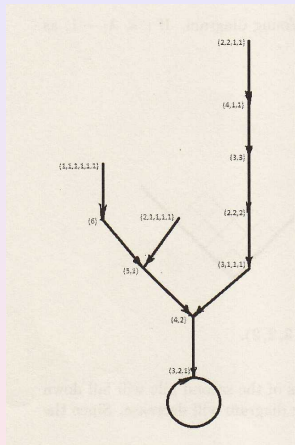
Odpověď: O tom rozhoduje tzv. **partition function**.

Hodnoty partition function pro prvních pár čísel:

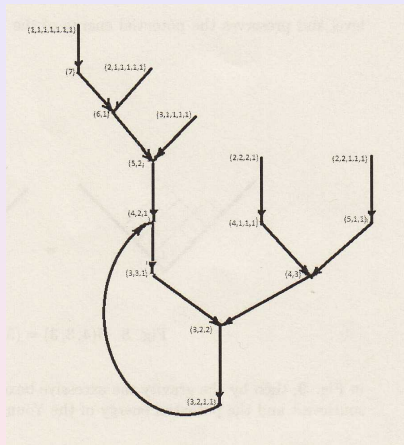
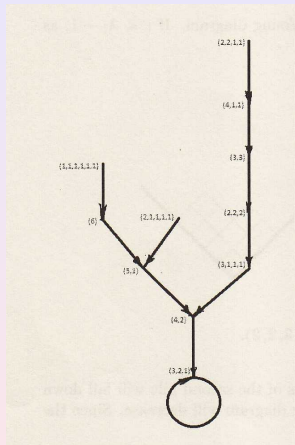
1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231,
297, 385, 490, 627, 792, 1002, 1255, 1575, 1958, 2436, 3010,
3718, 4565, 5604, ...

Bulharský solitér - porovnání případů $n = 6$ a $n = 7$

Bulharský solitér - porovnání případů $n = 6$ a $n = 7$



Bulharský solitér - porovnání případů $n = 6$ a $n = 7$



stromy pro 6 a pro 7 karet

Bulharský solitér - další problém

Pozorování:

Pozorování:

- pro $n = 6$ se hra zastaví

Pozorování:

- pro $n = 6$ se hra zastaví
- pro $n = 7$ je sisyfovská

Pozorování:

- pro $n = 6$ se hra zastaví
- pro $n = 7$ je sisyfovská

Otázka: proč?

Pozorování:

- pro $n = 6$ se hra zastaví
- pro $n = 7$ je sisyfovská

Otázka: proč?

Odpověď: protože 6 je **trojúhelníkové číslo**

Bulharský solitér - hlavní problém

Otázka: Necht' n je trojúhelníkové číslo.

Otázka: Necht' n je trojúhelníkové číslo. Existuje potom nějaké počáteční rozdělení n , pro které je bulharský solitér sisyfovskou hrou?

Bulharský solitér - idea dendrologická

Nápad: Nešlo by to ve všech případech vyřešit náčrtem stromu, jako jsme to provedli pro $n = 3, 6, 10$?

Nápad: Nešlo by to ve všech případech vyřešit náčrtem stromu, jako jsme to provedli pro $n = 3, 6, 10$?

Námitka: Možná ano, ale například pro $n = 55$ ($k = 10$) má odpovídající strom 451 276 vrcholů.

Nápad: Nešlo by to ve všech případech vyřešit náčrtem stromu, jako jsme to provedli pro $n = 3, 6, 10$?

Námitka: Možná ano, ale například pro $n = 55$ ($k = 10$) má odpovídající strom 451 276 vrcholů.

Byla by to pěkná dřina a nestačila by na to A-trojka.

Bulharský solitér - řešení

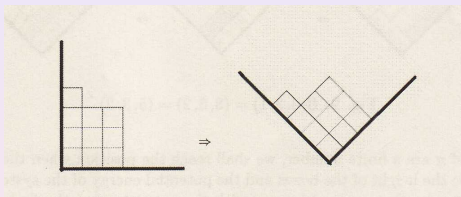
Odpověď: Bulharský solitér není sisyfovský pro žádné trojúhelníkové číslo.

Odpověď: Bulharský solitér není sisyfovský pro žádné trojúhelníkové číslo.

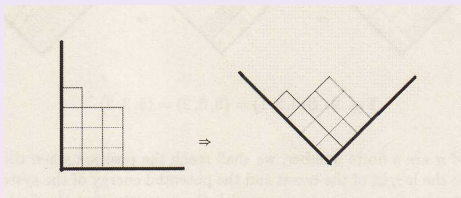
Věta. Nechť n je číslo tvaru $n = k(k + 1)/2$. Potom pro jakékoli počáteční rozdělení konverguje bulharský solitér do pozice $1, 2, \dots, k$. Navíc se hra zastaví po nejvýše $k(k - 1)$ krocích.

Bulharský solitér - důkaz

Bulharský solitér - důkaz



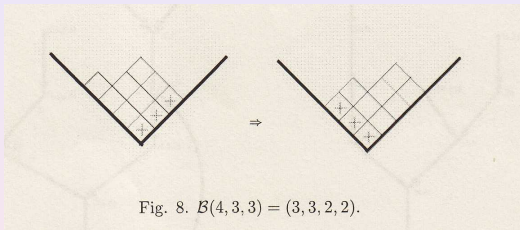
Bulharský solitér - důkaz



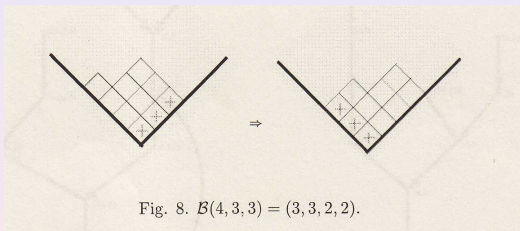
kolébková metoda

Bulharský solitér - důkaz

Bulharský solitér - důkaz



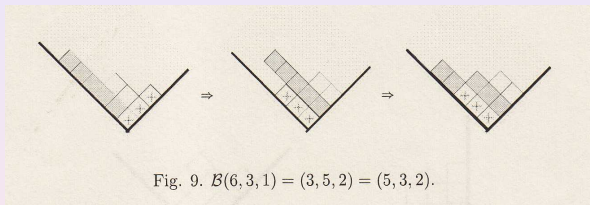
Bulharský solitér - důkaz



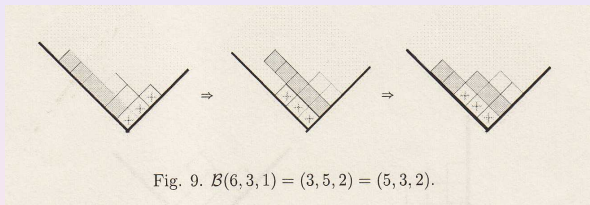
aktualisace kolébky

Bulharský solitér - důkaz

Bulharský solitér - důkaz



Bulharský solitér - důkaz



aktualisace kolébky a gravitace

Bulharský solitér - závěrečná poznámka

Citace z článku Ethan Akin, Morton Davis, *Bulgarian solitaire*, American Mathematical Monthly **92** (1985), 237–250:

Citace z článku Ethan Akin, Morton Davis, *Bulgarian solitaire*, American Mathematical Monthly **92** (1985), 237–250:

Blast Martin Gardner! There you are, minding your own business, and *Scientific American* comes along like a virus. All else forgotten, you must struggle with infection by one of his fascinating problems. In the August 1983 issue he introduced us to Bulgarian solitaire.

To je vše, děkuji za pozornost!