Silný zákon malých čísel

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

OSMA, Ostrava, 1.12. 2015

Název je parafrází na poměrně dost známý . . .

Název je parafrází na poměrně dost známý . . .

. . . silný zákon velkých čísel:

Název je parafrází na poměrně dost známý . . .

. . . silný zákon velkých čísel:

$$\lim_{n\to\infty} Pr(\overline{X_n} = \mu) = 1.$$

Název je parafrází na poměrně dost známý . . .

. . . silný zákon velkých čísel:

$$\lim_{n\to\infty} Pr(\overline{X_n} = \mu) = 1.$$

Lidová formulace:

Název je parafrází na poměrně dost známý . . .

. . . silný zákon velkých čísel:

$$\lim_{n\to\infty} Pr(\overline{X_n} = \mu) = 1.$$

Lidová formulace: výběrový průměr náhodných veličin *skoro jistě* konverguje ke střední hodnotě.

Příklad

Příklad

Silný zákon pro kostku:

Příklad

Silný zákon pro kostku: Házíme-li homogenní kostkou o šesti stranách,

Příklad

Silný zákon pro kostku: Házíme-li homogenní kostkou o šesti stranách, pak střední hodnota každého hodu je rovna

Příklad

Silný zákon pro kostku: Házíme-li homogenní kostkou o šesti stranách, pak střední hodnota každého hodu je rovna

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6}$$

Příklad

Silný zákon pro kostku: Házíme-li homogenní kostkou o šesti stranách, pak střední hodnota každého hodu je rovna

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5.$$

Příklad

Silný zákon pro kostku: Házíme-li homogenní kostkou o šesti stranách, pak střední hodnota každého hodu je rovna

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5.$$

Tedy: budeme-li házet dost dlouho, pak se průměr všech hodů bude blížit hodnotě 3,5.

Příklad

Silný zákon pro kostku: Házíme-li homogenní kostkou o šesti stranách, pak střední hodnota každého hodu je rovna

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5.$$

Tedy: budeme-li házet dost dlouho, pak se průměr všech hodů bude blížit hodnotě 3,5.

Ještě lepší formulace (moje):

Příklad

Silný zákon pro kostku: Házíme-li homogenní kostkou o šesti stranách, pak střední hodnota každého hodu je rovna

$$\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5.$$

Tedy: budeme-li házet dost dlouho, pak se průměr všech hodů bude blížit hodnotě 3,5.

Ještě lepší formulace (moje): budeme-li házet dost dlouho, určitě nám alespoň jedou padne 3,5.

Zpět k naší věci

Zpět k naší věci

Nás ale bude zajímat **silný zákon malých čísel**.

Zpět k naší věci

Nás ale bude zajímat **silný zákon malých čísel**.

Oproti silnému zákonu **velkých** čísel má jednu podstatnou nevýhodu:

Zpět k naší věci

Nás ale bude zajímat **silný zákon malých čísel**.

Oproti silnému zákonu **velkých** čísel má jednu podstatnou nevýhodu: projevuje se jen občas

Zpět k naší věci

Nás ale bude zajímat **silný zákon malých čísel**.

Oproti silnému zákonu **velkých** čísel má jednu podstatnou nevýhodu: projevuje se jen občas a *dost často neplatí*.

Popis principu

Popis principu

Navykli jsme si považovat matematiku za **exaktní vědu**.

Popis principu

Navykli jsme si považovat matematiku za **exaktní vědu**.

Při tvůrčím procesu objevování nových matematických zákonů to ale neplatí.

Popis principu

Navykli jsme si považovat matematiku za **exaktní vědu**.

Při tvůrčím procesu objevování nových matematických zákonů to ale neplatí.

Dva nejdůležitější prvky matematického výzkumu jsou:

Popis principu

Navykli jsme si považovat matematiku za **exaktní vědu**.

Při tvůrčím procesu objevování nových matematických zákonů to ale neplatí.

Dva nejdůležitější prvky matematického výzkumu jsou:

- umění položit si **správnou otázku**

Popis principu

Navykli jsme si považovat matematiku za **exaktní vědu**.

Při tvůrčím procesu objevování nových matematických zákonů to ale neplatí.

Dva nejdůležitější prvky matematického výzkumu jsou:

- umění položit si **správnou otázku**
- schopnost rozpoznat **schéma**.

Popis principu

Navykli jsme si považovat matematiku za **exaktní vědu**.

Při tvůrčím procesu objevování nových matematických zákonů to ale neplatí.

Dva nejdůležitější prvky matematického výzkumu jsou:

- umění položit si **správnou otázku**
- schopnost rozpoznat **schéma**.

Jenže:

Popis principu

Navykli jsme si považovat matematiku za **exaktní vědu**.

Při tvůrčím procesu objevování nových matematických zákonů to ale neplatí.

Dva nejdůležitější prvky matematického výzkumu jsou:

- umění položit si **správnou otázku**
- schopnost rozpoznat **schéma**.

Jenže:

- pro pokládání správných otázek neexistuje algoritmus

Popis principu

Navykli jsme si považovat matematiku za **exaktní vědu**.

Při tvůrčím procesu objevování nových matematických zákonů to ale neplatí.

Dva nejdůležitější prvky matematického výzkumu jsou:

- umění položit si **správnou otázku**
- schopnost rozpoznat **schéma**.

Jenže:

- pro pokládání správných otázek neexistuje algoritmus
- schéma nemusí být schématem, může být jen (ne)šťastnou shodou okolností.

Autor zákona

Autor zákona



Autor zákona



Richard Kenenth Guy (University of Calgary)

Formulace zákona

Formulace zákona

Silný zákon malých čísel:

Formulace zákona

Silný zákon malých čísel:

Malých čísel je příliš málo na to, kolik se toho po nich chce.

Formulace zákona

Silný zákon malých čísel:

Malých čísel je příliš málo na to, kolik se toho po nich chce.

Originál:

Formulace zákona

Silný zákon malých čísel:

Malých čísel je příliš málo na to, kolik se toho po nich chce.

Originál:

There aren't enough small numbers to meet the many demands made of them.

Aliterační popisy zákona

Aliterační popisy zákona

Zákon je zároveň dravou **Skyllou**, která hravě zhatí veškeré plány na zobecnění

Aliterační popisy zákona

Zákon je zároveň dravou **Skyllou**, která hravě zhatí veškeré plány na zobecnění

(Scylla, shattering sensible statement with spurious exceptions)

Aliterační popisy zákona

Zákon je zároveň dravou **Skyllou**, která hravě zhatí veškeré plány na zobecnění

(Scylla, shattering sensible statement with spurious exceptions)

i nenasytnou **Charybdou**, v jejímž bezedném chřtánu zmizí každý důkaz

Aliterační popisy zákona

Zákon je zároveň dravou **Skyllou**, která hravě zhatí veškeré plány na zobecnění

(Scylla, shattering sensible statement with spurious exceptions)

i nenasytnou **Charybdou**, v jejímž bezedném chřtánu zmizí každý důkaz

(Charybdis of capricious coincidences, causing careless conjectures).

Aliterační popisy zákona

Zákon je zároveň dravou **Skyllou**, která hravě zhatí veškeré plány na zobecnění

(Scylla, shattering sensible statement with spurious exceptions)

i nenasytnou **Charybdou**, v jejímž bezedném chřtánu zmizí každý důkaz

(Charybdis of capricious coincidences, causing careless conjectures).

Způsobuje bolestivé dilema, zda se máme vydat za důkazem, nebo za protipříkladem.

Popis obtíží, které na nás číhají

Popis obtíží, které na nás číhají

Zásadní otázka:

Popis obtíží, které na nás číhají

Zásadní otázka: Objevíme-li schéma, jak poznáme, zda je skutečně schématem, nebo pouhým důsledkem silného zákona malých čísel.

Rozcvička

Které z následujících výroků o přirozených číslech jsou pravdivé?

Které z následujících výroků o přirozených číslech jsou pravdivé?

- 10% z prvního sta čísel jsou kvadráty

Rozcvička

Které z následujících výroků o přirozených číslech jsou pravdivé?

- 10% z prvního sta čísel jsou kvadráty
- čtvrtina z prvního sta čísel jsou prvočísla

Rozcvička

Které z následujících výroků o přirozených číslech jsou pravdivé?

- 10% z prvního sta čísel jsou kvadráty
- čtvrtina z prvního sta čísel jsou prvočísla
- všechna čísla menší než 10 až na jedno jsou nějakou mocninou prvočísla

Rozcvička

Které z následujících výroků o přirozených číslech jsou pravdivé?

- 10% z prvního sta čísel jsou kvadráty
- čtvrtina z prvního sta čísel jsou prvočísla
- všechna čísla menší než 10 až na jedno jsou nějakou mocninou prvočísla
- polovina z prvních deseti čísel jsou Fibonacciova.

Rozcvička

Které z následujících výroků o přirozených číslech jsou pravdivé?

- 10% z prvního sta čísel jsou kvadráty
- čtvrtina z prvního sta čísel jsou prvočísla
- všechna čísla menší než 10 až na jedno jsou nějakou mocninou prvočísla
- polovina z prvních deseti čísel jsou Fibonacciova.

A které z nich představují schémata?

Zrádné posloupnosti

Zrádné posloupnosti

Příklad:

Zrádné posloupnosti

Příklad:

Na kolik oblastí rozdělí kruh **spojnice n bodů**.?

Obrázek

Obrázek

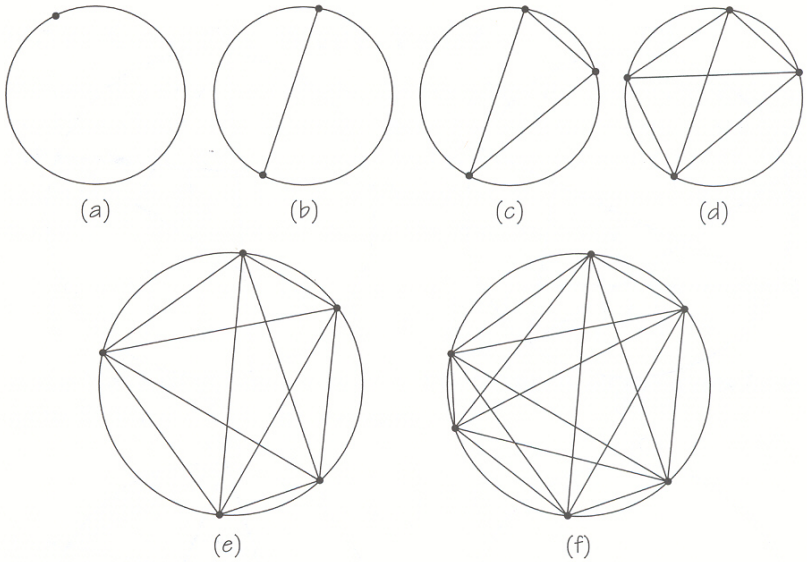
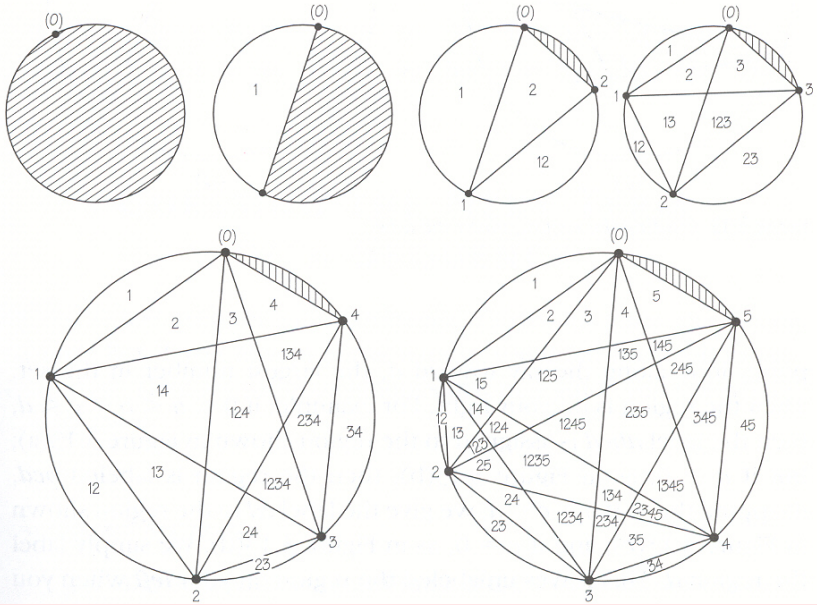


FIGURE 3.11 *A deceptive sequence.*



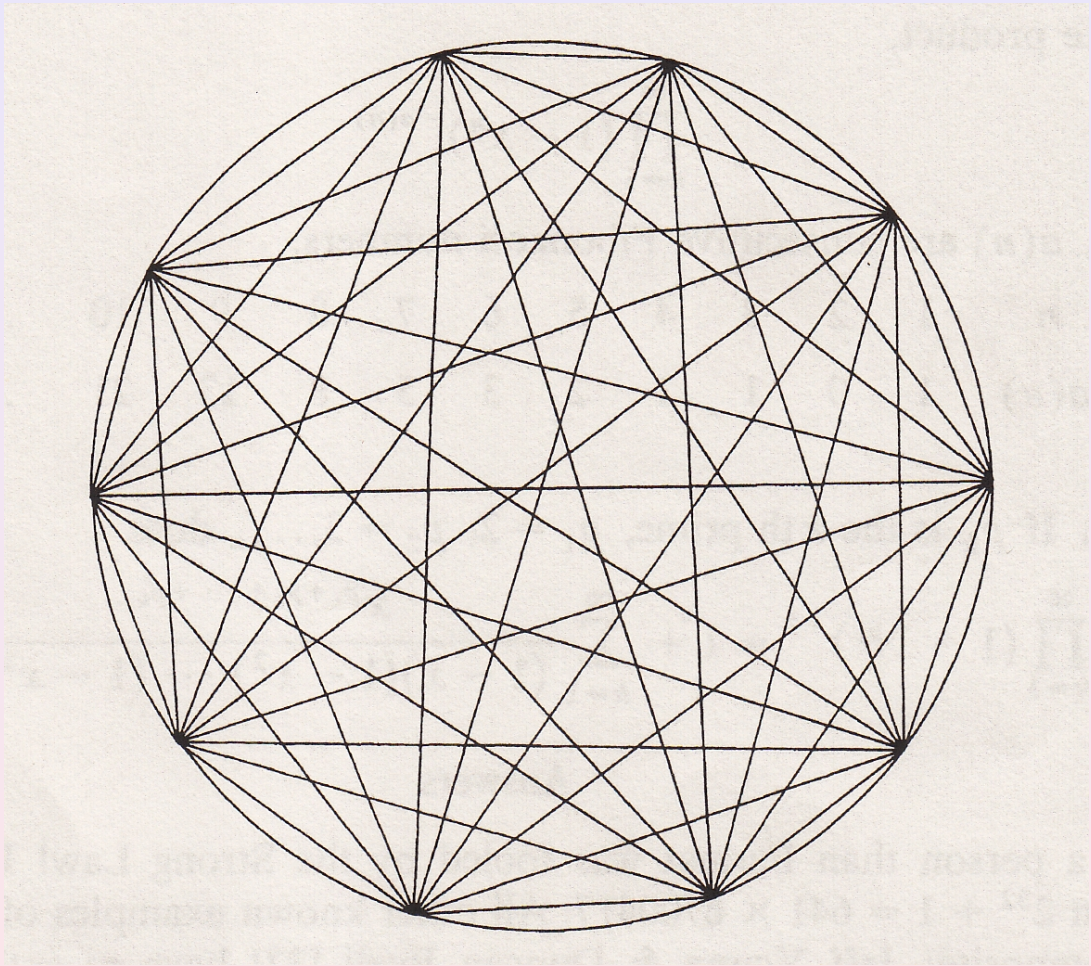
Prvních pár členů

Prvních pár členů

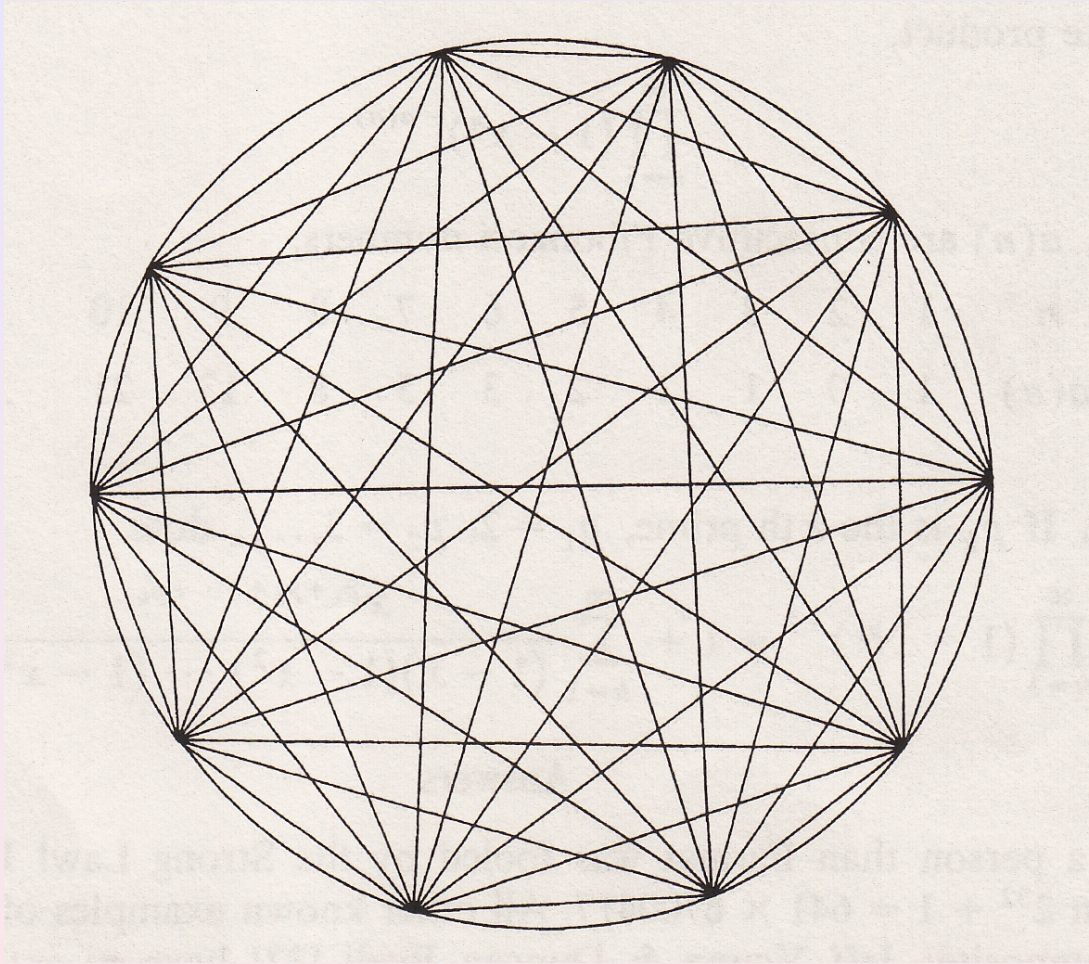
- Pro $n = 1$ dostaneme 1 oblast.
- Pro $n = 2$ dostaneme 2 oblasti.
- Pro $n = 3$ dostaneme 4 oblasti.
- Pro $n = 4$ dostaneme 8 oblastí.
- Pro $n = 5$ dostaneme 16 oblastí.

Nápověda pro fajnšmekry

Nápověda pro fajnšmekry



Nápověda pro fajnšmekry



Pro $n = 10$ dostaneme 256 oblastí.

Záludná otázka

Záludná otázka

Kolik oblastí dostaneme pro $n = 6$?

Záludná otázka

Kolik oblastí dostaneme pro $n = 6$?

Odpověď: 31.

Je na to dokonce vzorec

Je na to dokonce vzorec

Jenomže tento vzorec nezní

$$2^{n-1},$$

Je na to dokonce vzorec

Jenomže tento vzorec nezní

$$2^{n-1},$$

jak si možná někdo myslel,

Je na to dokonce vzorec

Jenomže tento vzorec nezní

$$2^{n-1},$$

jak si možná někdo myslel, nýbrž

$$\frac{1}{24}\left(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24\right)$$

Je na to dokonce vzorec

Jenomže tento vzorec nezní

$$2^{n-1},$$

jak si možná někdo myslel, nýbrž

$$\frac{1}{24}\left(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24\right)$$

nebo též

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4}.$$

A jak to bylo s tou nápovědou?

A jak to bylo s tou nápovědou?

Mohli jste to vědět?

A jak to bylo s tou nápovědou?

Mohli jste to vědět?

ANO!

A jak to bylo s tou nápovědou?

Mohli jste to vědět?

ANO!

Je třeba si neplést

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 31,\ 57,\ 99,\ 163,$$
$$\mathbf{256},\ 386,\ 562,\ 794,\ 1093,\ \ldots$$

A jak to bylo s tou nápovědou?

Mohli jste to vědět?

ANO!

Je třeba si neplést

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 31,\ 57,\ 99,\ 163,$$
$$\mathbf{256},\ 386,\ 562,\ 794,\ 1093,\ \ldots$$

a

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ \mathbf{256},$$
$$512,\ 1024,\ 2048,\ 4096,\ \ldots$$

Ještě jedna zrádná posloupnost

Ještě jedna zrádná posloupnost

Posuďte následující posloupnost:

Ještě jedna zrádná posloupnost

Posuďte následující posloupnost:

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, \mathbf{60}, 61, \ldots$$

Ještě jedna zrádná posloupnost

Posuďte následující posloupnost:

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, \mathbf{60}, 61, \ldots$$

Otázka: Co to je?

Ještě jedna zrádná posloupnost

Posuďte následující posloupnost:

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, \mathbf{60}, 61, \ldots$$

Otázka: Co to je?

Odpověď: Jsou to přípustné **řády jednoduchých grup**.

Psychologova posloupnost

Psychologova posloupnost

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

Psychologova posloupnost

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

Psychologova posloupnost

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

Otázka: Kolik je a_6?

Psychologova posloupnost

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

Otázka: Kolik je a_6?

Odpověď: $a_6 = 2015$.

Psychologova posloupnost

Když poznáte, co bude následovat, dostanete certifikát na IQ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

Otázka: Kolik je a_6?

Odpověď: $a_6 = 2015$.

Vzorec:

$$a_n = n + 2009 \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{5!}.$$

Připravte se na hlasování!

Příklad 1

Příklad 1

Čísla

$$2^{2^0}+1=1,$$
$$2^{2^1}+1=3,$$
$$2^{2^2}+1=17,$$
$$2^{2^3}+1=257,$$
$$2^{2^4}+1=65537$$

jsou prvočísla.

Příklad 1

Čísla

$$2^{2^0}+1=1,$$
$$2^{2^1}+1=3,$$
$$2^{2^2}+1=17,$$
$$2^{2^3}+1=257,$$
$$2^{2^4}+1=65537$$

jsou prvočísla. Jde o ryzí schéma, nebo o projev SZMČ?

Příklad 1 - řešení

Příklad 1 - řešení

Bohužel, jde o projev SZMČ.

Příklad 1 - řešení

Bohužel, jde o projev SZMČ.

Kdo ses spletl, nezoufej, jsiť **v dobré společnosti**.

Příklad 1 - řešení

Bohužel, jde o projev SZMČ.

Kdo ses spletl, nezoufej, jsiť **v dobré společnosti**.

V tomto případě byl totiž silným zákonem malých čísel ošálen i sám **Pierre de Fermat**.

Příklad 1 - řešení

Bohužel, jde o projev SZMČ.

Kdo ses spletl, nezoufej, jsiť **v dobré společnosti**.

V tomto případě byl totiž silným zákonem malých čísel ošálen i sám **Pierre de Fermat**.

Leonhard Euler později odhalil, že $2^{32} + 1 = 641 \times 6700417$.

Příklad 1 - řešení

Bohužel, jde o projev SZMČ.

Kdo ses spletl, nezoufej, jsiť **v dobré společnosti**.

V tomto případě byl totiž silným zákonem malých čísel ošálen i sám **Pierre de Fermat**.

Leonhard Euler později odhalil, že $2^{32} + 1 = 641 \times 6700417$.

Všechna další známá čísla uvedeného typu jsou složená.

Příklad 1 - řešení

Bohužel, jde o projev SZMČ.

Kdo ses spletl, nezoufej, jsiť **v dobré společnosti**.

V tomto případě byl totiž silným zákonem malých čísel ošálen i sám **Pierre de Fermat**.

Leonhard Euler později odhalil, že $2^{32} + 1 = 641 \times 6700417$.

Všechna další známá čísla uvedeného typu jsou složená.

Zatím poslední:

Příklad 1 - řešení

Bohužel, jde o projev SZMČ.

Kdo ses spletl, nezoufej, jsiť **v dobré společnosti**.

V tomto případě byl totiž silným zákonem malých čísel ošálen i sám **Pierre de Fermat**.

Leonhard Euler později odhalil, že $2^{32} + 1 = 641 \times 6700417$.

Všechna další známá čísla uvedeného typu jsou složená.

Zatím poslední: $2^{2^{20}} + 1$ je složené (Jeff Young & Duncan Bell, 1985).

Příklad 2

Příklad 2

Číslo $2^n - 1$ může být prvočíslem jedině tehdy, je-li n prvočíslo.

Příklad 2

Číslo $2^n - 1$ může být prvočíslem jedině tehdy, je-li n prvočíslo. Avšak čísla

$$2^2 - 1 = 3,$$
$$2^3 - 1 = 7,$$
$$2^5 - 1 = 31,$$
$$2^7 - 1 = 127$$

vskutku prvočísly jsou.

Příklad 2

Číslo $2^n - 1$ může být prvočíslem jedině tehdy, je-li n prvočíslo. Avšak čísla

$$2^2 - 1 = 3,$$
$$2^3 - 1 = 7,$$
$$2^5 - 1 = 31,$$
$$2^7 - 1 = 127$$

vskutku prvočísly jsou. Jde o ryzí schéma, nebo o projev SZMČ?

Příklad 2 - řešení

Příklad 2 - řešení

Opět jde o projev SZMČ.

Příklad 2 - řešení

Opět jde o projev SZMČ.

V tomto případě byl silným zákonem malých čísel postižen páter **Marin Mersenne**.

Příklad 2 - řešení

Opět jde o projev SZMČ.

V tomto případě byl silným zákonem malých čísel postižen páter **Marin Mersenne**.

Uvedenou vlastnost má sice slušný počet čísel, ale například

$$2^{11} - 1 = 23 \times 89.$$

Příklad 2 - řešení

Opět jde o projev SZMČ.

V tomto případě byl silným zákonem malých čísel postižen páter **Marin Mersenne**.

Uvedenou vlastnost má sice slušný počet čísel, ale například

$$2^{11} - 1 = 23 \times 89.$$

Není známo, jestli prvočísel tohoto tvaru je konečně nebo nekonečně mnoho.

Příklad 2 - řešení

Opět jde o projev SZMČ.

V tomto případě byl silným zákonem malých čísel postižen páter **Marin Mersenne**.

Uvedenou vlastnost má sice slušný počet čísel, ale například

$$2^{11} - 1 = 23 \times 89.$$

Není známo, jestli prvočísel tohoto tvaru je konečně nebo nekonečně mnoho.

Dnes je jich známo 48.

Příklad 2 - řešení

Opět jde o projev SZMČ.

V tomto případě byl silným zákonem malých čísel postižen páter **Marin Mersenne**.

Uvedenou vlastnost má sice slušný počet čísel, ale například

$$2^{11} - 1 = 23 \times 89.$$

Není známo, jestli prvočísel tohoto tvaru je konečně nebo nekonečně mnoho.

Dnes je jich známo 48. Zatím poslední $2^{57885161} - 1$ bylo nalezeno v roce 2013.

Příklad 2 - řešení

Opět jde o projev SZMČ.

V tomto případě byl silným zákonem malých čísel postižen páter **Marin Mersenne**.

Uvedenou vlastnost má sice slušný počet čísel, ale například

$$2^{11} - 1 = 23 \times 89.$$

Není známo, jestli prvočísel tohoto tvaru je konečně nebo nekonečně mnoho.

Dnes je jich známo 48. Zatím poslední $2^{57885161} - 1$ bylo nalezeno v roce 2013. Je to zároveň i největší známé prvočíslo.

Příklad 2 - řešení

Opět jde o projev SZMČ.

V tomto případě byl silným zákonem malých čísel postižen páter **Marin Mersenne**.

Uvedenou vlastnost má sice slušný počet čísel, ale například

$$2^{11} - 1 = 23 \times 89.$$

Není známo, jestli prvočísel tohoto tvaru je konečně nebo nekonečně mnoho.

Dnes je jich známo 48. Zatím poslední $2^{57885161} - 1$ bylo nalezeno v roce 2013. Je to zároveň i největší známé prvočíslo. Má 17425170 cifer.





Marin Mersenne (1588-1648)

Příklad 3

Příklad 3

Čísla

$$31,$$
$$331,$$
$$3331,$$
$$33331,$$
$$333331,$$
$$3333331,$$

jsou prvočísla.

Příklad 3

Čísla

$$31,$$
$$331,$$
$$3331,$$
$$33331,$$
$$333331,$$
$$3333331,$$

jsou prvočísla. Jde o schéma?

Příklad 3 - řešení

Příklad 3 - řešení

Ne.

Příklad 3 - řešení

Ne.

Ještě další člen posloupnosti, tedy 33333331, je prvočíslem, ale už

$$333333331 = 17 \times 19607843.$$

Příklad 3 - řešení

Ne.

Ještě další člen posloupnosti, tedy 33333331, je prvočíslem, ale už

$$333333331 = 17 \times 19607843.$$

Mnemotechnická pomůcka:

Příklad 3 - řešení

Ne.

Ještě další člen posloupnosti, tedy 33333331, je prvočíslem, ale už

$$333333331 = 17 \times 19607843.$$

Mnemotechnická pomůcka:

1960 - datum vynálezu kofoly,

Příklad 3 - řešení

Ne.

Ještě další člen posloupnosti, tedy 33333331, je prvočíslem, ale už

$$333333331 = 17 \times 19607843.$$

Mnemotechnická pomůcka:

1960 - datum vynálezu kofoly,
7843 - číslo osobního vlaku Plzeň - Rokycany.

Chvíle oddychu - poesie

Let Us Now Praise Prime Numbers (by Helen Spalding)

Let us now praise prime numbers
With our fathers that begat us:
The power, the peculiar glory of prime numbers
Is that nothing begat them,
No ancestors, no factors.
Adams among the multiplied generations.

Příklad 4 - alternující faktoriály

Příklad 4 - alternující faktoriály

Všechna čísla

$$3! - 2! + 1! = 5,$$
$$4! - 3! + 2! - 1! = 19,$$
$$5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 101,$$
$$6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 619,$$
$$7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 4421,$$
$$8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 35899,$$

jsou prvočísla.

Příklad 4 - alternující faktoriály

Všechna čísla

$$3! - 2! + 1! = 5,$$
$$4! - 3! + 2! - 1! = 19,$$
$$5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 101,$$
$$6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 619,$$
$$7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 4421,$$
$$8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 35899,$$

jsou prvočísla. Jde o schéma?

Příklad 4 - řešení

Příklad 4 - řešení

Ne.

Příklad 4 - řešení

Ne.

Hned příští člen posloupnosti totiž splňuje

$$9! - 8! + 7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 326981 = 79 \times 4139.$$

Příklad 5 - číslo 41 opět na scéně

Příklad 5 - číslo 41 opět na scéně

$$
\begin{aligned}
41 + 2 &= 43 \\
43 + 4 &= 47 \\
47 + 6 &= 53 \\
53 + 8 &= 61 \\
61 + 10 &= 71 \\
71 + 12 &= 83 \\
83 + 14 &= 97 \\
97 + 16 &= 113 \\
113 + 18 &= 131 \\
131 + 20 &= 151 \\
151 + 22 &= 173 \\
173 + 24 &= 197 \\
197 + 26 &= 223 \\
223 + 28 &= 251 \\
251 + 30 &= 281 \\
281 + 32 &= 313 \\
313 + 34 &= 347 \\
347 + 36 &= 383 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Příklad 5 - číslo 41 opět na scéně

$$
\begin{aligned}
41 + 2 &= 43 \\
43 + 4 &= 47 \\
47 + 6 &= 53 \\
53 + 8 &= 61 \\
61 + 10 &= 71 \\
71 + 12 &= 83 \\
83 + 14 &= 97 \\
97 + 16 &= 113 \\
113 + 18 &= 131 \\
131 + 20 &= 151 \\
151 + 22 &= 173 \\
173 + 24 &= 197 \\
197 + 26 &= 223 \\
223 + 28 &= 251 \\
251 + 30 &= 281 \\
281 + 32 &= 313 \\
313 + 34 &= 347 \\
347 + 36 &= 383 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Samá prvočísla.

Příklad 5 - číslo 41 opět na scéně

$$
\begin{aligned}
41 + 2 &= 43 \\
43 + 4 &= 47 \\
47 + 6 &= 53 \\
53 + 8 &= 61 \\
61 + 10 &= 71 \\
71 + 12 &= 83 \\
83 + 14 &= 97 \\
97 + 16 &= 113 \\
113 + 18 &= 131 \\
131 + 20 &= 151 \\
151 + 22 &= 173 \\
173 + 24 &= 197 \\
197 + 26 &= 223 \\
223 + 28 &= 251 \\
251 + 30 &= 281 \\
281 + 32 &= 313 \\
313 + 34 &= 347 \\
347 + 36 &= 383 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Samá prvočísla. Je to schéma?

Příklad 5 - řešení

Příklad 5 - řešení

Ne.

Příklad 5 - řešení

Ne.

Je to proslulý mnohočlen

$$n^2 + n + 41$$

v převleku.

Příklad 5 - řešení

Ne.

Je to proslulý mnohočlen

$$n^2 + n + 41$$

v převleku.

Pro $n = 40$ dostaneme $1681 = 41^2$.

Příklad 6 - the Leo Moser sequence

Příklad 6 - the Leo Moser sequence

n	SEQUENCE	K
1	1,1	2
2	1, 2, 1	3
3	1, 3, 2, 3, 1	5
4	1, 4, 3, 2, 3, 4, 1	7
5	1, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 5, 1	11
6	1, 6, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 5, 6, 1	13
7	1, 7, 6, 5, 4, 7, 3, 5, 7, 2, 7, 5, 3, 7, 4, 5, 6, 7, 1	19

Příklad 6 - the Leo Moser sequence

n	SEQUENCE	K
1	1,1	2
2	1, 2, 1	3
3	1, 3, 2, 3, 1	5
4	1, 4, 3, 2, 3, 4, 1	7
5	1, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 5, 1	11
6	1, 6, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 5, 6, 1	13
7	1, 7, 6, 5, 4, 7, 3, 5, 7, 2, 7, 5, 3, 7, 4, 5, 6, 7, 1	19

Pořadové číslo řádku vsuneme mezi každá dvě čísla, jejichž je součtem.

Příklad 6 - the Leo Moser sequence

n	SEQUENCE	K
1	1,1	2
2	1, 2, 1	3
3	1, 3, 2, 3, 1	5
4	1, 4, 3, 2, 3, 4, 1	7
5	1, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 5, 1	11
6	1, 6, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 5, 6, 1	13
7	1, 7, 6, 5, 4, 7, 3, 5, 7, 2, 7, 5, 3, 7, 4, 5, 6, 7, 1	19

Pořadové číslo řádku vsuneme mezi každá dvě čísla, jejichž je součtem. Řádkový součet je pak vždy prvočíslo.

Příklad 6 - the Leo Moser sequence

n	SEQUENCE	K
1	1,1	2
2	1, 2, 1	3
3	1, 3, 2, 3, 1	5
4	1, 4, 3, 2, 3, 4, 1	7
5	1, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 5, 1	11
6	1, 6, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 5, 6, 1	13
7	1, 7, 6, 5, 4, 7, 3, 5, 7, 2, 7, 5, 3, 7, 4, 5, 6, 7, 1	19

Pořadové číslo řádku vsuneme mezi každá dvě čísla, jejichž je součtem. Řádkový součet je pak vždy prvočíslo. Nebo snad ne?

Příklad 6 - řešení

Příklad 6 - řešení

Ne.

Příklad 6 - řešení

Ne.

Pravidlo selže na desáté řadě,

Příklad 6 - řešení

Ne.

Pravidlo selže na desáté řadě, kde vyjde 33 čísel.

Příklad 6 - řešení

Ne.

Pravidlo selže na desáté řadě, kde vyjde 33 čísel.

Poznámka: Jestliže budeme počítat místo počtu čísel počet **číslic**,

Příklad 6 - řešení

Ne.

Pravidlo selže na desáté řadě, kde vyjde 33 čísel.

Poznámka: Jestliže budeme počítat místo počtu čísel počet **číslic**, pak posloupnost desátou řadu přežije (vyjde 37).

Příklad 6 - řešení

Ne.

Pravidlo selže na desáté řadě, kde vyjde 33 čísel.

Poznámka: Jestliže budeme počítat místo počtu čísel počet **číslic**, pak posloupnost desátou řadu přežije (vyjde 37). Pravidlo ale selže hned na řadě jedenácté (57).

Chvíle oddychu - definice

Chvíle oddychu - definice

2 is the oddest prime.

Chvíle oddychu - definice

2 is the oddest prime.

(R.K. Guy)

Příklad 7 - složen ze složenin

Příklad 7 - složen ze složenin

Pro žádné $n \in \mathbb{N}$ není

$$7013 \times 2^n + 1$$

prvočíslem.

Příklad 7 - složen ze složenin

Pro žádné $n \in \mathbb{N}$ není

$$7013 \times 2^n + 1$$

prvočíslem.

(Pro prvních pár čísel to lze hravě ověřit.)

Příklad 7 - složen ze složenin

Pro žádné $n \in \mathbb{N}$ není

$$7013 \times 2^n + 1$$

prvočíslem.

(Pro prvních pár čísel to lze hravě ověřit.)

Platí toto smělé tvrzení, či nikoli?

Příklad 7 - řešení

Příklad 7 - řešení

Wilfrid Keller dokázal v roce 1985, že výraz

$$7013 \times 2^n + 1$$

je složeným číslem pro všechna n splňující $0 \leq n \leq 24160$.

Příklad 7 - řešení

Wilfrid Keller dokázal v roce 1985, že výraz

$$7013 \times 2^n + 1$$

je složeným číslem pro všechna n splňující $0 \leq n \leq 24160$.

Duncan Buell a Jeff Young totéž ověřili pro dalších 325 čísel menších než 10^5.

Příklad 7 - řešení

Wilfrid Keller dokázal v roce 1985, že výraz

$$7013 \times 2^n + 1$$

je složeným číslem pro všechna n splňující $0 \leq n \leq 24160$.

Duncan Buell a Jeff Young totéž ověřili pro dalších 325 čísel menších než 10^5.

Všichni věří, že jednou musí vyjít prvočíslo, ale nikdo to zatím nedokázal.

Příklad 7 - řešení

Wilfrid Keller dokázal v roce 1985, že výraz

$$7013 \times 2^n + 1$$

je složeným číslem pro všechna n splňující $0 \leq n \leq 24160$.

Duncan Buell a Jeff Young totéž ověřili pro dalších 325 čísel menších než 10^5.

Všichni věří, že jednou musí vyjít prvočíslo, ale nikdo to zatím nedokázal.

Odpověď na tuto otázku **není známa**.

Příklad 8 - variace na předcházející téma

Příklad 8 - variace na předcházející téma

Pro žádné $n \in \mathbb{N}$ není

$$78557 \times 2^n + 1$$

prvočíslem.

Příklad 8 - variace na předcházející téma

Pro žádné $n \in \mathbb{N}$ není

$$78557 \times 2^n + 1$$

prvočíslem.

Vskutku?

Příklad 8 - řešení

Příklad 8 - řešení

Ano!

Příklad 8 - řešení

Ano!

Sám velký **John Lewis Selfridge** dokázal v roce 1963, že

Příklad 8 - řešení

Ano!

Sám velký **John Lewis Selfridge** dokázal v roce 1963, že

$$78557 \times 2^n + 1$$

musí být dělitelné jedním z čísel $3, 5, 7, 13, 19, 37, 73$.

Příklad 9 - Fortune cookie

Příklad 9 - Fortune cookie

Jak známo, Eukleides dokázal, že existuje nekonečně mnoho prvočísel.

Příklad 9 - Fortune cookie

Jak známo, Eukleides dokázal, že existuje nekonečně mnoho prvočísel.

Postupoval takto:

Příklad 9 - Fortune cookie

Jak známo, Eukleides dokázal, že existuje nekonečně mnoho prvočísel.

Postupoval takto:

$$2 + 1 = 3$$
$$(2 \times 3) + 1 = 7$$
$$(2 \times 3 \times 5) + 1 = 31$$
$$(2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1 = 211$$
$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) + 1 = 2311.$$

Příklad 9 - Fortune cookie - pokračování

Příklad 9 - Fortune cookie - pokračování

Výsledkem ale samozřejmě **nemusí vždy být prvočíslo**:

Příklad 9 - Fortune cookie - pokračování

Výsledkem ale samozřejmě **nemusí vždy být prvočíslo**:

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1 = 30031 = 59 \times 509$$
$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) + 1 = 510511 = 51 \times 97 \times 277$$
$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) + 1 = 9699691 = 51 \times 347 \times 27953$$

Příklad 9 - Fortune cookie - pokračování

Příklad 9 - Fortune cookie - pokračování

Vezmeme-li ale **následující** prvočíslo, pak rozdílem je vždy opět prvočíslo:

Příklad 9 - Fortune cookie - pokračování

Vezmeme-li ale **následující** prvočíslo, pak rozdílem je vždy opět prvočíslo:

$$5 - 2 = 3$$
$$11 - (2 \times 3) = 5$$
$$37 - (2 \times 3 \times 5) = 7$$
$$223 - (2 \times 3 \times 5 \times 7) = 13$$
$$2333 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) = 23$$
$$30047 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) = 17$$
$$510529 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) = 19$$
$$9699713 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) = 23$$

Příklad 9 - Fortune cookie - pokračování

Vezmeme-li ale **následující** prvočíslo, pak rozdílem je vždy opět prvočíslo:

$$5 - 2 = 3$$
$$11 - (2 \times 3) = 5$$
$$37 - (2 \times 3 \times 5) = 7$$
$$223 - (2 \times 3 \times 5 \times 7) = 13$$
$$2333 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) = 23$$
$$30047 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) = 17$$
$$510529 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) = 19$$
$$9699713 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) = 23$$

Je tomu tak, nebo se tu opět jen projevil SZMČ?

Příklad 9 - řešení

Příklad 9 - řešení

Tuto domněnku vyslovil **Richard F. Fortune** v roce 1941.

Příklad 9 - řešení

Tuto domněnku vyslovil **Richard F. Fortune** v roce 1941.

Dalších pár čísel v této posloupnosti:

Příklad 9 - řešení

Tuto domněnku vyslovil **Richard F. Fortune** v roce 1941.

Dalších pár čísel v této posloupnosti:

$$37, 61, 67, 61, 71, 47, 107, 59, 61, 109, 89, 103, 79.$$

Příklad 9 - řešení

Tuto domněnku vyslovil **Richard F. Fortune** v roce 1941.

Dalších pár čísel v této posloupnosti:

$$37, 61, 67, 61, 71, 47, 107, 59, 61, 109, 89, 103, 79.$$

Odpověď **není známa**, ale je pravděpodobné, že domněnka platí.

Příklad 9 - řešení

Tuto domněnku vyslovil **Richard F. Fortune** v roce 1941.

Dalších pár čísel v této posloupnosti:

$$37, 61, 67, 61, 71, 47, 107, 59, 61, 109, 89, 103, 79.$$

Odpověď **není známa**, ale je pravděpodobné, že domněnka platí.

Rozdíl totiž nemůže být dělitelný žádným z prvních k prvočísel, a tedy nejmenší možný kandidát na dělitele je p_{k+1}^2, což je číslo velké asi jako $(k \log k)^2$.

Příklad 9 - řešení

Tuto domněnku vyslovil **Richard F. Fortune** v roce 1941.

Dalších pár čísel v této posloupnosti:

$$37, 61, 67, 61, 71, 47, 107, 59, 61, 109, 89, 103, 79.$$

Odpověď **není známa**, ale je pravděpodobné, že domněnka platí.

Rozdíl totiž nemůže být dělitelný žádným z prvních k prvočísel, a tedy nejmenší možný kandidát na dělitele je p_{k+1}^2, což je číslo velké asi jako $(k \log k)^2$. Pro případný protipříklad by bylo nutné nalézt mezeru poblíž N o velikosti asi $(\log N \log\log N)^2$.

Příklad 9 - řešení

Tuto domněnku vyslovil **Richard F. Fortune** v roce 1941.

Dalších pár čísel v této posloupnosti:

$$37, 61, 67, 61, 71, 47, 107, 59, 61, 109, 89, 103, 79.$$

Odpověď **není známa**, ale je pravděpodobné, že domněnka platí.

Rozdíl totiž nemůže být dělitelný žádným z prvních k prvočísel, a tedy nejmenší možný kandidát na dělitele je p_{k+1}^2, což je číslo velké asi jako $(k \log k)^2$. Pro případný protipříklad by bylo nutné nalézt mezeru poblíž N o velikosti asi $(\log N \log\log N)^2$. Má se za to, že takové mezery **neexistují**, ale naše současná matematická výbava nám to neumožňuje prokázat.

Chvíle oddychu - poesie

(druhá sloka)

None can foretell their coming.
Among the ordinal numbers
They do not reserve their seats, arrive unexpected.
Along the line of cardinals
They rise like surprising pontiffs,
Each absolute, inscrutable, self-elected.

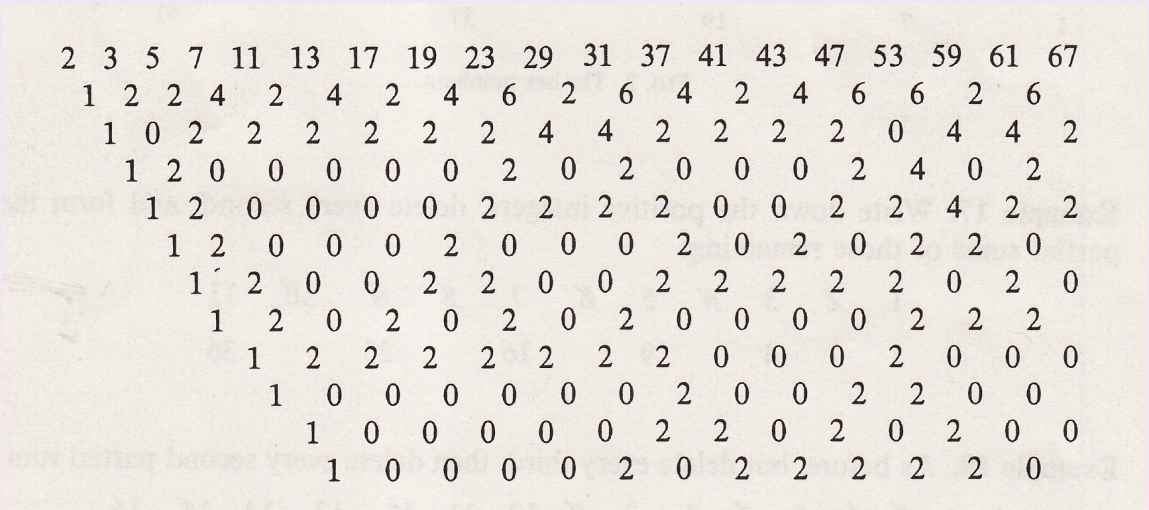
Příklad 10 - Gilbreathova domněnka

Příklad 10 - Gilbreathova domněnka

Vezměme si posloupnost všech prvočísel. Utvořme první diference, pak absolutní hodnoty druhých diferencí, třetích, čtvrtých, ...

Příklad 10 - Gilbreathova domněnka

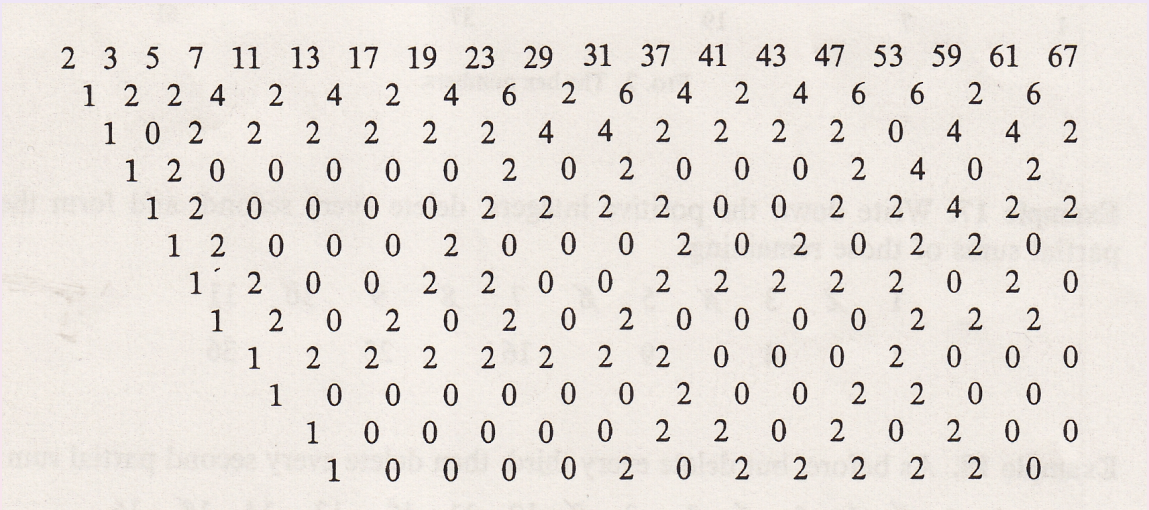
Vezměme si posloupnost všech prvočísel. Utvořme první diference, pak absolutní hodnoty druhých diferencí, třetích, čtvrtých, ...



2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	
	1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	6	2	6	
		1	0	2	2	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	0	4	4	2
			1	2	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	2	4	0	2
				1	2	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0	2	2	4	2	2
					1	2	0	0	0	2	0	0	0	2	0	2	0	2	2	0
						1	2	0	0	2	2	0	0	2	2	2	2	2	0	2	0
							1	2	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	2	2	2
								1	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2	0	0	0
									1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	2	0	0
										1	0	0	0	0	0	2	2	0	2	0	2	0	0
											1	0	0	0	0	2	0	2	2	2	2	2	0

Příklad 10 - Gilbreathova domněnka

Vezměme si posloupnost všech prvočísel. Utvořme první diference, pak absolutní hodnoty druhých diferencí, třetích, čtvrtých, ...

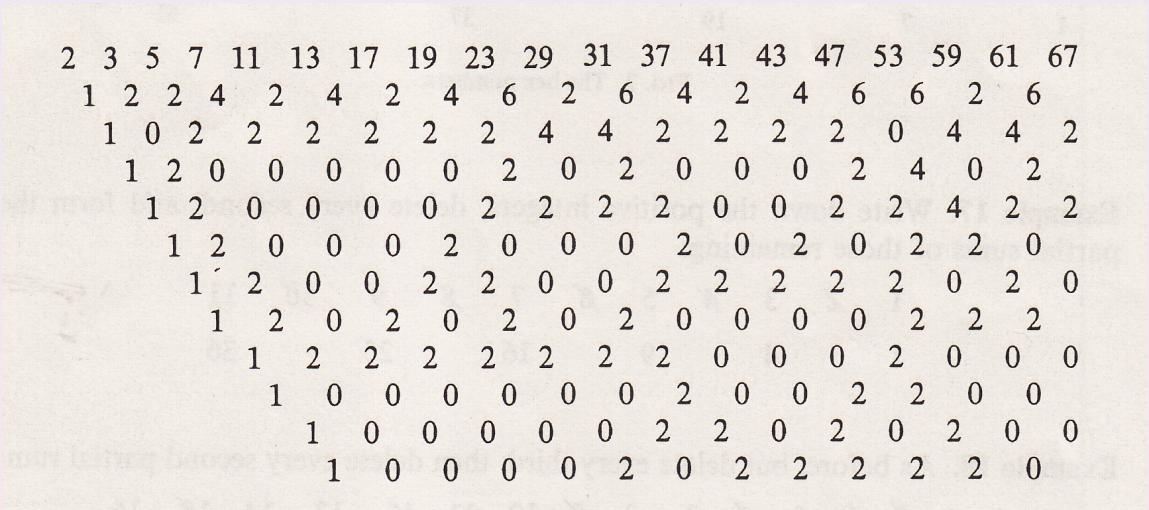


2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	
1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	6	2	6		
1	0	2	2	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	0	4	4	2		
1	2	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	2	4	0	2			
1	2	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0	2	2	4	2	2			
1	2	0	0	0	2	0	0	0	2	0	2	0	2	2	0				
1	2	0	0	2	2	0	0	2	2	2	2	2	0	2	0				
1	2	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	2	2	2					
1	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2	0	0	0					
1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	2	0	0						
1	0	0	0	0	0	2	2	0	2	0	2	0	0						
1	0	0	0	0	2	0	2	2	2	2	2	0							

Potom každý řádek v tabulce bude začínat jedničkou.

Příklad 10 - Gilbreathova domněnka

Vezměme si posloupnost všech prvočísel. Utvořme první diference, pak absolutní hodnoty druhých diferencí, třetích, čtvrtých, ...



2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	
1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	6	2	6		
1	0	2	2	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	0	4	4	2		
1	2	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	2	4	0	2			
1	2	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0	2	2	4	2	2			
1	2	0	0	0	2	0	0	0	2	0	2	0	2	2	0				
1	2	0	0	2	2	0	0	2	2	2	2	2	0	2	0				
1	2	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	2	2	2					
1	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2	0	0	0					
1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	2	0	0						
1	0	0	0	0	0	2	2	0	2	0	2	0	0						
1	0	0	0	0	2	0	2	2	2	2	2	0							

Potom každý řádek v tabulce bude začínat jedničkou.

Nebo ne?

Příklad 10 - řešení

Příklad 10 - řešení

Tuto domněnku vyslovil **N.L. Gilbreath** v roce 1958.

Příklad 10 - řešení

Tuto domněnku vyslovil **N.L. Gilbreath** v roce 1958.

Hned v roce 1959 byla ověřena pro $k < 63419$ a v roce 2009 dokonce pro $k < 10^{10}$ (Adam Odlyzka).

Příklad 10 - řešení

Tuto domněnku vyslovil **N.L. Gilbreath** v roce 1958.

Hned v roce 1959 byla ověřena pro $k < 63419$ a v roce 2009 dokonce pro $k < 10^{10}$ (Adam Odlyzka).

Odpověď **není známa**.

Příklad 10 - řešení

Tuto domněnku vyslovil **N.L. Gilbreath** v roce 1958.

Hned v roce 1959 byla ověřena pro $k < 63419$ a v roce 2009 dokonce pro $k < 10^{10}$ (Adam Odlyzka).

Odpověď **není známa**.

Poznámka. **Hallard Croft** vyslovil myšlenku, že problém vůbec nesouvisí s prvočísly, nýbrž že domněnka platí pro všechny posloupnosti obsahující dvojku a lichá čísla, která neroste moc rychle a nemá moc velké lakuny.

Příklad 11 - problém Emmy Lehmerové

Příklad 11 - problém Emmy Lehmerové

Je známo, že 2^n není nikdy kongruentní **jedničce** $(\mathrm{mod}\, n)$, pokud $n > 1$.

Příklad 11 - problém Emmy Lehmerové

Je známo, že 2^n není nikdy kongruentní **jedničce** $(\mathrm{mod}\, n)$, pokud $n > 1$.

Naproti tomu 2^n je kongruentní **dvojce** $(\mathrm{mod}\, n)$, pokud je n prvočíslem, a občas i pokud není $(341, 561, \dots)$.

Příklad 11 - problém Emmy Lehmerové

Je známo, že 2^n není nikdy kongruentní **jedničce** $(\mathrm{mod}\, n)$, pokud $n > 1$.

Naproti tomu 2^n je kongruentní **dvojce** $(\mathrm{mod}\, n)$, pokud je n prvočíslem, a občas i pokud není $(341, 561, \dots)$.

Bude pro nějaké $n > 1$ číslo 2^n kongruentní **trojce** $(\mathrm{mod}\, n)$?

Příklad 11 - řešení

Příklad 11 - řešení

Ano!

Příklad 11 - řešení

Ano!

Platí totiž toto:

Příklad 11 - řešení

Ano!

Platí totiž toto:

$$2^n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, n) \text{ pro } n = 4700063497.$$

Chvíle oddychu - poesie

(třetí sloka)

In the beginning where chaos
Ends and zero resolves,
They crowd the foreground prodigal as forest
But middle distance thins them,
Far distance to infinity
Yields them rarely as unreturning comets.

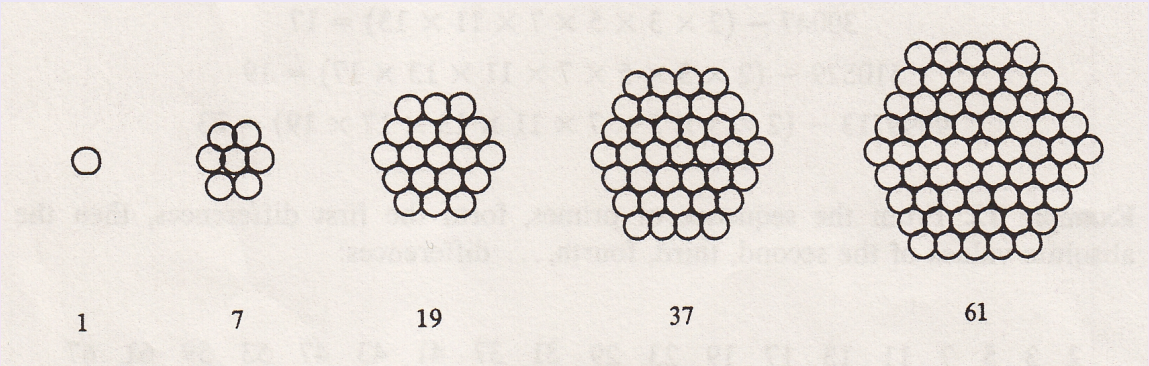
Příklad 12 - včelí čísla

Příklad 12 - včelí čísla

Včelí čísla jsou definována podle následujícího obrázku:

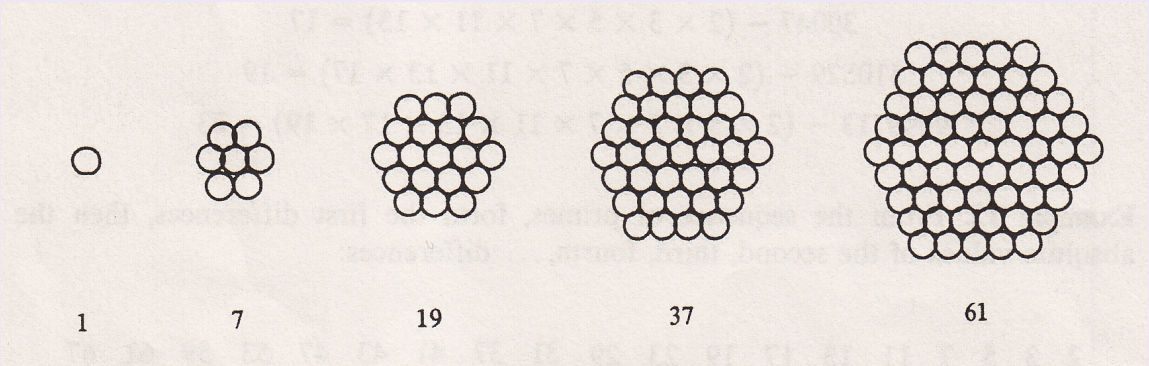
Příklad 12 - včelí čísla

Včelí čísla jsou definována podle následujícího obrázku:



Příklad 12 - včelí čísla

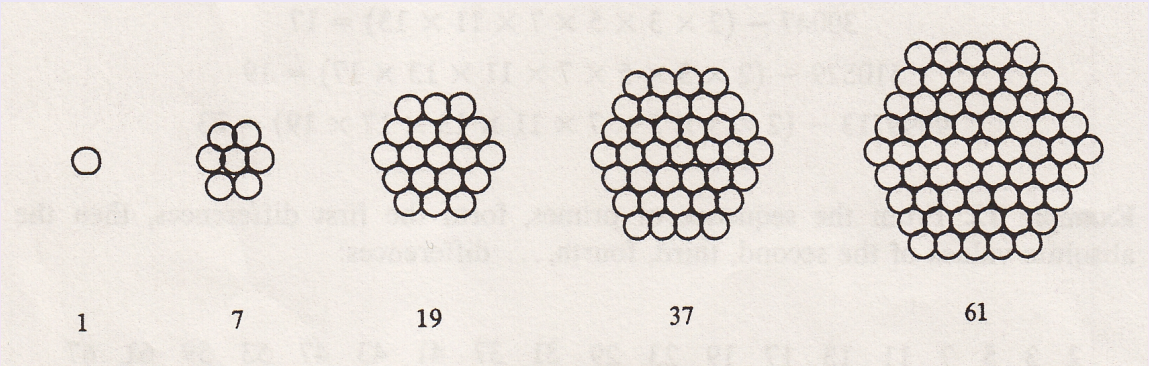
Včelí čísla jsou definována podle následujícího obrázku:



Částečné součty včelích čísel:

Příklad 12 - včelí čísla

Včelí čísla jsou definována podle následujícího obrázku:

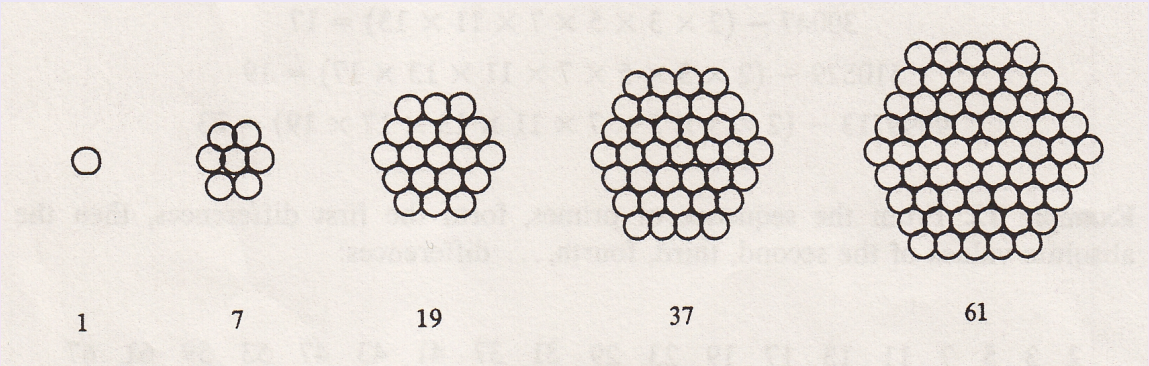


Částečné součty včelích čísel:

$$1, 8, 27, 64, 125$$

Příklad 12 - včelí čísla

Včelí čísla jsou definována podle následujícího obrázku:



Částečné součty včelích čísel:

$$1, 8, 27, 64, 125$$

Budou všechny částečné součty včelích čísel třetími mocninami celých čísel?

Příklad 12 - řešení

Příklad 12 - řešení

Ano!

Příklad 12 - řešení

Ano!

Vzorec pro n-té včelí číslo v_n:

Příklad 12 - řešení

Ano!

Vzorec pro n-té včelí číslo v_n:

$$v_n = 1 + 6 + 12 + \cdots + 6n = 3n^2 + 3n + 1,$$

Příklad 12 - řešení

Ano!

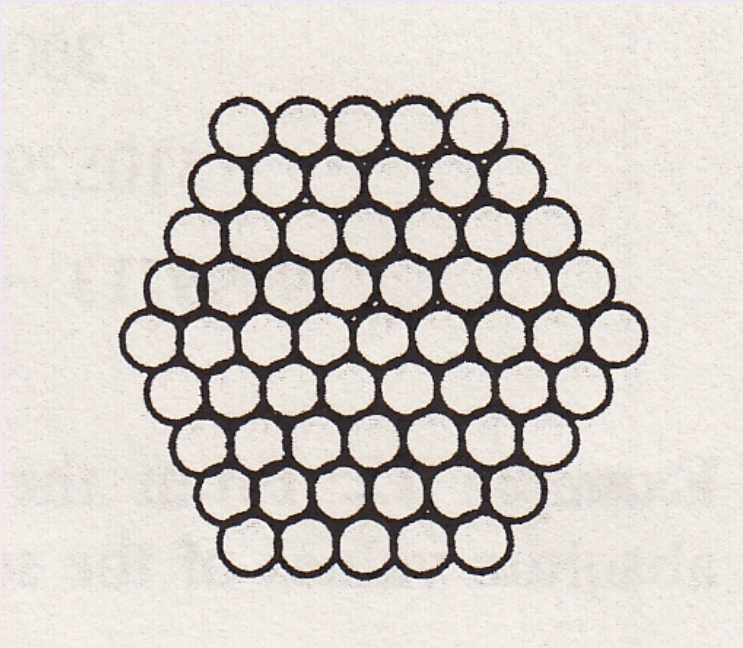
Vzorec pro n-té včelí číslo v_n:

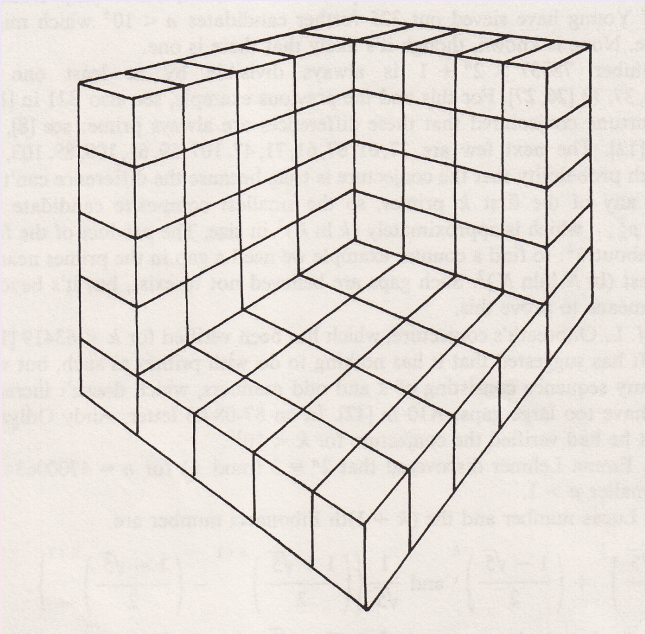
$$v_n = 1 + 6 + 12 + \cdots + 6n = 3n^2 + 3n + 1,$$

takže přidáme-li n^3, dostaneme $(n+1)^3$.

Příklad 12 - ještě jedno estetické řešení

Příklad 12 - ještě jedno estetické řešení





Příklad 13 - Moessnerovy vzory

Příklad 13 - Moessnerovy vzory

Napíšeme si posloupnost přirozených čísel,

Příklad 13 - Moessnerovy vzory

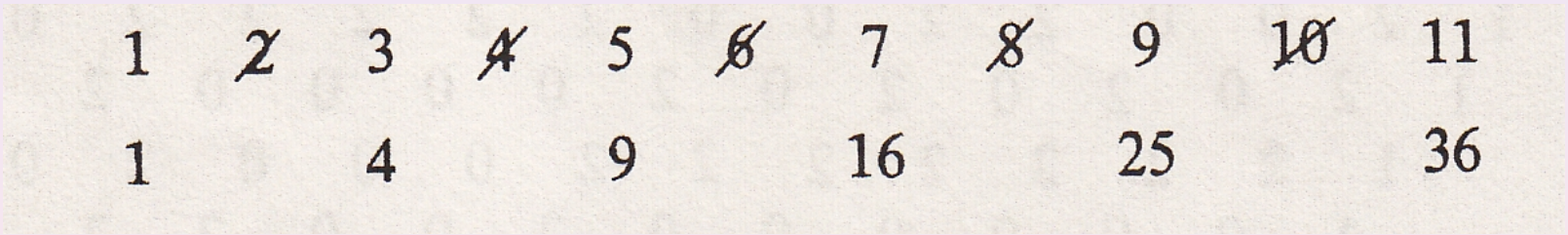
Napíšeme si posloupnost přirozených čísel, škrtneme každé druhé,

Příklad 13 - Moessnerovy vzory

Napíšeme si posloupnost přirozených čísel, škrtneme každé druhé, posčítáme ty, co zbydou.

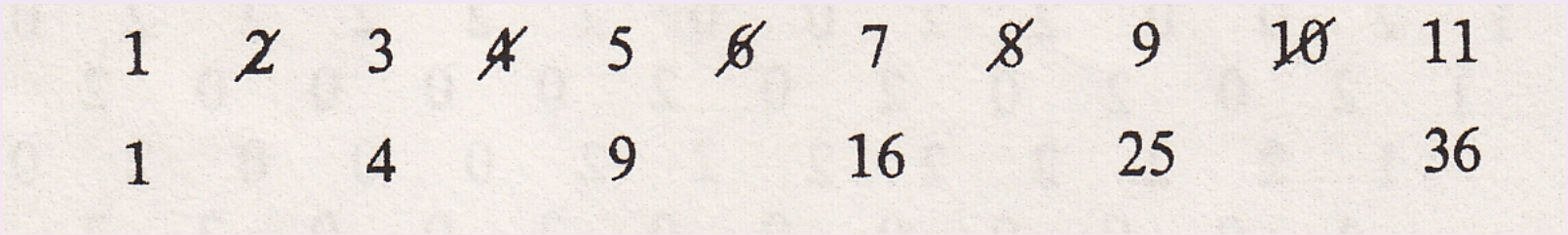
Příklad 13 - Moessnerovy vzory

Napíšeme si posloupnost přirozených čísel, škrtneme každé druhé, posčítáme ty, co zbydou.



Příklad 13 - Moessnerovy vzory

Napíšeme si posloupnost přirozených čísel, škrtneme každé druhé, posčítáme ty, co zbydou.



Vždy dostaneme kvadrát. Nebo snad ne?

Příklad 13 - řešení

Příklad 13 - řešení

Ano!

Příklad 13 - řešení

Ano!

Odvoďte si sami, není to těžké.

Příklad 14 - Moessnerovy vzory podruhé

Příklad 14 - Moessnerovy vzory podruhé

Napíšeme si posloupnost přirozených čísel,

Příklad 14 - Moessnerovy vzory podruhé

Napíšeme si posloupnost přirozených čísel, tentokrát škrtneme každé **třetí**,

Příklad 14 - Moessnerovy vzory podruhé

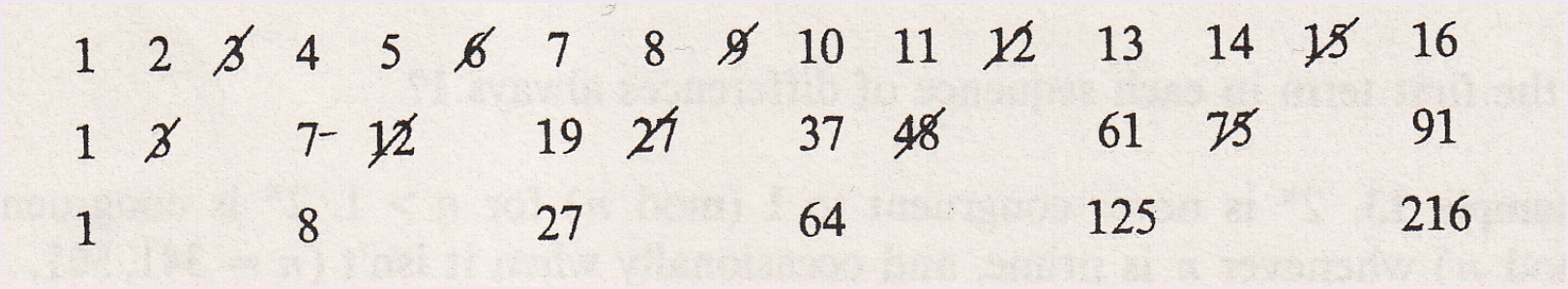
Napíšeme si posloupnost přirozených čísel, tentokrát škrtneme každé **třetí**, v další řádce škrtneme každý druhý částečný součet,

Příklad 14 - Moessnerovy vzory podruhé

Napíšeme si posloupnost přirozených čísel, tentokrát škrtneme každé **třetí**, v další řádce škrtneme každý druhý částečný součet, a sčítáme dál.

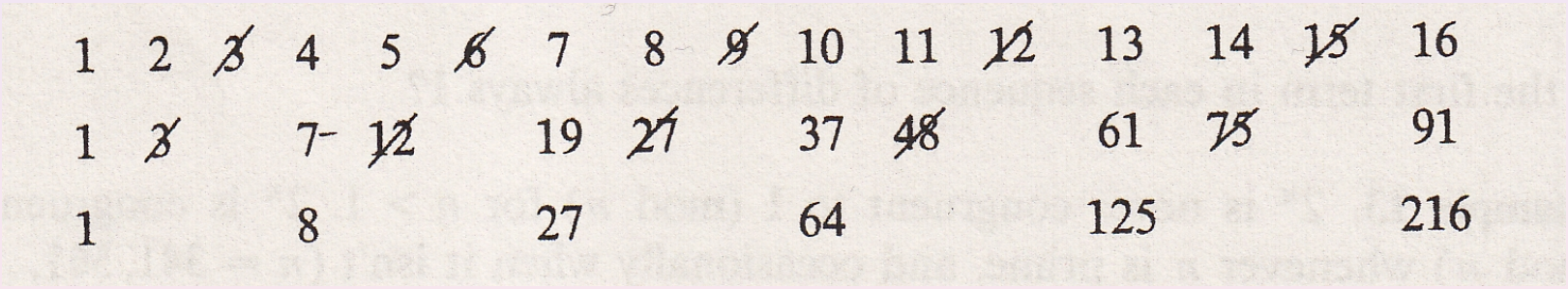
Příklad 14 - Moessnerovy vzory podruhé

Napíšeme si posloupnost přirozených čísel, tentokrát škrtneme každé **třetí**, v další řádce škrtneme každý druhý částečný součet, a sčítáme dál.



Příklad 14 - Moessnerovy vzory podruhé

Napíšeme si posloupnost přirozených čísel, tentokrát škrtneme každé **třetí**, v další řádce škrtneme každý druhý částečný součet, a sčítáme dál.



Takto pokaždé dostaneme třetí mocninu. Nebo snad ne?

Příklad 14 - řešení

Příklad 14 - řešení

Jistěže ano.

Příklad 14 - řešení

Jistěže ano.

Od předchozího se zas až tak moc neliší.

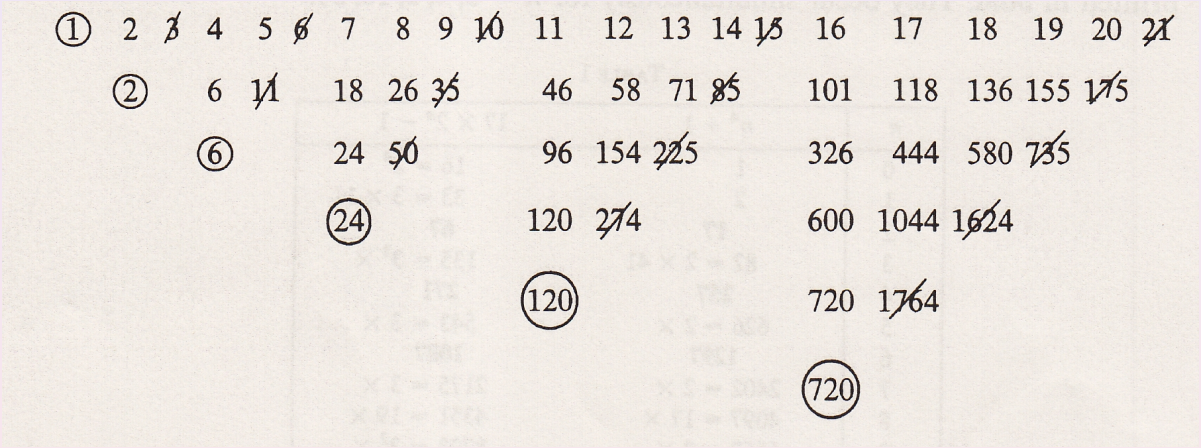
Příklad 15 - Moessnerovy vzory potřetí a naposledy

Příklad 15 - Moessnerovy vzory potřetí a naposledy

Teď zakroužkujeme první, škrtneme druhé za ním, pak třetí atd. Totéž v dalších řádcích.

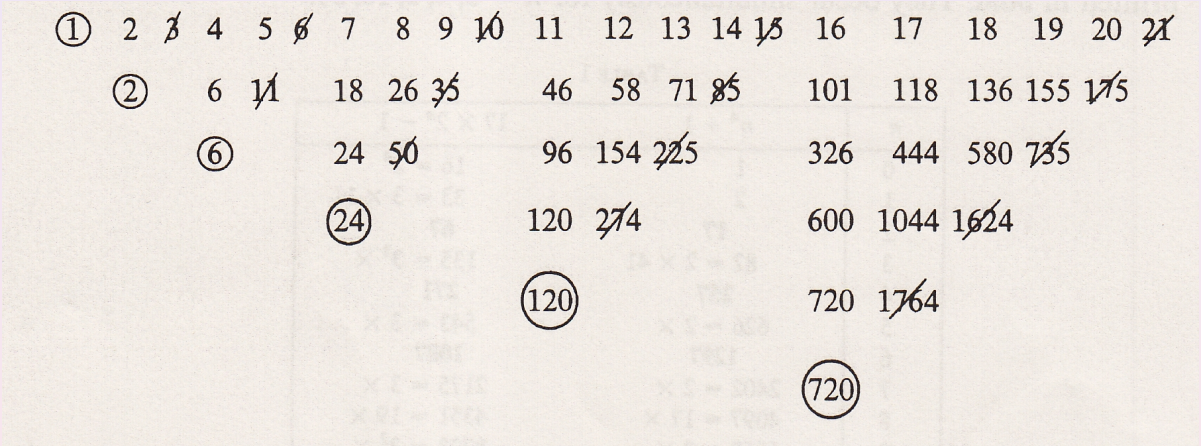
Příklad 15 - Moessnerovy vzory potřetí a naposledy

Teď zakroužkujeme první, škrtneme druhé za ním, pak třetí atd. Totéž v dalších řádcích.



Příklad 15 - Moessnerovy vzory potřetí a naposledy

Teď zakroužkujeme první, škrtneme druhé za ním, pak třetí atd. Totéž v dalších řádcích.



A dostaneme faktoriály. Ano či ne?

Příklad 15 - řešení

Příklad 15 - řešení

Ano.

Příklad 15 - řešení

Ano.

Moessnerova klasika (1952).

Příklad 16 - Lalovy tabulky

Příklad 16 - Lalovy tabulky

M. Lal objevil v roce 1967 následující kuriózní záležitost:

Příklad 16 - Lalovy tabulky

M. Lal objevil v roce 1967 následující kuriózní záležitost:

n	$n^4 + 1$	$17 \times 2^n - 1$
0	1	$16 = 2^4$
1	2	$33 = 3 \times 11$
2	**17**	**67**
3	$82 = 2 \times 41$	$135 = 3^3 \times$
4	**257**	**271**
5	$626 = 2 \times$	$543 = 3 \times$
6	**1297**	**1087**
7	$2402 = 2 \times$	$2175 = 3 \times$
8	$4097 = 17 \times$	$4351 = 19 \times$
9	$6562 = 2 \times$	$8703 = 3^2 \times$
10	$10001 = 73 \times$	$17407 = 13^2 \times$
11	$14642 = 2 \times$	$34815 = 3 \times$
12	$20737 = 89 \times$	$69631 = 179 \times$
13	$28562 = 2 \times$	$139263 = 3 \times$
14	$38417 = 41 \times$	$278527 = 223 \times$
15	$50626 = 2 \times$	$557055 = 3^2 \times$
16	**65537**	**1114111**
17	$83522 = 2 \times$	$2228223 = 3 \times$
18	$104977 = 113 \times$	$4456447 = 59 \times$
19	$130322 = 2 \times$	$8912895 = 3 \times$
20	**160001**	**17825791**
21	$194482 = 2 \times$	$35651583 = 3^4 \times$
22	$234257 = 73 \times$	$71303167 = 13 \times$
23	$279842 = 2 \times$	$142606335 = 3 \times$

Příklad 16 - Lalovy tabulky

M. Lal objevil v roce 1967 následující kuriózní záležitost:

n	n^4+1	$17\times 2^n-1$
0	1	$16=2^4$
1	2	$33=3\times 11$
2	**17**	**67**
3	$82=2\times 41$	$135=3^3\times$
4	**257**	**271**
5	$626=2\times$	$543=3\times$
6	**1297**	**1087**
7	$2402=2\times$	$2175=3\times$
8	$4097=17\times$	$4351=19\times$
9	$6562=2\times$	$8703=3^2\times$
10	$10001=73\times$	$17407=13^2\times$
11	$14642=2\times$	$34815=3\times$
12	$20737=89\times$	$69631=179\times$
13	$28562=2\times$	$139263=3\times$
14	$38417=41\times$	$278527=223\times$
15	$50626=2\times$	$557055=3^2\times$
16	**65537**	**1114111**
17	$83522=2\times$	$2228223=3\times$
18	$104977=113\times$	$4456447=59\times$
19	$130322=2\times$	$8912895=3\times$
20	**160001**	**17825791**
21	$194482=2\times$	$35651583=3^4\times$
22	$234257=73\times$	$71303167=13\times$
23	$279842=2\times$	$142606335=3\times$

Lichá prvočísla jsou vyznačena **tučně**.

Příklad 16 - Lalovy tabulky

M. Lal objevil v roce 1967 následující kuriózní záležitost:

n	n^4+1	$17\times 2^n-1$
0	1	$16=2^4$
1	2	$33=3\times 11$
2	**17**	**67**
3	$82=2\times 41$	$135=3^3\times$
4	**257**	**271**
5	$626=2\times$	$543=3\times$
6	**1297**	**1087**
7	$2402=2\times$	$2175=3\times$
8	$4097=17\times$	$4351=19\times$
9	$6562=2\times$	$8703=3^2\times$
10	$10001=73\times$	$17407=13^2\times$
11	$14642=2\times$	$34815=3\times$
12	$20737=89\times$	$69631=179\times$
13	$28562=2\times$	$139263=3\times$
14	$38417=41\times$	$278527=223\times$
15	$50626=2\times$	$557055=3^2\times$
16	**65537**	**1114111**
17	$83522=2\times$	$2228223=3\times$
18	$104977=113\times$	$4456447=59\times$
19	$130322=2\times$	$8912895=3\times$
20	**160001**	**17825791**
21	$194482=2\times$	$35651583=3^4\times$
22	$234257=73\times$	$71303167=13\times$
23	$279842=2\times$	$142606335=3\times$

Lichá prvočísla jsou vyznačena **tučně**. Vždy se sejdou ve stejném řádku.

Příklad 16 - Lalovy tabulky

M. Lal objevil v roce 1967 následující kuriózní záležitost:

n	n^4+1	$17\times 2^n-1$
0	1	$16=2^4$
1	2	$33=3\times 11$
2	**17**	**67**
3	$82=2\times 41$	$135=3^3\times$
4	**257**	**271**
5	$626=2\times$	$543=3\times$
6	**1297**	**1087**
7	$2402=2\times$	$2175=3\times$
8	$4097=17\times$	$4351=19\times$
9	$6562=2\times$	$8703=3^2\times$
10	$10001=73\times$	$17407=13^2\times$
11	$14642=2\times$	$34815=3\times$
12	$20737=89\times$	$69631=179\times$
13	$28562=2\times$	$139263=3\times$
14	$38417=41\times$	$278527=223\times$
15	$50626=2\times$	$557055=3^2\times$
16	**65537**	**1114111**
17	$83522=2\times$	$2228223=3\times$
18	$104977=113\times$	$4456447=59\times$
19	$130322=2\times$	$8912895=3\times$
20	**160001**	**17825791**
21	$194482=2\times$	$35651583=3^4\times$
22	$234257=73\times$	$71303167=13\times$
23	$279842=2\times$	$142606335=3\times$

Lichá prvočísla jsou vyznačena **tučně**. Vždy se sejdou ve stejném řádku. Nebo nám tu řádí SZMČ?

Příklad 16 - Lalovy tabulky

M. Lal objevil v roce 1967 následující kuriózní záležitost:

n	$n^4 + 1$	$17 \times 2^n - 1$
0	1	$16 = 2^4$
1	2	$33 = 3 \times 11$
2	**17**	**67**
3	$82 = 2 \times 41$	$135 = 3^3 \times$
4	**257**	**271**
5	$626 = 2 \times$	$543 = 3 \times$
6	**1297**	**1087**
7	$2402 = 2 \times$	$2175 = 3 \times$
8	$4097 = 17 \times$	$4351 = 19 \times$
9	$6562 = 2 \times$	$8703 = 3^2 \times$
10	$10001 = 73 \times$	$17407 = 13^2 \times$
11	$14642 = 2 \times$	$34815 = 3 \times$
12	$20737 = 89 \times$	$69631 = 179 \times$
13	$28562 = 2 \times$	$139263 = 3 \times$
14	$38417 = 41 \times$	$278527 = 223 \times$
15	$50626 = 2 \times$	$557055 = 3^2 \times$
16	**65537**	**1114111**
17	$83522 = 2 \times$	$2228223 = 3 \times$
18	$104977 = 113 \times$	$4456447 = 59 \times$
19	$130322 = 2 \times$	$8912895 = 3 \times$
20	**160001**	**17825791**
21	$194482 = 2 \times$	$35651583 = 3^4 \times$
22	$234257 = 73 \times$	$71303167 = 13 \times$
23	$279842 = 2 \times$	$142606335 = 3 \times$

Lichá prvočísla jsou vyznačena **tučně**. Vždy se sejdou ve stejném řádku. Nebo nám tu řádí SZMČ? Rozhodněte sami.

Příklad 16 - řešení

Příklad 16 - řešení

Řádí.

Příklad 16 - řešení

Řádí.

Je to naprostá shoda okolností, ale zkazí se až pro $n = 24$, kdy

$$n^4 + 1 = 331777 \text{ je prvočíslo,}$$

Příklad 16 - řešení

Řádí.

Je to naprostá shoda okolností, ale zkazí se až pro $n = 24$, kdy

$$n^4 + 1 = 331777 \text{ je prvočíslo,}$$

ale

$$17 \times 2^n - 1 = 285212671 = 149 \times 1914179.$$

Příklad 17 - Lalovy tabulky - druhý díl

Příklad 17 - Lalovy tabulky - druhý díl

Na Lalovu práci navázali **H.C. Williams, C.R. Zarnke (1968) a Hans Riesel (1969)**:

Příklad 17 - Lalovy tabulky - druhý díl

Na Lalovu práci navázali **H.C. Williams, C.R. Zarnke (1968) a Hans Riesel (1969)**:

n	$21 \times 2^n - 1$	$7 \times 4^n + 1$
0	$20 = 2^2 \times 5$	$8 = 2^3$
1	**41**	**29**
2	**83**	**113**
3	**167**	**449**
4	$335 = 5 \times$	$1793 = 11 \times$
5	$671 = 11 \times$	$7169 = 67 \times$
6	$1343 = 17 \times$	$28673 = 53 \times$
7	**2687**	**114689**
8	$5375 = 5^3 \times$	$458753 = 79 \times$
9	$10751 = 13 \times$	$1835009 = 11 \times$
10	**21503**	**7340033**
11	$43007 = 29 \times$	$29360129 = 37 \times$
12	$86015 = 5 \times$	$117440513 = 3907 \times$
13	**172031**	**469762049**
14	$344063 = 17 \times$	$1879048193 = 11 \times$
15	$688127 = 11^4 \times$	$7516192769 = 29^2 \times$
16	$1376255 = 5 \times$	$30064771073 = 113 \times$
17	$2752511 = 19 \times$	$120259084289 = 379 \times$

Příklad 17 - Lalovy tabulky - druhý díl

Na Lalovu práci navázali **H.C. Williams, C.R. Zarnke (1968) a Hans Riesel (1969)**:

n	$21 \times 2^n - 1$	$7 \times 4^n + 1$
0	$20 = 2^2 \times 5$	$8 = 2^3$
1	**41**	**29**
2	**83**	**113**
3	**167**	**449**
4	$335 = 5 \times$	$1793 = 11 \times$
5	$671 = 11 \times$	$7169 = 67 \times$
6	$1343 = 17 \times$	$28673 = 53 \times$
7	**2687**	**114689**
8	$5375 = 5^3 \times$	$458753 = 79 \times$
9	$10751 = 13 \times$	$1835009 = 11 \times$
10	**21503**	**7340033**
11	$43007 = 29 \times$	$29360129 = 37 \times$
12	$86015 = 5 \times$	$117440513 = 3907 \times$
13	**172031**	**469762049**
14	$344063 = 17 \times$	$1879048193 = 11 \times$
15	$688127 = 11^4 \times$	$7516192769 = 29^2 \times$
16	$1376255 = 5 \times$	$30064771073 = 113 \times$
17	$2752511 = 19 \times$	$120259084289 = 379 \times$

Prvočísla se opět scházejí ve stejných řádcích.

Příklad 17 - Lalovy tabulky - druhý díl

Na Lalovu práci navázali **H.C. Williams, C.R. Zarnke (1968) a Hans Riesel (1969)**:

n	$21 \times 2^n - 1$	$7 \times 4^n + 1$
0	$20 = 2^2 \times 5$	$8 = 2^3$
1	**41**	**29**
2	**83**	**113**
3	**167**	**449**
4	$335 = 5 \times$	$1793 = 11 \times$
5	$671 = 11 \times$	$7169 = 67 \times$
6	$1343 = 17 \times$	$28673 = 53 \times$
7	**2687**	**114689**
8	$5375 = 5^3 \times$	$458753 = 79 \times$
9	$10751 = 13 \times$	$1835009 = 11 \times$
10	**21503**	**7340033**
11	$43007 = 29 \times$	$29360129 = 37 \times$
12	$86015 = 5 \times$	$117440513 = 3907 \times$
13	**172031**	**469762049**
14	$344063 = 17 \times$	$1879048193 = 11 \times$
15	$688127 = 11^4 \times$	$7516192769 = 29^2 \times$
16	$1376255 = 5 \times$	$30064771073 = 113 \times$
17	$2752511 = 19 \times$	$120259084289 = 379 \times$

Prvočísla se opět scházejí ve stejných řádcích. Platí to pro $n = 1, 2, 3, 7, 10, 13$.

Příklad 17 - Lalovy tabulky - druhý díl

Na Lalovu práci navázali **H.C. Williams, C.R. Zarnke (1968) a Hans Riesel (1969)**:

n	$21 \times 2^n - 1$	$7 \times 4^n + 1$
0	$20 = 2^2 \times 5$	$8 = 2^3$
1	**41**	**29**
2	**83**	**113**
3	**167**	**449**
4	$335 = 5 \times$	$1793 = 11 \times$
5	$671 = 11 \times$	$7169 = 67 \times$
6	$1343 = 17 \times$	$28673 = 53 \times$
7	**2687**	**114689**
8	$5375 = 5^3 \times$	$458753 = 79 \times$
9	$10751 = 13 \times$	$1835009 = 11 \times$
10	**21503**	**7340033**
11	$43007 = 29 \times$	$29360129 = 37 \times$
12	$86015 = 5 \times$	$117440513 = 3907 \times$
13	**172031**	**469762049**
14	$344063 = 17 \times$	$1879048193 = 11 \times$
15	$688127 = 11^4 \times$	$7516192769 = 29^2 \times$
16	$1376255 = 5 \times$	$30064771073 = 113 \times$
17	$2752511 = 19 \times$	$120259084289 = 379 \times$

Prvočísla se opět scházejí ve stejných řádcích. Platí to pro $n = 1, 2, 3, 7, 10, 13$. Platí to i dál?

Příklad 17 - řešení

Příklad 17 - řešení

Ne.

Příklad 17 - řešení

Ne.

Je to opět jen náhoda. Pravidlo je porušeno pro $n = 18$, kdy

$$7 \times 4^n + 1 = 481036337153 = 166609 \times 2887217,$$

Příklad 17 - řešení

Ne.

Je to opět jen náhoda. Pravidlo je porušeno pro $n = 18$, kdy

$$7 \times 4^n + 1 = 481036337153 = 166609 \times 2887217,$$

avšak

$$21 \times 2^n - 1 = 5505023 \text{ je prvočíslo.}$$

Chvíle oddychu - poesie

(čtvrtá sloka)

O prime improbable numbers,
Long may formula-hunters
Steam in abstraction, waste of skeleton patience:
Stay non-conformist, nuisance.
Phenomena irreducible
To system, sequence, pattern of explanation.

Příklad 18 - pro změnu něco (téměř) z analýzy

Příklad 18 - pro změnu něco (téměř) z analýzy

Posuďme následující posloupnost:

Příklad 18 - pro změnu něco (téměř) z analýzy

Posuďme následující posloupnost:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \left(1 + x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)/(n+1) \qquad (n \geqslant 0).$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
x_n	1	2	3	5	10	28	154	3520	1551880	267593772160	...

Příklad 18 - pro změnu něco (téměř) z analýzy

Posuďme následující posloupnost:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \left(1 + x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)/(n+1) \qquad (n \geqslant 0).$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
x_n	1	2	3	5	10	28	154	3520	1551880	267593772160	...

Bude x_n vždy celé číslo?

Příklad 18 - řešení

Příklad 18 - řešení

Jde o **posloupnost Fritze Göbela**.

Příklad 18 - řešení

Jde o **posloupnost Fritze Göbela**. Pro počítání je lepší rekursivní formule

$$(n+1)x_{n+1} = x_n(x_n + n)$$

Příklad 18 - řešení

Jde o **posloupnost Fritze Göbela**. Pro počítání je lepší rekursivní formule

$$(n+1)x_{n+1} = x_n(x_n + n)$$

Pracujeme-li modulo 43, dostaneme

n	$=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
x_n	$\equiv 1$	2	3	5	10	28	25	37	10	20	15	38	19	42	36	34	2	35	39	31	13	2
$n=22$		23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	
$x_n \equiv 6$		26	28	29	4	14	42	5	20	17	4	20	16	29	42	13	42	20	8	23	33	

Příklad 18 - řešení

Jde o **posloupnost Fritze Göbela**. Pro počítání je lepší rekursivní formule

$$(n+1)x_{n+1} = x_n(x_n + n)$$

Pracujeme-li modulo 43, dostaneme

n	$=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
x_n	$\equiv 1$	2	3	5	10	28	25	37	10	20	15	38	19	42	36	34	2	35	39	31	13	2
$n=22$		23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	
$x_n \equiv 6$		26	28	29	4	14	42	5	20	17	4	20	16	29	42	13	42	20	8	23	33	

a formuli

$$x_{42}(x_{42} + 42) = -10(-10 + 42) = -320,$$

Příklad 18 - řešení

Jde o **posloupnost Fritze Göbela**. Pro počítání je lepší rekursivní formule

$$(n+1)x_{n+1} = x_n(x_n + n)$$

Pracujeme-li modulo 43, dostaneme

n	$=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
x_n	$\equiv 1$	2	3	5	10	28	25	37	10	20	15	38	19	42	36	34	2	35	39	31	13	2
$n=22$		23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	
$x_n \equiv 6$		26	28	29	4	14	42	5	20	17	4	20	16	29	42	13	42	20	8	23	33	

a formuli

$$x_{42}(x_{42} + 42) = -10(-10 + 42) = -320,$$

což není dělitelné 43.

Příklad 18 - řešení

Jde o **posloupnost Fritze Göbela**. Pro počítání je lepší rekursivní formule

$$(n+1)x_{n+1} = x_n(x_n + n)$$

Pracujeme-li modulo 43, dostaneme

n	$=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
x_n	$\equiv 1$	2	3	5	10	28	25	37	10	20	15	38	19	42	36	34	2	35	39	31	13	2
$n=22$		23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	
$x_n \equiv 6$		26	28	29	4	14	42	5	20	17	4	20	16	29	42	13	42	20	8	23	33	

a formuli

$$x_{42}(x_{42} + 42) = -10(-10 + 42) = -320,$$

což není dělitelné 43. Tedy x_{43} **není celé**.

Příklad 18 - řešení

Jde o **posloupnost Fritze Göbela**. Pro počítání je lepší rekursivní formule

$$(n+1)x_{n+1} = x_n(x_n + n)$$

Pracujeme-li modulo 43, dostaneme

n	$=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
x_n	$\equiv 1$	2	3	5	10	28	25	37	10	20	15	38	19	42	36	34	2	35	39	31	13	2
$n=22$		23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	
$x_n \equiv 6$		26	28	29	4	14	42	5	20	17	4	20	16	29	42	13	42	20	8	23	33	

a formuli

$$x_{42}(x_{42} + 42) = -10(-10 + 42) = -320,$$

což není dělitelné 43. Tedy x_{43} **není celé**. Všechna čísla $x_1, \ldots, x_{42}$ jsou ovšem celá.

Chvilka oddychu - definice (kravina)

Chvilka oddychu - definice (kravina)



Chvilka oddychu - definice (kravina)



Číslo 13 budeme odteď nazývat **přiozzeným číslem**.

Příklad 19 - čtvercotěsná čísla

Příklad 19 - čtvercotěsná čísla

Číslo se nazývá **čtvercotěšné**, jestliže není dělitelné žádným kvadrátem.

Příklad 19 - čtvercotěsná čísla

Číslo se nazývá **čtvercotěšné**, jestliže není dělitelné žádným kvadrátem. V následujícím Pascalově trojúhelníku jsme zvýraznili všechna čísla, která **nejsou** čtvercotěsná:

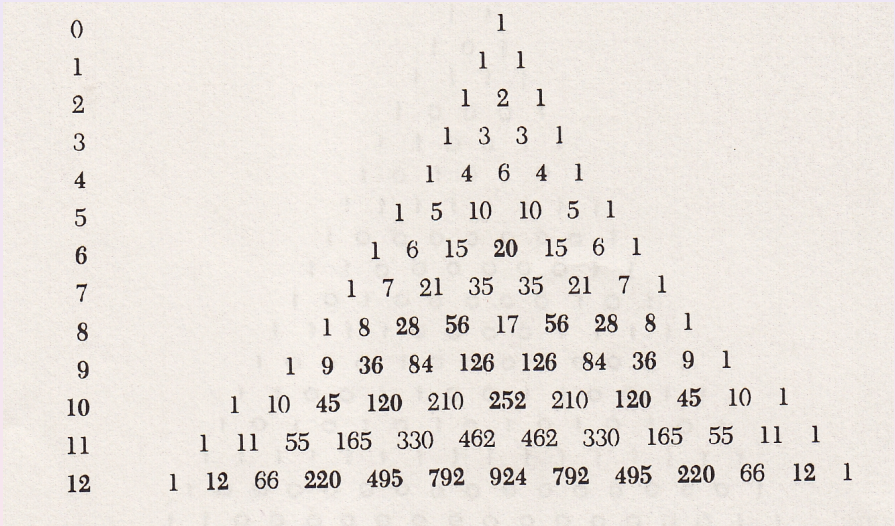
Příklad 19 - čtvercotěsná čísla

Číslo se nazývá **čtvercotěšné**, jestliže není dělitelné žádným kvadrátem. V následujícím Pascalově trojúhelníku jsme zvýraznili všechna čísla, která **nejsou** čtvercotěsná:

0						1						
1					1		1					
2				1		2		1				
3			1		3		3		1			
4		1		4		6		4		1		
5	1		5		10		10		5		1	
6		1		6		15		**20**		15		6		1
7			1		7		21		35		35		21		7		1	
8		1		8		**28**		**56**		17		**56**		**28**		8		1
9	1		9		**36**		84		**126**		**126**		84		**36**		9		1
10		1		10		**45**		**120**		210		**252**		210		**120**		**45**		10		1
11	1		11		55		165		330		462		462		330		165		55		11		1
12		1		**12**		66		**220**		495		792		924		792		495		**220**		66		**12**		1

Příklad 19 - čtvercotěsná čísla

Číslo se nazývá **čtvercotěšné**, jestliže není dělitelné žádným kvadrátem. V následujícím Pascalově trojúhelníku jsme zvýraznili všechna čísla, která **nejsou** čtvercotěsná:

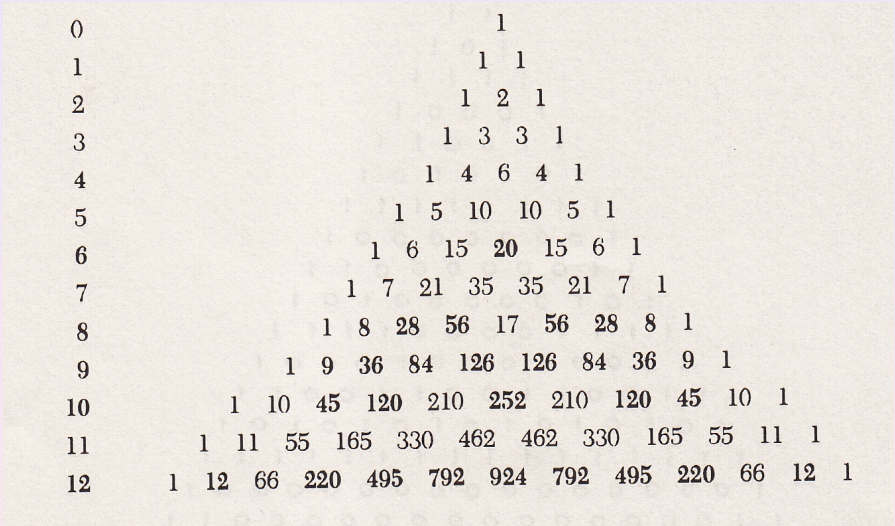


Pořadová čísla řádků obsahujících čísla,která **nejsou** čtvercotěsná, tvoří posloupnost

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots$$

Příklad 19 - čtvercotěsná čísla

Číslo se nazývá **čtvercotěšné**, jestliže není dělitelné žádným kvadrátem. V následujícím Pascalově trojúhelníku jsme zvýraznili všechna čísla, která **nejsou** čtvercotěsná:



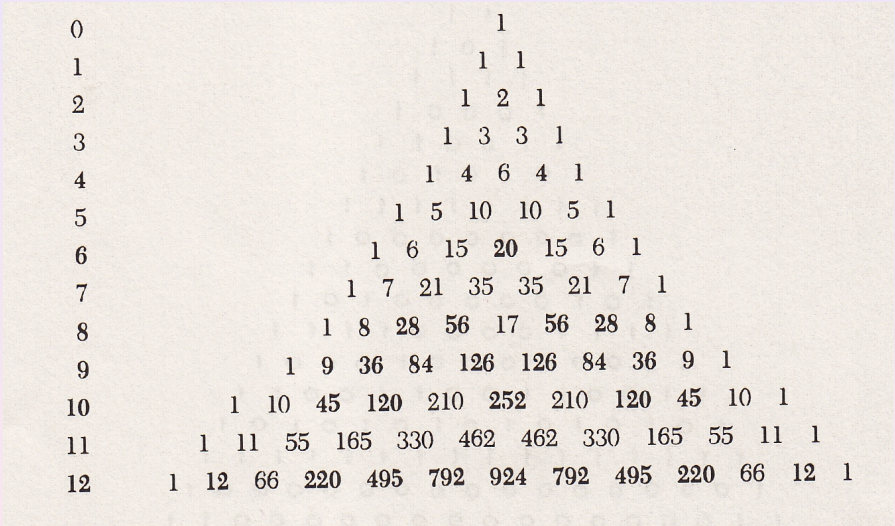
Pořadová čísla řádků obsahujících čísla,která **nejsou** čtvercotěsná, tvoří posloupnost

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots$$

Připomíná Vám tato posloupnost něco?

Příklad 19 - čtvercotěsná čísla

Číslo se nazývá **čtvercotěšné**, jestliže není dělitelné žádným kvadrátem. V následujícím Pascalově trojúhelníku jsme zvýraznili všechna čísla, která **nejsou** čtvercotěsná:



Pořadová čísla řádků obsahujících čísla,která **nejsou** čtvercotěsná, tvoří posloupnost

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots$$

Připomíná Vám tato posloupnost něco? A bude to tak i dál?

Příklad 19 - řešení

Příklad 19 - řešení

Ne.

Příklad 19 - řešení

Ne.

Posloupnost odhalil **Gerry Myerson**.

Příklad 19 - řešení

Ne.

Posloupnost odhalil **Gerry Myerson**.

Pravidlo se ale zkazí na třináctém řádku, a to hned dvakrát, neboť $\binom{13}{5}$ je dělitelné devíti a $\binom{13}{6}$ je dělitelné čtyřmi.

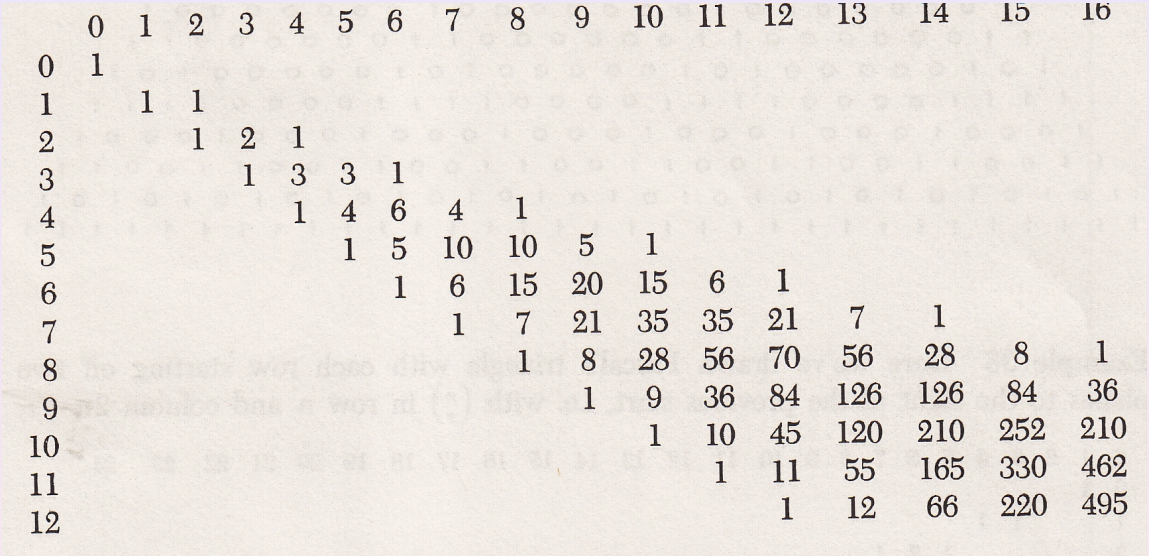
Příklad 20 - rozšláplý Pascal

Příklad 20 - rozšláplý Pascal

Pascalův trojúhelník jsme tentokrát trochu rozšlápli:

Příklad 20 - rozšláplý Pascal

Pascalův trojúhelník jsme tentokrát trochu rozšlápli:



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1																
1		1	1														
2			1	2	1												
3				1	3	3	1										
4					1	4	6	4	1								
5						1	5	10	10	5	1						
6							1	6	15	20	15	6	1				
7								1	7	21	35	35	21	7	1		
8									1	8	28	56	70	56	28	8	1
9										1	9	36	84	126	126	84	36
10											1	10	45	120	210	252	210
11												1	11	55	165	330	462
12													1	12	66	220	495

Příklad 20 - rozšláplý Pascal

Pascalův trojúhelník jsme tentokrát trochu rozšlápli:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1																
1		1	1														
2			1	2	1												
3				1	3	3	1										
4					1	4	6	4	1								
5						1	5	10	10	5	1						
6							1	6	15	20	15	6	1				
7								1	7	21	35	35	21	7	1		
8									1	8	28	56	70	56	28	8	1
9										1	9	36	84	126	126	84	36
10											1	10	45	120	210	252	210
11												1	11	55	165	330	462
12													1	12	66	220	495

Sloupcové součty tvoří posloupnost

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

To už jste někde viděli, že?

Příklad 20 - rozšláplý Pascal

Pascalův trojúhelník jsme tentokrát trochu rozšlápli:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1																
1		1	1														
2			1	2	1												
3				1	3	3	1										
4					1	4	6	4	1								
5						1	5	10	10	5	1						
6							1	6	15	20	15	6	1				
7								1	7	21	35	35	21	7	1		
8									1	8	28	56	70	56	28	8	1
9										1	9	36	84	126	126	84	36
10											1	10	45	120	210	252	210
11												1	11	55	165	330	462
12													1	12	66	220	495

Sloupcové součty tvoří posloupnost

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

To už jste někde viděli, že? Platí to obecně?

Příklad 20 - řešení

Příklad 20 - řešení

Ano!

Příklad 20 - řešení

Ano!

Nic na tom není, chce to jen sčítání.

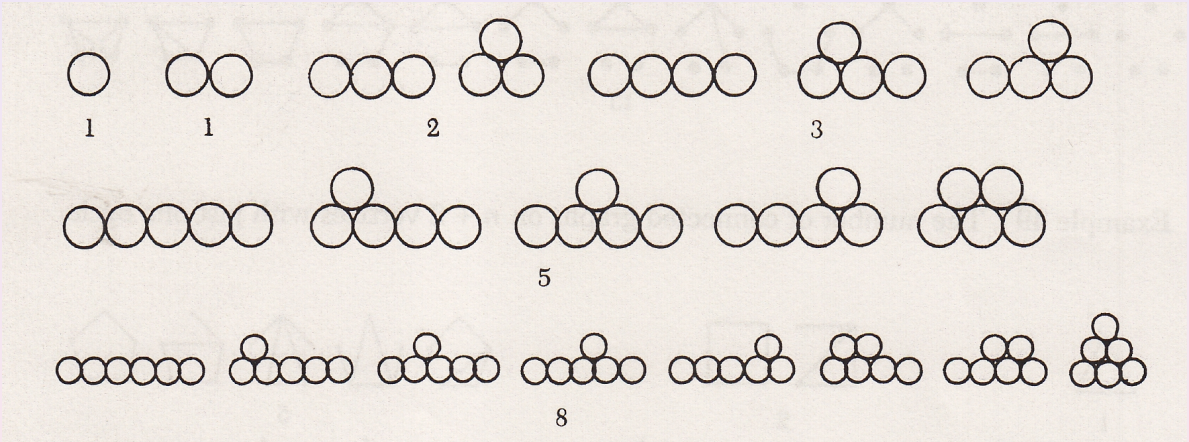
Příklad 21 - mamon pleskot

Příklad 21 - mamon pleskot

Kolika způsoby si umíte uspořádat na stole mamon?

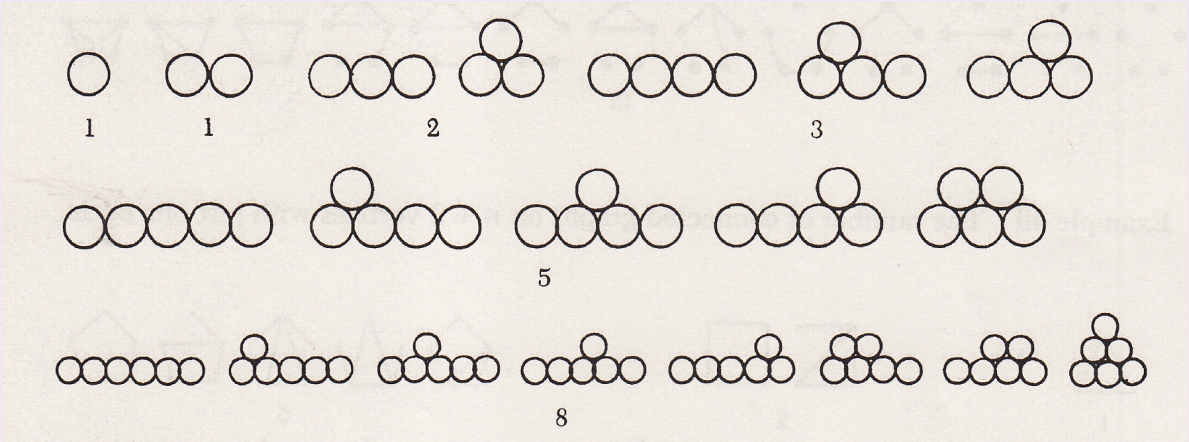
Příklad 21 - mamon pleskot

Kolika způsoby si umíte uspořádat na stole mamon?



Příklad 21 - mamon pleskot

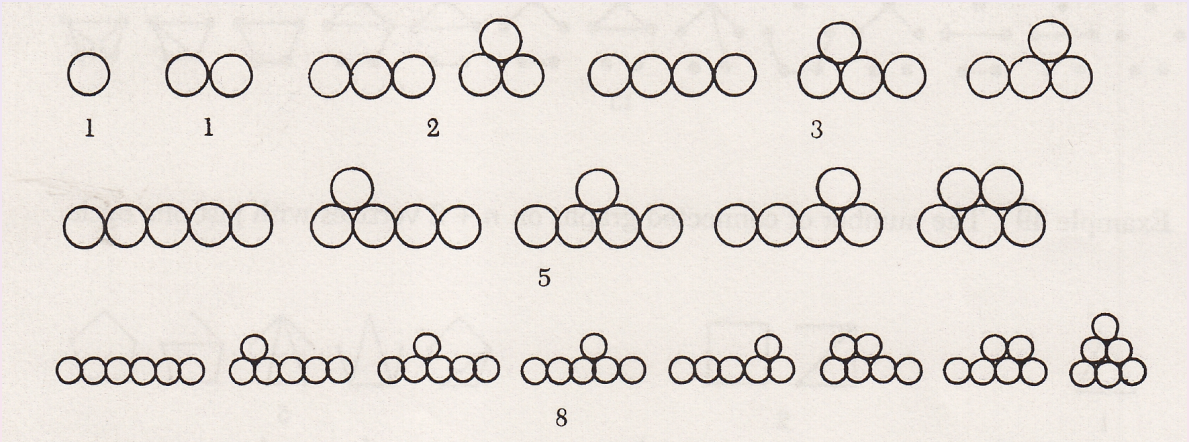
Kolika způsoby si umíte uspořádat na stole mamon?



Má to něco společného s králíky?

Příklad 21 - mamon pleskot

Kolika způsoby si umíte uspořádat na stole mamon?



Má to něco společného s králíky? A platí to obecně?

Příklad 21 - řešení

Příklad 21 - řešení

Ne.

Příklad 21 - řešení

Ne.

Ti bohatší, kteří mají alespoň $7, 8, 9, \ldots$ zlaťáků, snadno odhalí, že pravidlo obecně **neplatí**.

Příklad 21 - řešení

Ne.

Ti bohatší, kteří mají alespoň $7, 8, 9, \ldots$ zlaťáků, snadno odhalí, že pravidlo obecně **neplatí**.

Posloupnost pak totiž pokračuje $12, 18, 26, \ldots$, což se od očekávaného $13, 21, 34, \ldots$ přeci jen trochu liší.

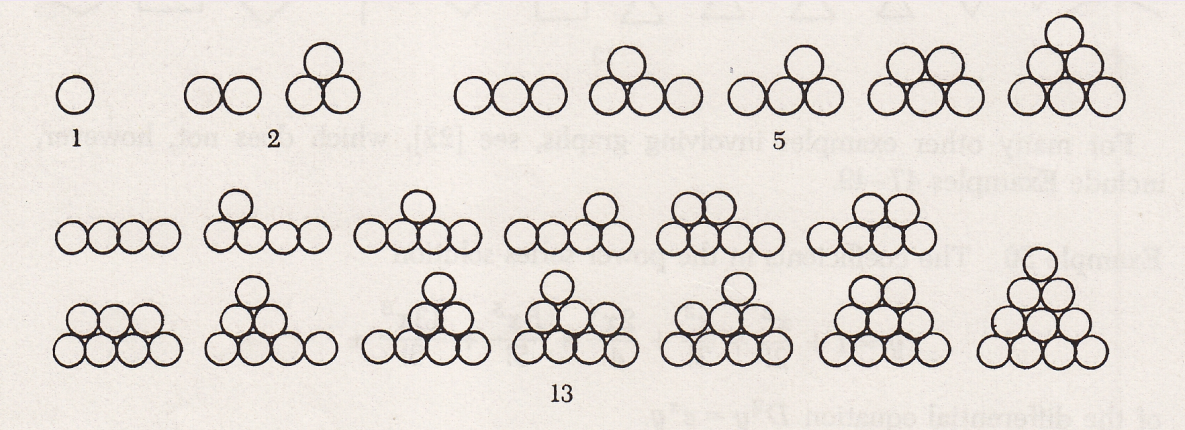
Příklad 22 - ani sem mě nikdo Nezval

Příklad 22 - ani sem mě nikdo Nezval

A kolika způsoby si umíte uspořádat na stole mamon, máte-li předepsán počet mincí ve spodním řádku?

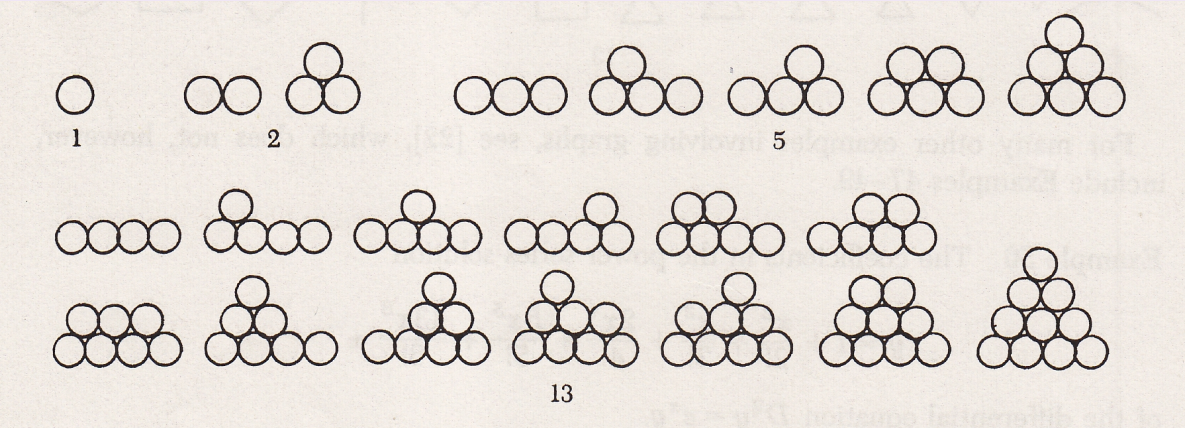
Příklad 22 - ani sem mě nikdo Nezval

A kolika způsoby si umíte uspořádat na stole mamon, máte-li předepsán počet mincí ve spodním řádku?



Příklad 22 - ani sem mě nikdo Nezval

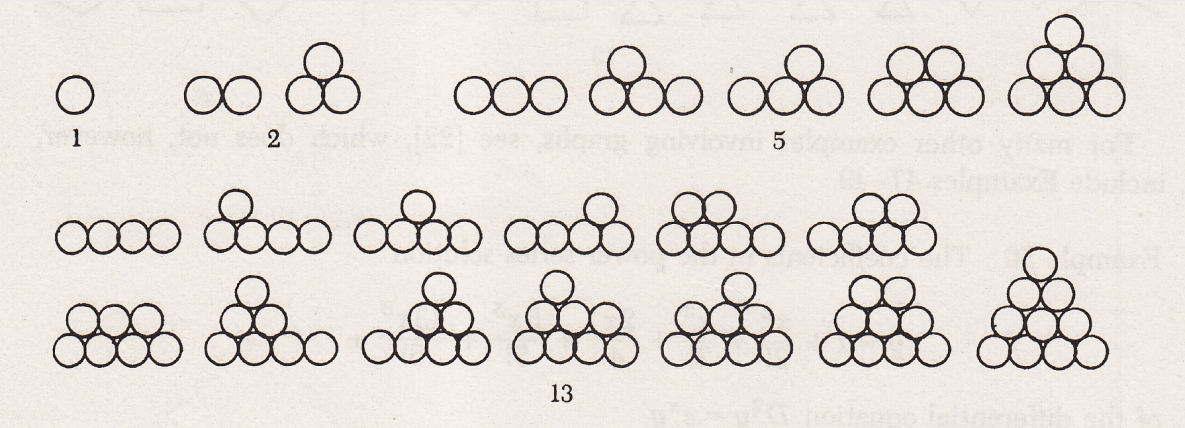
A kolika způsoby si umíte uspořádat na stole mamon, máte-li předepsán počet mincí ve spodním řádku?



Každé druhé Fibonacciovo číslo?

Příklad 22 - ani sem mě nikdo Nezval

A kolika způsoby si umíte uspořádat na stole mamon, máte-li předepsán počet mincí ve spodním řádku?



Každé druhé Fibonacciovo číslo? Že by?

Příklad 22 - řešení

Příklad 22 - řešení

Budete se divit, ale na rozdíl od předchozího příkladu toto pravidlo **platí**.

Příklad 22 - řešení

Budete se divit, ale na rozdíl od předchozího příkladu toto pravidlo **platí**.

(Asi) poprvé si toho všiml **Neil J.A. Sloane** v roce 1973.

Příklad 23 - rozklady

Příklad 23 - rozklady

Ke každému celočíselnému exponentu n najdeme přirozené číslo $m > 1$, které se rovná cifernému součtu čísla m^n.

Příklad 23 - rozklady

Ke každému celočíselnému exponentu n najdeme přirozené číslo $m > 1$, které se rovná cifernému součtu čísla m^n.

Tedy, alespoň to tak vypadá, pohleďte:

Příklad 23 - rozklady

Ke každému celočíselnému exponentu n najdeme přirozené číslo $m > 1$, které se rovná ciferném součtu čísla m^n.

Tedy, alespoň to tak vypadá, pohleďte:

$$2^1, 9^2 = 81, 8^3 = 512, 7^4 = 2401, 28^5 = 17210368, 18^6 = 34012224, 18^7 = 61222032,$$
$$46^8, 54^9, 82^{10}, 98^{11}, 108^{12}, 20^{13}, 91^{14}, 107^{15}, 133^{16}, 80^{17}, 172^{18}, 80^{19}, 90^{20}, 90^{21}, \ldots .$$

Příklad 23 - rozklady

Ke každému celočíselnému exponentu n najdeme přirozené číslo $m > 1$, které se rovná ciferném součtu čísla m^n.

Tedy, alespoň to tak vypadá, pohleďte:

$$2^1, 9^2 = 81, 8^3 = 512, 7^4 = 2401, 28^5 = 17210368, 18^6 = 34012224, 18^7 = 61222032,$$
$$46^8, 54^9, 82^{10}, 98^{11}, 108^{12}, 20^{13}, 91^{14}, 107^{15}, 133^{16}, 80^{17}, 172^{18}, 80^{19}, 90^{20}, 90^{21}, \ldots .$$

Je tomu tak vždy?

Příklad 23 - řešení

Příklad 23 - řešení

Není.

Příklad 23 - řešení

Není.

Norman Megill dokázal, že hypothesa platí pro všechna $n \leq 104$, ale zkazí se pro $n = 105$.

Příklad 24 - Nivenova čísla

Příklad 24 - Nivenova čísla

Nivenovým číslem nazýváme přirozené číslo, které je dělitelné svým ciferným součtem, tedy například 21 nebo 133.

Příklad 24 - Nivenova čísla

Nivenovým číslem nazýváme přirozené číslo, které je dělitelné svým ciferným součtem, tedy například 21 nebo 133.

Je $n!$ Nivenovým číslem pro každé n?

Příklad 24 - Nivenova čísla

Nivenovým číslem nazýváme přirozené číslo, které je dělitelné svým ciferným součtem, tedy například 21 nebo 133.

Je $n!$ Nivenovým číslem pro každé n?

(Pro ilustraci si to prověřte pro prvních řekněme 400 čísel.)

Příklad 24 - řešení

Příklad 24 - řešení

Tento problém formuloval **Sam Yates**.

Příklad 24 - řešení

Tento problém formuloval **Sam Yates**.

Carl Pomerance vyslovil domněnku, že protipříklad se najde kolem $n = 500$.

Příklad 24 - řešení

Tento problém formuloval **Sam Yates**.

Carl Pomerance vyslovil domněnku, že protipříklad se najde kolem $n = 500$.

Yates později vskutku prokázal, že 432! **není** Nivenovým číslem, neboť jeho ciferný součet je roven $3^2 \times 433$, přičemž 433 je prvočíslo.

Příklad 24 - řešení

Tento problém formuloval **Sam Yates**.

Carl Pomerance vyslovil domněnku, že protipříklad se najde kolem $n = 500$.

Yates později vskutku prokázal, že 432! **není** Nivenovým číslem, neboť jeho ciferný součet je roven $3^2 \times 433$, přičemž 433 je prvočíslo.

Pravidlo **neplatí**.

Příklad 25 - zas trochu analýzy

Příklad 25 - zas trochu analýzy

Posuďte následující posloupnost *reálných* čísel z intervalu $(0, 1)$:

Příklad 25 - zas trochu analýzy

Posuďte následující posloupnost *reálných* čísel z intervalu $(0, 1)$:

$$0,71;\ 0,009;\ 0,42;\ 0,85;$$
$$0,27;\ 0,54;\ 0,925;\ 0,17;$$
$$0,62;\ 0,355;\ 0,78;\ 0,03;\ 0,48;\ \ldots$$

Příklad 25 - zas trochu analýzy

Posuďte následující posloupnost *reálných* čísel z intervalu $(0, 1)$:

$$0,71;\ 0,009;\ 0,42;\ 0,85;$$
$$0,27;\ 0,54;\ 0,925;\ 0,17;$$
$$0,62;\ 0,355;\ 0,78;\ 0,03;\ 0,48;\ \ldots$$

Nemusíte mi věřit (můžete si to koneckonců spočítat), ale tato posloupnost má následující vlastnost:

Příklad 25 - zas trochu analýzy

Posuďte následující posloupnost *reálných* čísel z intervalu $(0, 1)$:

$$0,71;\ 0,009;\ 0,42;\ 0,85;$$
$$0,27;\ 0,54;\ 0,925;\ 0,17;$$
$$0,62;\ 0,355;\ 0,78;\ 0,03;\ 0,48;\ \ldots$$

Nemusíte mi věřit (můžete si to koneckonců spočítat), ale tato posloupnost má následující vlastnost:

- první dvě čísla leží v různých polovinách intervalu $(0, 1)$,

Příklad 25 - zas trochu analýzy

Posuďte následující posloupnost *reálných* čísel z intervalu $(0, 1)$:

$$0,71;\ 0,009;\ 0,42;\ 0,85;$$
$$0,27;\ 0,54;\ 0,925;\ 0,17;$$
$$0,62;\ 0,355;\ 0,78;\ 0,03;\ 0,48;\ \ldots$$

Nemusíte mi věřit (můžete si to koneckonců spočítat), ale tato posloupnost má následující vlastnost:

- první dvě čísla leží v různých polovinách intervalu $(0, 1)$,
- první tři čísla leží v různých třetinách intervalu $(0, 1)$,

Příklad 25 - zas trochu analýzy

Posuďte následující posloupnost *reálných* čísel z intervalu $(0, 1)$:

$$0,71;\ 0,009;\ 0,42;\ 0,85;$$
$$0,27;\ 0,54;\ 0,925;\ 0,17;$$
$$0,62;\ 0,355;\ 0,78;\ 0,03;\ 0,48;\ \ldots$$

Nemusíte mi věřit (můžete si to koneckonců spočítat), ale tato posloupnost má následující vlastnost:

- první dvě čísla leží v různých polovinách intervalu $(0, 1)$,
- první tři čísla leží v různých třetinách intervalu $(0, 1)$,
- první čtyři čísla leží v různých čtvrtinách intervalu $(0, 1)$,

Příklad 25 - zas trochu analýzy

Posuďte následující posloupnost *reálných* čísel z intervalu $(0, 1)$:

$$0,71;\ 0,009;\ 0,42;\ 0,85;$$
$$0,27;\ 0,54;\ 0,925;\ 0,17;$$
$$0,62;\ 0,355;\ 0,78;\ 0,03;\ 0,48;\ \ldots$$

Nemusíte mi věřit (můžete si to koneckonců spočítat), ale tato posloupnost má následující vlastnost:

- první dvě čísla leží v různých polovinách intervalu $(0, 1)$,
- první tři čísla leží v různých třetinách intervalu $(0, 1)$,
- první čtyři čísla leží v různých čtvrtinách intervalu $(0, 1)$,
- a tak dále.

Příklad 25 - zas trochu analýzy

Posuďte následující posloupnost *reálných* čísel z intervalu $(0, 1)$:

$$0,71;\ 0,009;\ 0,42;\ 0,85;$$
$$0,27;\ 0,54;\ 0,925;\ 0,17;$$
$$0,62;\ 0,355;\ 0,78;\ 0,03;\ 0,48;\ \ldots$$

Nemusíte mi věřit (můžete si to koneckonců spočítat), ale tato posloupnost má následující vlastnost:

- první dvě čísla leží v různých polovinách intervalu $(0, 1)$,
- první tři čísla leží v různých třetinách intervalu $(0, 1)$,
- první čtyři čísla leží v různých čtvrtinách intervalu $(0, 1)$,
- a tak dále.

Dá se sestrojit **nekonečná** taková posloupnost?

Příklad 25 - řešení

Příklad 25 - řešení

Dá se ještě chvíli pokračovat, například takto:

Příklad 25 - řešení

Dá se ještě chvíli pokračovat, například takto:

$$0,97;\ 0,22;\ 0,66;\ 0,32.$$

Příklad 25 - řešení

Dá se ještě chvíli pokračovat, například takto:

$$0,97;\ 0,22;\ 0,66;\ 0,32.$$

Berlekamp a Graham (1970) však dokázali, že **žádná taková posloupnost nemůže mít víc než 17 členů** (!)

Příklad 25 - řešení

Dá se ještě chvíli pokračovat, například takto:

$$0,97;\ 0,22;\ 0,66;\ 0,32.$$

Berlekamp a Graham (1970) však dokázali, že **žádná taková posloupnost nemůže mít víc než 17 členů** (!)

Pravidlo **neplatí**.

Příklad 26 - problém Hardyho a Littlewooda

Příklad 26 - problém Hardyho a Littlewooda

Jasně, že se každé liché číslo nechá zapsat jako prvočíslo plus dvakrát kvadrát, ne?

Příklad 26 - problém Hardyho a Littlewooda

Jasně, že se každé liché číslo nechá zapsat jako prvočíslo plus dvakrát kvadrát, ne?

$$3+2\cdot 0^2, 3+2\cdot 1^2, 5+2\cdot 1^2, 7+2\cdot 1^2, 3+2\cdot 2^2, 11+2\cdot 1^2,$$
$$7+2\cdot 2^2, 17+2\cdot 0^2, 11+2\cdot 2^2, 3+2\cdot 3^2, 5+2\cdot 3^2, 23+2\cdot 1^2, \ldots .$$

Příklad 26 - problém Hardyho a Littlewooda

Jasně, že se každé liché číslo nechá zapsat jako prvočíslo plus dvakrát kvadrát, ne?

$$3+2\cdot 0^2, 3+2\cdot 1^2, 5+2\cdot 1^2, 7+2\cdot 1^2, 3+2\cdot 2^2, 11+2\cdot 1^2,$$
$$7+2\cdot 2^2, 17+2\cdot 0^2, 11+2\cdot 2^2, 3+2\cdot 3^2, 5+2\cdot 3^2, 23+2\cdot 1^2, \ldots .$$

Některá čísla (třeba 61) mají takových representací dokonce víc.

Příklad 26 - problém Hardyho a Littlewooda

Jasně, že se každé liché číslo nechá zapsat jako prvočíslo plus dvakrát kvadrát, ne?

$$3+2\cdot 0^2, 3+2\cdot 1^2, 5+2\cdot 1^2, 7+2\cdot 1^2, 3+2\cdot 2^2, 11+2\cdot 1^2,$$
$$7+2\cdot 2^2, 17+2\cdot 0^2, 11+2\cdot 2^2, 3+2\cdot 3^2, 5+2\cdot 3^2, 23+2\cdot 1^2, \ldots .$$

Některá čísla (třeba 61) mají takových representací dokonce víc.

Je to pravda?

Příklad 26 - řešení

Příklad 26 - řešení

Není, ale těsně.

Příklad 26 - řešení

Není, ale těsně.

Problém formulovali **Hardy a Littlewood**.

Příklad 26 - řešení

Není, ale těsně.

Problém formulovali **Hardy a Littlewood**.

Ron Ruemmpler dokázal, že první výjimkou je 5777 a vyslovil domněnku, že je to výjimka **jediná** (!)

Příklad 26 - řešení

Není, ale těsně.

Problém formulovali **Hardy a Littlewood**.

Ron Ruemmpler dokázal, že první výjimkou je 5777 a vyslovil domněnku, že je to výjimka **jediná** (!)

Pravidlo tedy **neplatí**, ale moc k tomu asi nechybí.

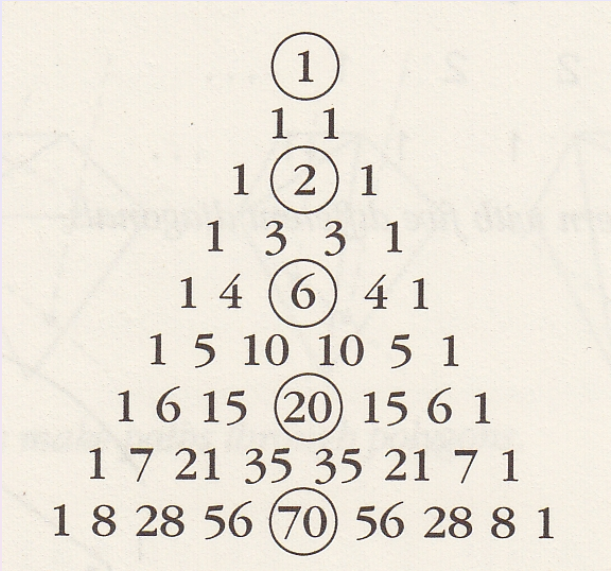
Catalan numbers

Catalan numbers

Pohleďme na Pascalův trojúhelník:

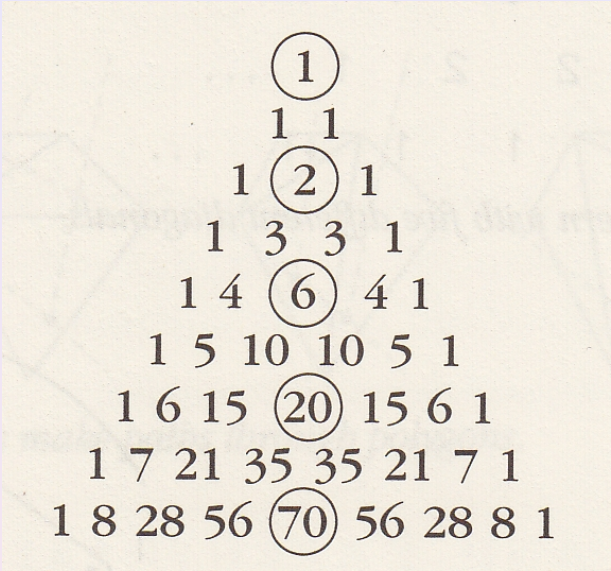
Catalan numbers

Pohleďme na Pascalův trojúhelník:



Catalan numbers

Pohleďme na Pascalův trojúhelník:

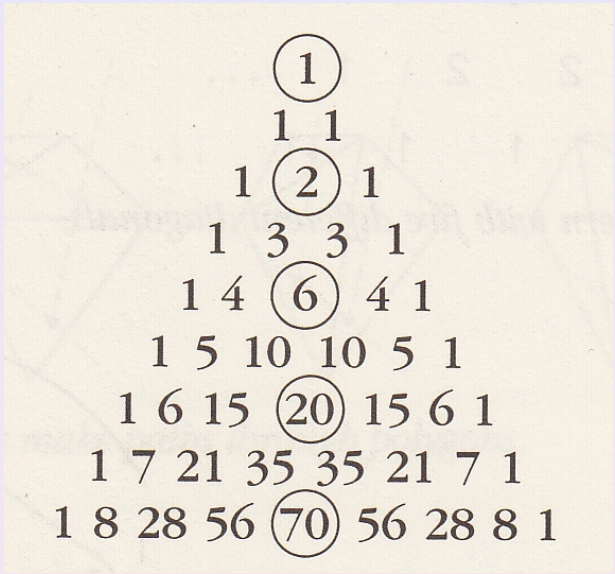


Prostřední koeficienty jsou po řadě dělitelné čísly

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots.$$

Catalan numbers

Pohleďme na Pascalův trojúhelník:



Prostřední koeficienty jsou po řadě dělitelné čísly

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots.$$

Po vydělení dostaneme posloupnost tzv. **Catalanových čísel**:

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$$

Pan autor osobně

Pan autor osobně



Pan autor osobně



Eugène Charles Catalan (1814-1894)

Příklad 27 - problém vhodný na hory

Příklad 27 - problém vhodný na hory

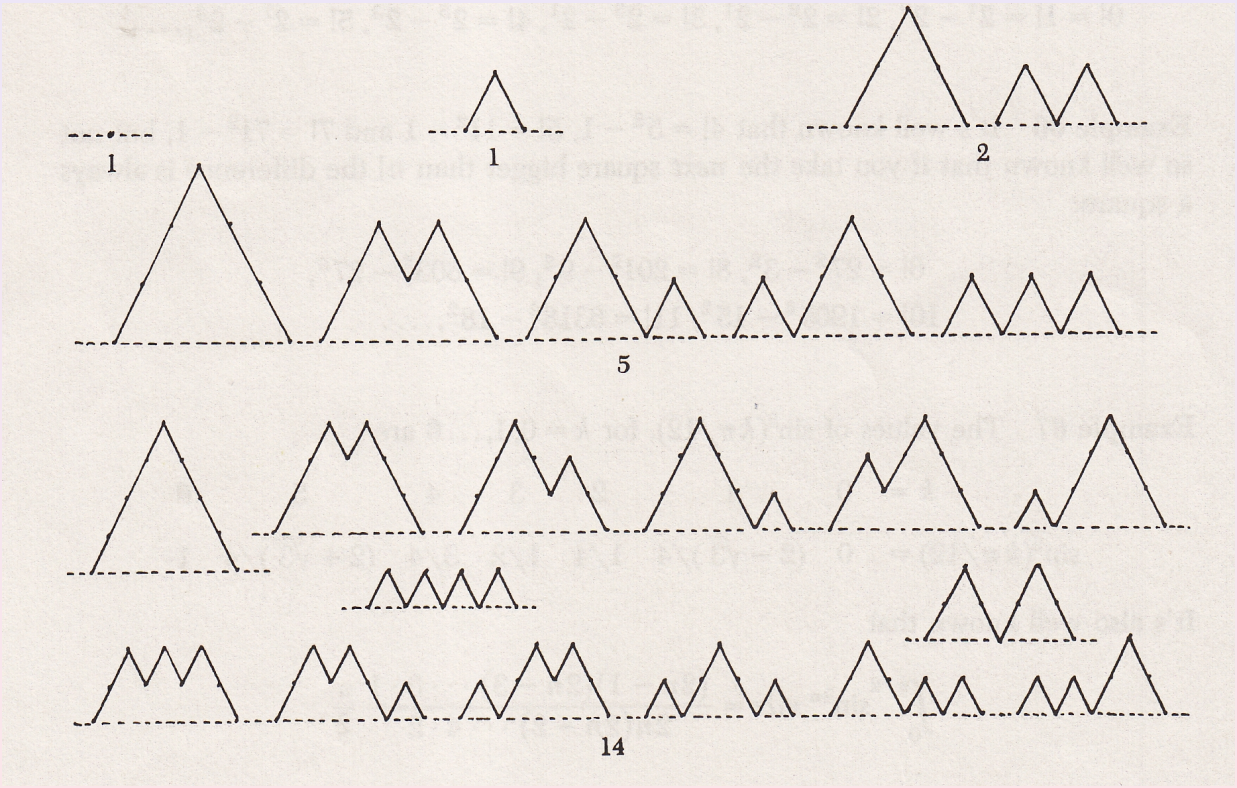
Smíte n-krát nahoru a n-krát dolů.

Příklad 27 - problém vhodný na hory

Smíte n-krát nahoru a n-krát dolů. Kolik různých pohoří dokážete načrtnout?

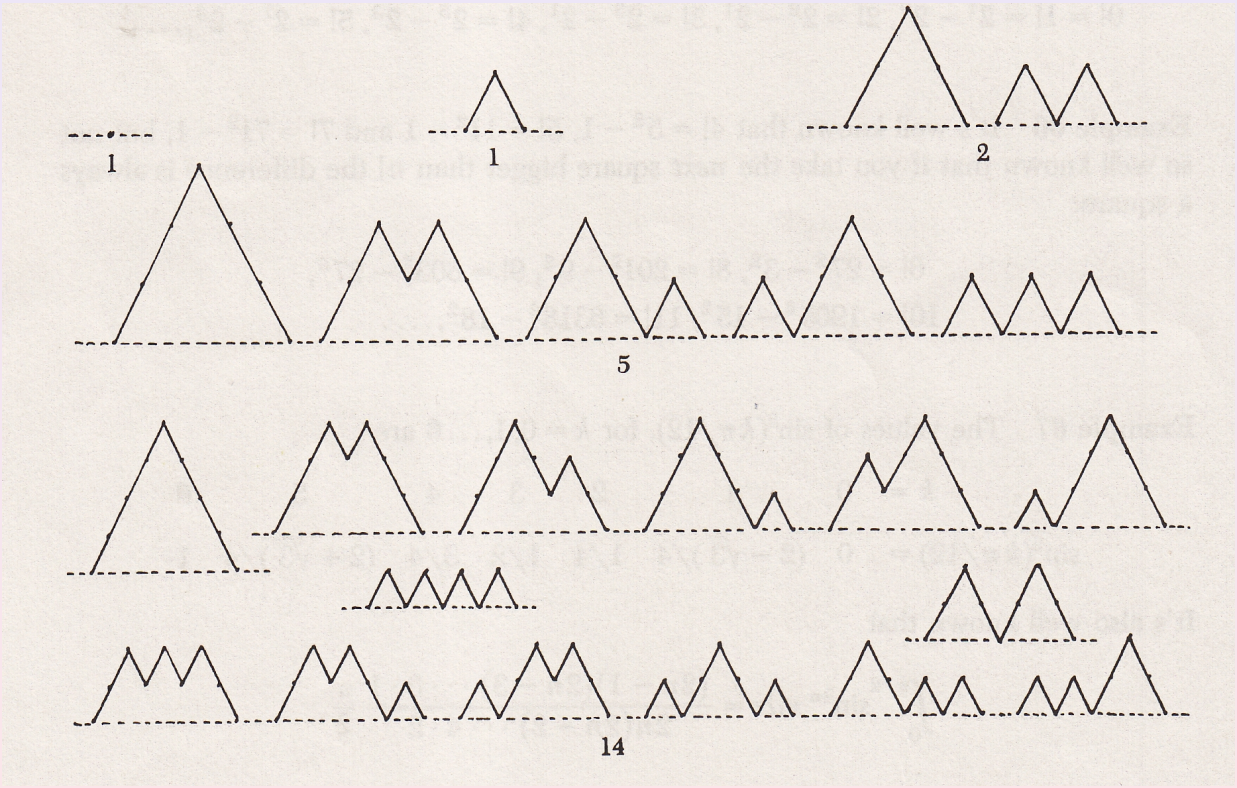
Příklad 27 - problém vhodný na hory

Smíte n-krát nahoru a n-krát dolů. Kolik různých pohoří dokážete načrtnout?



Příklad 27 - problém vhodný na hory

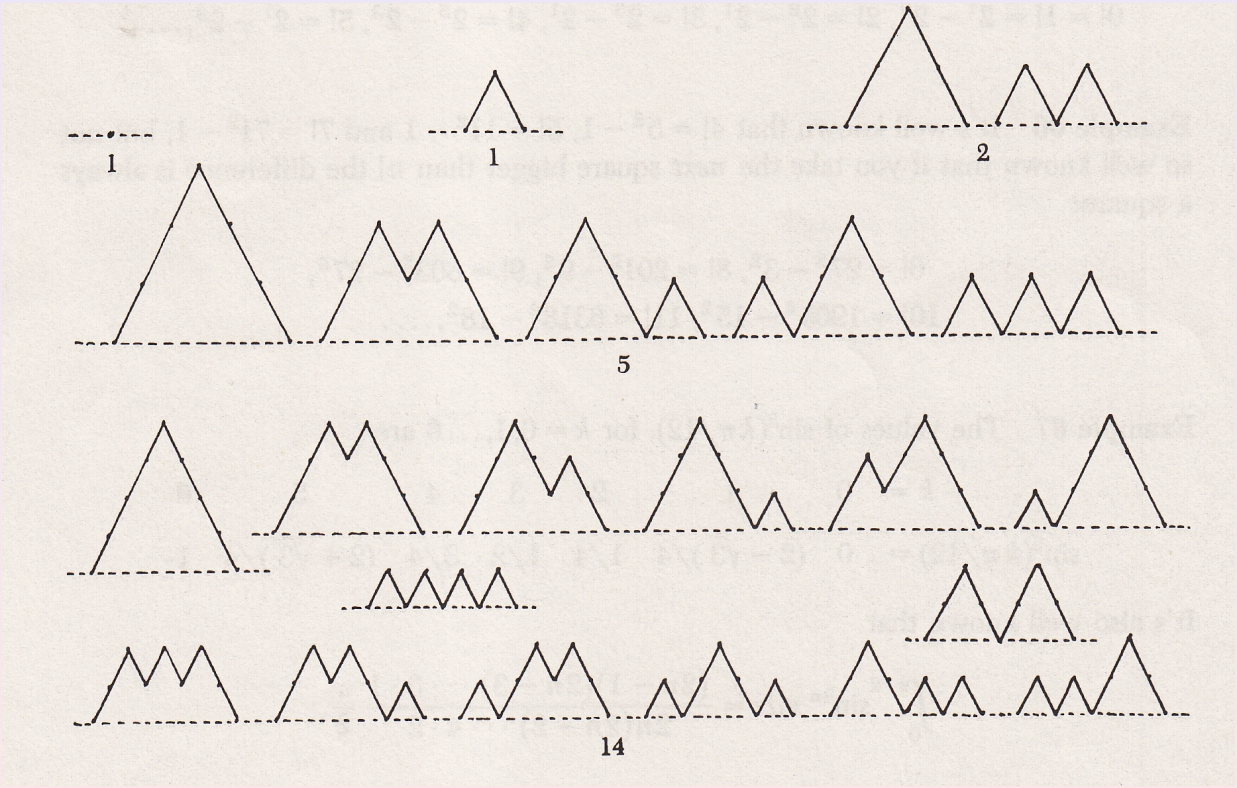
Smíte n-krát nahoru a n-krát dolů. Kolik různých pohoří dokážete načrtnout?



Co je to za posloupnost?

Příklad 27 - problém vhodný na hory

Smíte n-krát nahoru a n-krát dolů. Kolik různých pohoří dokážete načrtnout?



Co je to za posloupnost? Je to opravdu ona?

Příklad 27 - řešení

Příklad 27 - řešení

Ano!

Příklad 27 - řešení

Ano!

Dokonce takhle nějak vznikla.

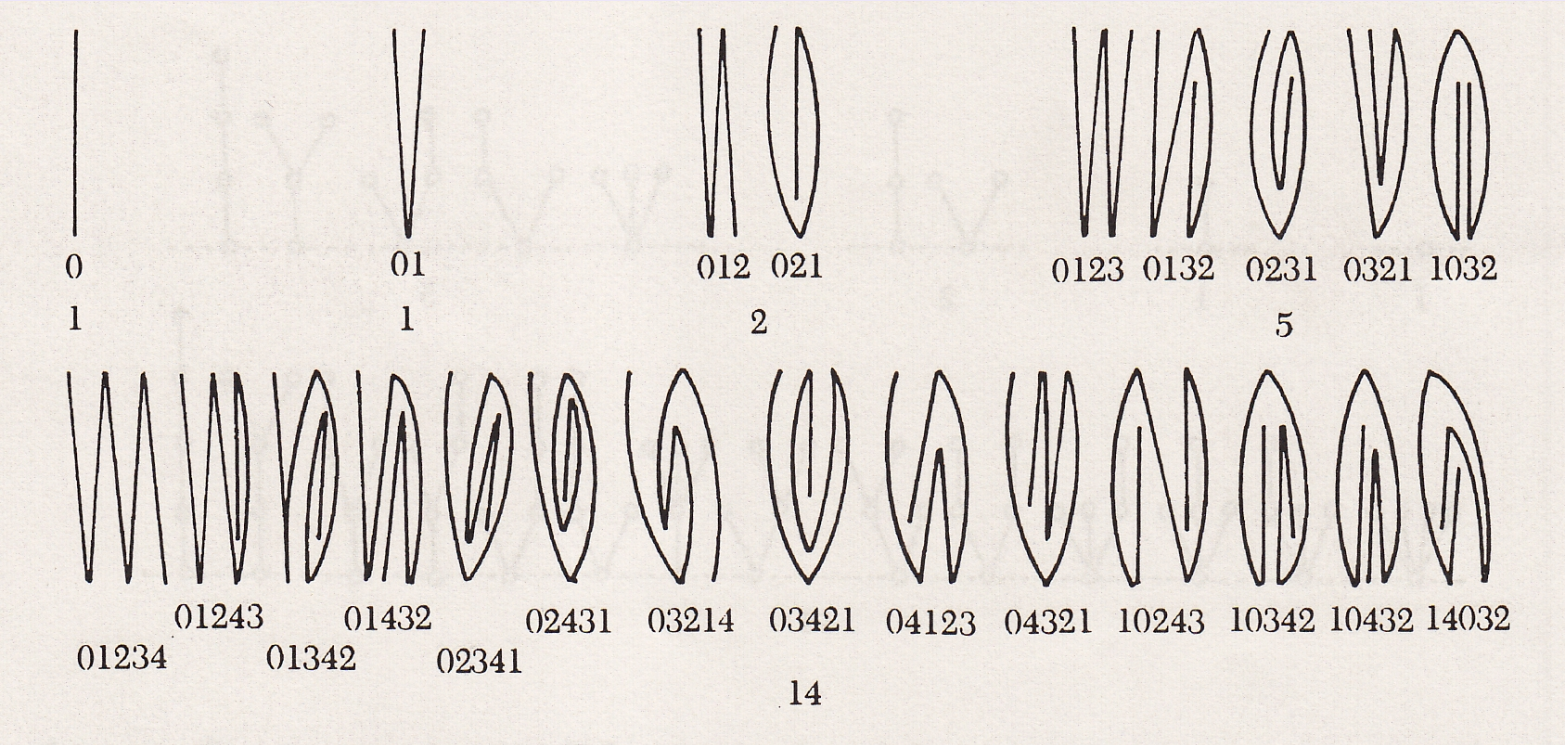
Příklad 28 - filatelistův problém

Příklad 28 - filatelistův problém

Kolika způsoby může filatelista zohýbat svůj aršík?

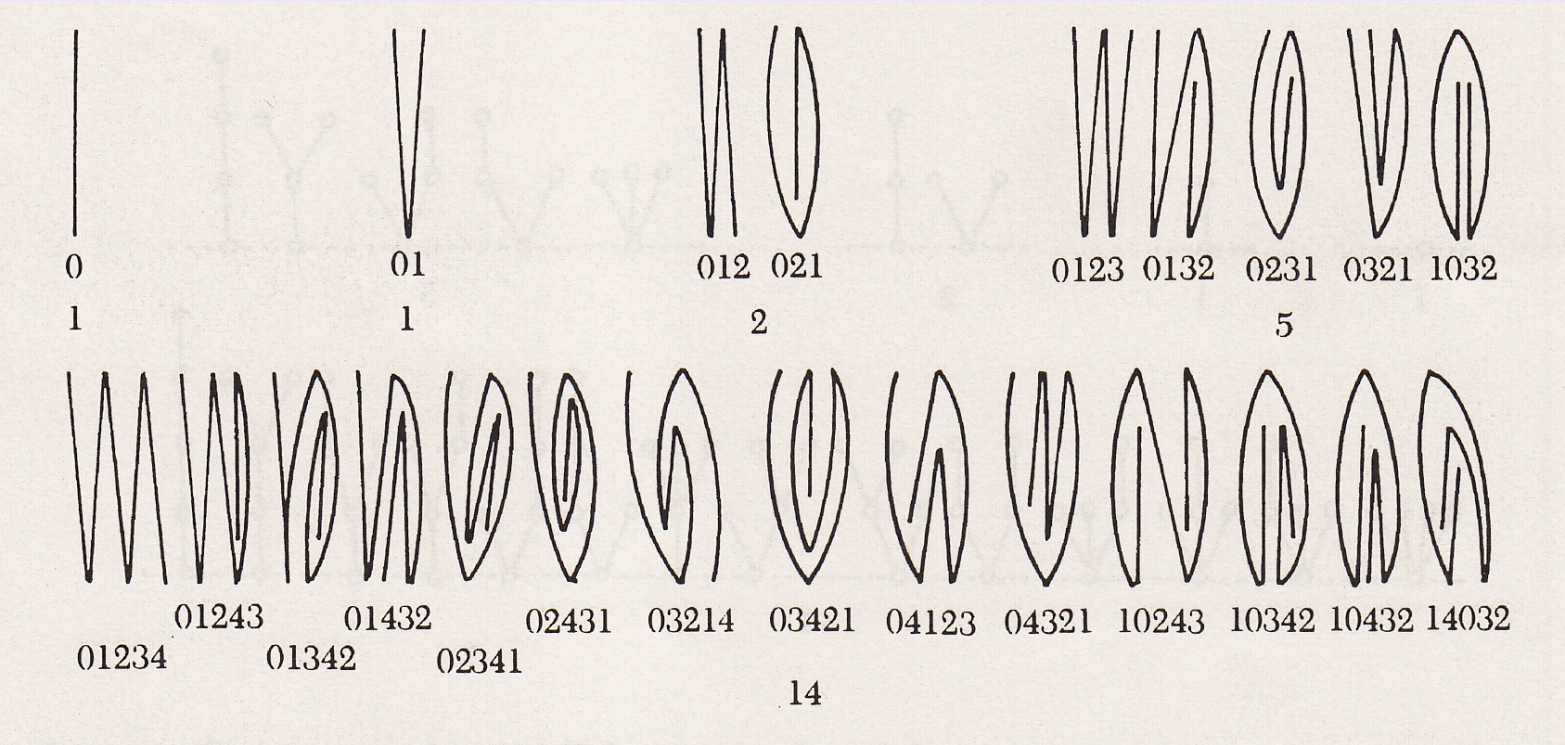
Příklad 28 - filatelistův problém

Kolika způsoby může filatelista zohýbat svůj aršík?



Příklad 28 - filatelistův problém

Kolika způsoby může filatelista zohýbat svůj aršík?



Jsou to Catalanova čísla nebo SZMČ?

Příklad 28 - řešení

Příklad 28 - řešení

SZMČ.

Příklad 28 - řešení

SZMČ.

Posloupnost se od Catalanových čísel odchyluje, neboť pokračuje:

$$39, 120, 358, 1176, 3527, \ldots$$

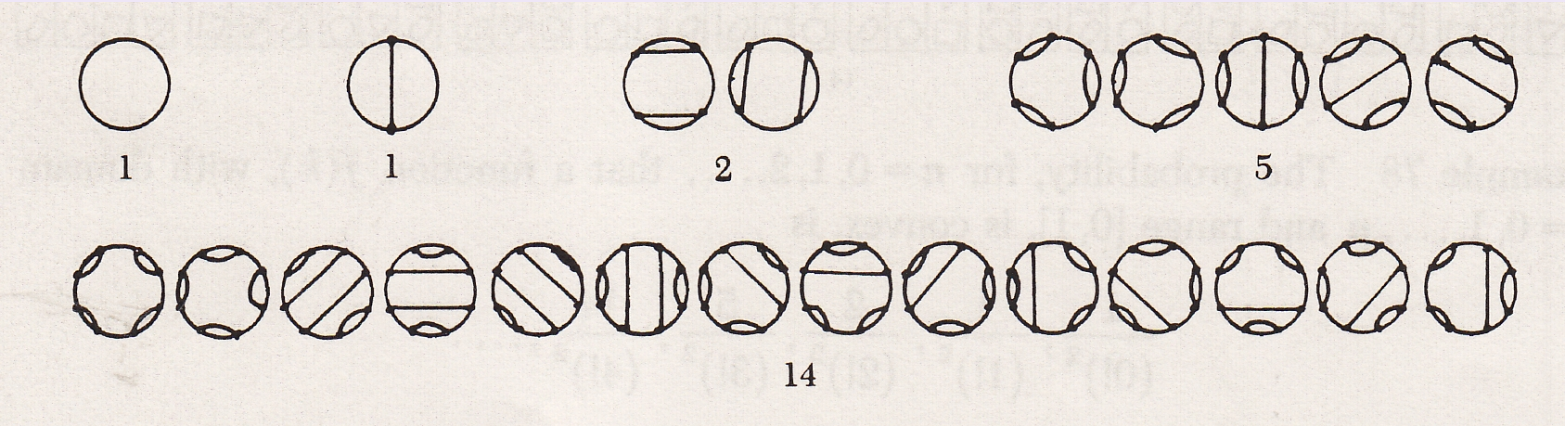
Příklad 29 - žetony do sprchy

Příklad 29 - žetony do sprchy

Posuďme následující diagram:

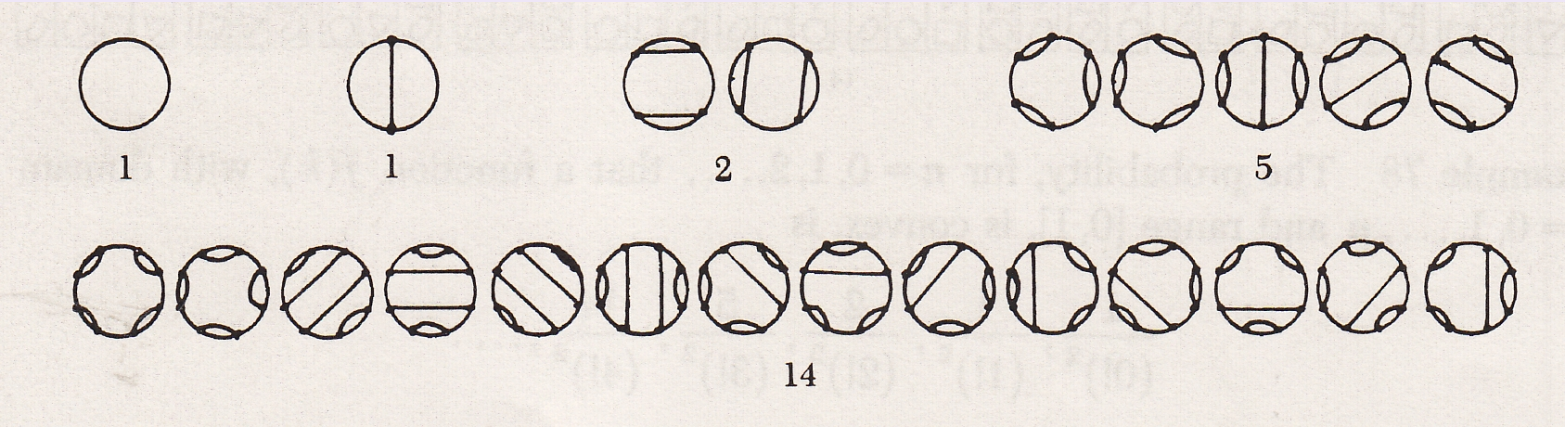
Příklad 29 - žetony do sprchy

Posuďme následující diagram:



Příklad 29 - žetony do sprchy

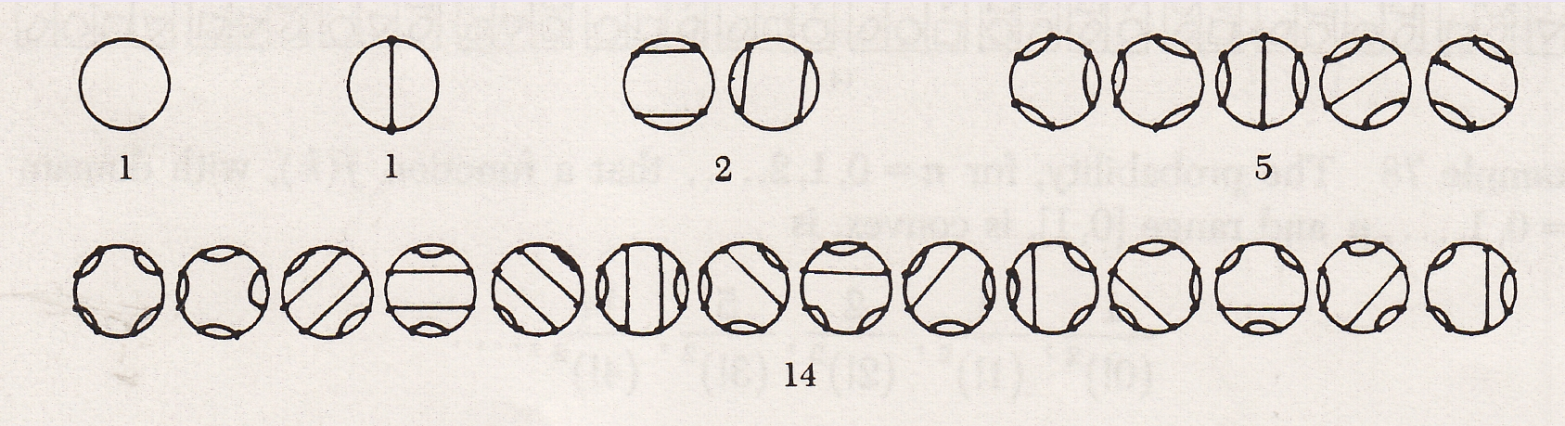
Posuďme následující diagram:



Znázorňuje, kolika způsoby si může $2n$ osob u stolu podat ruce, aniž by se křížilo.

Příklad 29 - žetony do sprchy

Posuďme následující diagram:



Znázorňuje, kolika způsoby si může $2n$ osob u stolu podat ruce, aniž by se křížilo.

Jsou to Catalanova čísla?

Příklad 29 - řešení

Příklad 29 - řešení

Ano.

Příklad 29 - řešení

Ano. (Důvod: blížíme se k závěru, a skončit je třeba v pozitivním duchu.)

Příklad 30 - matfyzákova posloupnost

Příklad 30 - matfyzákova posloupnost

Posloupnost, kterou musí dokonale ovládat každý matfyzák, je

Příklad 30 - matfyzákova posloupnost

Posloupnost, kterou musí dokonale ovládat každý matfyzák, je

$$102,\ 152,\ 177,\ 183,\ 200,\ 202,\ 236,\ 505,\ 551.$$

Příklad 30 - matfyzákova posloupnost

Posloupnost, kterou musí dokonale ovládat každý matfyzák, je

$$102,\ 152,\ 177,\ 183,\ 200,\ 202,\ 236,\ 505,\ 551.$$

Jsou to autobusy do Bohnic.

Příklad 31 - klíčová posloupnost

Příklad 31 - klíčová posloupnost

Představuje posloupnost

Příklad 31 - klíčová posloupnost

Představuje posloupnost

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \ldots$$

nějaké schéma?

Příklad 31 - klíčová posloupnost

Představuje posloupnost

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \ldots$$

nějaké schéma?

Ano.

Příklad 31 - klíčová posloupnost

Představuje posloupnost

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \ldots$$

nějaké schéma?

Ano. Obecný vzorec má tvar

$$2n + 1$$

Příklad 31 - klíčová posloupnost

Představuje posloupnost

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \ldots$$

nějaké schéma?

Ano. Obecný vzorec má tvar

$$2n + 1$$

a je to počet pokusů, který potřebuji k úspěšnému otevření dveří, mám-li na svazku n klíčů.

Konec

Konec

Díky za pozornost, to je vše.