

Definice integrálu: Od Newtona k Bendové

Jan MALÝ

UK v Praze a UJEP v Ústí nad Labem

OSMA, VŠB-TU Ostrava, 3. listopadu 2015

Toto není přednáška o historii matematiky.

Toto není přednáška o historii matematiky.
Nedozvíte se o přínosu starých Řeků (Archimédes) a Číňanů.

Toto není přednáška o historii matematiky.

Nedozvíte se o přínosu starých Řeků (Archimédes) a Číňanů.

Zamlčím zásluhy **B.F. Cavalieriho** (1598–1647), **P. de Fermata** (1601–1665), **J. Wallise** (1616–1703) a dalších.

Toto není přednáška o historii matematiky.

Nedozvíte se o přínosu starých Řeků (Archimédes) a Číňanů.

Zamlčím zásluhy **B.F. Cavalieriho** (1598–1647), **P. de Fermata** (1601–1665), **J. Wallise** (1616–1703) a dalších.

Nedozvíte se, jaké používali značení **Sir I. Newton** a **G. W. von Leibniz**, ani jak to vlastně přesně mysleli.

Toto není přednáška o historii matematiky.

Nedozvíte se o přínosu starých Řeků (Archimédes) a Číňanů.

Zamlčím zásluhy **B.F. Cavalieriho** (1598–1647), **P. de Fermata** (1601–1665), **J. Wallise** (1616–1703) a dalších.

Nedozvíte se, jaké používali značení **Sir I. Newton** a **G. W. von Leibniz**, ani jak to vlastně přesně mysleli.

Podle nich (priorita je nejasná a už tenkrát byla předmětem sporů) integrál $\int_a^b f(x) dx$ (“plochu pod grafem funkce”) lze počítat tak, že najdeme primitivní funkci k f , tj. takovou $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, že $F'(x) = f(x)$ na (a, b) , a spočítáme přírůstek funkce F .

Toto není přednáška o historii matematiky.

Nedozvíte se o přínosu starých Řeků (Archimédes) a Číňanů.

Zamlčím zásluhy **B.F. Cavalieriho** (1598–1647), **P. de Fermata** (1601–1665), **J. Wallise** (1616–1703) a dalších.

Nedozvíte se, jaké používali značení **Sir I. Newton** a **G. W. von Leibniz**, ani jak to vlastně přesně mysleli.

Podle nich (priorita je nejasná a už tenkrát byla předmětem sporů) integrál $\int_a^b f(x) dx$ (“plochu pod grafem funkce”) lze počítat tak, že najdeme primitivní funkci k f , tj. takovou $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, že $F'(x) = f(x)$ na (a, b) , a spočítáme přírůstek funkce F . Tj.

$$(N) \int_a^b f(x) dx := \lim_{y \rightarrow b-} F(y) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Toto není přednáška o historii matematiky.

Nedozvíte se o přínosu starých Řeků (Archimédes) a Číňanů.

Zamlčím zásluhy **B.F. Cavalieriho** (1598–1647), **P. de Fermata** (1601–1665), **J. Wallise** (1616–1703) a dalších.

Nedozvíte se, jaké používali značení **Sir I. Newton** a **G. W. von Leibniz**, ani jak to vlastně přesně mysleli.

Podle nich (priorita je nejasná a už tenkrát byla předmětem sporů) integrál $\int_a^b f(x) dx$ (“plochu pod grafem funkce”) lze počítat tak, že najdeme primitivní funkci k f , tj. takovou $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, že $F'(x) = f(x)$ na (a, b) , a spočítáme přírůstek funkce F . Tj.

$$(N) \int_a^b f(x) dx := \lim_{y \rightarrow b-} F(y) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Termín “**Newtonův integrál**” pro tento přírůstek pochází patrně od Jarníka a v zahraniční literatuře se téměř nevyskytuje.

Toto není přednáška o historii matematiky.

Nedozvíte se o přínosu starých Řeků (Archimédes) a Číňanů.

Zamlčím zásluhy **B.F. Cavalieriho** (1598–1647), **P. de Fermata** (1601–1665), **J. Wallise** (1616–1703) a dalších.

Nedozvíte se, jaké používali značení **Sir I. Newton** a **G. W. von Leibniz**, ani jak to vlastně přesně mysleli.

Podle nich (priorita je nejasná a už tenkrát byla předmětem sporů) integrál $\int_a^b f(x) dx$ (“plochu pod grafem funkce”) lze počítat tak, že najdeme primitivní funkci k f , tj. takovou $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, že $F'(x) = f(x)$ na (a, b) , a spočítáme přírůstek funkce F . Tj.

$$(N) \int_a^b f(x) dx := \lim_{y \rightarrow b-} F(y) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Termín “**Newtonův integrál**” pro tento přírůstek pochází patrně od Jarníka a v zahraniční literatuře se téměř nevyskytuje.

Newton se určitě nezabýval třídou takto “integrovatelných” funkcí.

Toto není přednáška o historii matematiky.

Nedozvíte se o přínosu starých Řeků (Archimédes) a Číňanů.

Zamlčím zásluhy **B.F. Cavalieriho** (1598–1647), **P. de Fermata** (1601–1665), **J. Wallise** (1616–1703) a dalších.

Nedozvíte se, jaké používali značení **Sir I. Newton** a **G. W. von Leibniz**, ani jak to vlastně přesně mysleli.

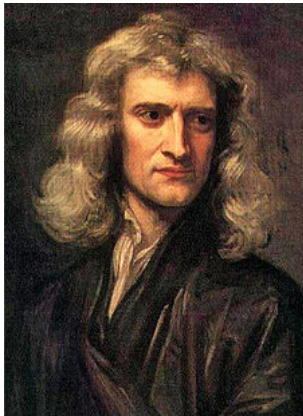
Podle nich (priorita je nejasná a už tenkrát byla předmětem sporů) integrál $\int_a^b f(x) dx$ (“plochu pod grafem funkce”) lze počítat tak, že najdeme primitivní funkci k f , tj. takovou $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, že $F'(x) = f(x)$ na (a, b) , a spočítáme přírůstek funkce F . Tj.

$$(N) \int_a^b f(x) dx := \lim_{y \rightarrow b-} F(y) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Termín “**Newtonův integrál**” pro tento přírůstek pochází patrně od Jarníka a v zahraniční literatuře se téměř nevyskytuje.

Newton se určitě nezabýval třídou takto “integrovatelných” funkcí.

Nás to samozřejmě zajímat bude.



Sir Isaac Newton (1643–1727)
Portrét od Godfreye Knellera (1689)



Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716)
portrét od Bernharda Christopha Franckeho (cca 1700)

Příklad. Bud' $F(x) = |x|$ a

$$f(x) = \begin{cases} F'(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Potom f nemá Newtonův integrál přes $[-1, 1]$, protože nemá na tomto intervalu primitivní funkci.

Příklad. Bud' $F(x) = |x|$ a

$$f(x) = \begin{cases} F'(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Potom f nemá Newtonův integrál přes $[-1, 1]$, protože nemá na tomto intervalu primitivní funkci. Kdyby ji měla, bylo by to určitě F (test pro $x \neq 0$, spojitost v nule), ale F nemá derivaci v nule.

Příklad. Bud' $F(x) = |x|$ a

$$f(x) = \begin{cases} F'(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Potom f nemá Newtonův integrál přes $[-1, 1]$, protože nemá na tomto intervalu primitivní funkci. Kdyby ji měla, bylo by to určitě F (test pro $x \neq 0$, spojitost v nule), ale F nemá derivaci v nule.

V některých učebnicích se zavádí zobecnění, že se povoluje výjimečná konečná množina, kde se od F nevyžaduje derivace, ale jen spojitost. Takové zobecnění je účelové, umělé a neřeší podstatu problému.

Příklad. Bud' $F(x) = |x|$ a

$$f(x) = \begin{cases} F'(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Potom f nemá Newtonův integrál přes $[-1, 1]$, protože nemá na tomto intervalu primitivní funkci. Kdyby ji měla, bylo by to určitě F (test pro $x \neq 0$, spojitost v nule), ale F nemá derivaci v nule.

V některých učebnicích se zavádí zobecnění, že se povoluje výjimečná konečná množina, kde se od F nevyžaduje derivace, ale jen spojitost. Takové zobecnění je účelové, umělé a neřeší podstatu problému.

Ale přeci jen výhoda: má-li f integrál přes dva sousedící intervaly, má i přes jejich sjednocení.

Příklad. Necht' k je přirozené číslo. Bud'

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^k}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a $f = F'$.

Příklad. Nechť k je přirozené číslo. Bud'

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^k}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a $f = F'$. Potom f je dobře definovaná, neboť F má derivaci všude. Uvažujme f na intervalu $I = [-1, 1]$. Potom f je tedy newtonovsky integrovatelná přes I . Pro $k = 1$ je funkce f je nespojitá a pro $k = 1$ je omezená na I , pro $k = 2, 3, \dots$ je neomezená na I .

Příklad. Nechť k je přirozené číslo. Bud'

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^k}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

a $f = F'$. Potom f je dobře definovaná, neboť F má derivaci všude. Uvažujme f na intervalu $I = [-1, 1]$. Potom f je tedy newtonovsky integrovatelná přes I . Pro $k = 1$ je funkce f je nespojitá a pro $k = 1$ je omezená na I , pro $k = 2, 3, \dots$ je neomezená na I .

Nyní se bude zabývat Riemannovým přístupem k definici integrálu.

Nechť $[a, b]$ je uzavřený omezený interval. Množinu D podintervalů $[a, b]$ nazveme (obyčejným) **dělením** intervalu $[a, b]$, jestliže existují $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m = b$ tak, že

$$D = \{[x_{i-1}, x_i] : i = 1, \dots, m\}.$$

Nechť $[a, b]$ je uzavřený omezený interval. Množinu D podintervalů $[a, b]$ nazveme (obyčejným) **dělením** intervalu $[a, b]$, jestliže existují $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m = b$ tak, že

$$D = \{[x_{i-1}, x_i] : i = 1, \dots, m\}.$$

Množinu D uspořádaných dvojic (interval, bod) nazveme **riemannovským dělením** intervalu $[a, b]$, jestliže existují

$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{m-1} \leq \xi_m \leq x_m = b$ tak, že

$$D = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i) : i = 1, \dots, m\}. \quad (1)$$

Nechť $\delta > 0$. Řekneme, že riemannovské dělení D je **δ -jemné**, jestliže pro všechna $i = 1, \dots, m$ je $x_i - x_{i-1} < \delta$.

Nechť $[a, b]$ je uzavřený omezený interval. Množinu D podintervalů $[a, b]$ nazveme (obyčejným) **dělením** intervalu $[a, b]$, jestliže existují $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m = b$ tak, že

$$D = \{[x_{i-1}, x_i]: i = 1, \dots, m\}.$$

Množinu D uspořádaných dvojic (interval, bod) nazveme **riemannovským dělením** intervalu $[a, b]$, jestliže existují

$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{m-1} \leq \xi_m \leq x_m = b$ tak, že

$$D = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i): i = 1, \dots, m\}. \quad (1)$$

Nechť $\delta > 0$. Řekneme, že riemannovské dělení D je **δ -jemné**, jestliže pro všechna $i = 1, \dots, m$ je $x_i - x_{i-1} < \delta$.

Uvažujme funkci $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a riemannovské dělení D intervalu $[a, b]$, viz (1). Potom **riemannovský součet** f přes D je číslo

$$R(f, D) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Číslo $\mathcal{I}$ nazveme **Riemannovým integrálem** funkce f přes $[a, b]$, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že pro každé δ -jemné dělení D intervalu $[a, b]$ je

$$|\mathcal{I} - R(f, D)| < \varepsilon.$$

Takové číslo $\mathcal{I}$ je nejvýše jedno. Značíme

$$({R}) \int_a^b f(x) dx.$$

Číslo $\mathcal{I}$ nazveme **Riemannovým integrálem** funkce f přes $[a, b]$, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že pro každé δ -jemné dělení D intervalu $[a, b]$ je

$$|\mathcal{I} - R(f, D)| < \varepsilon.$$

Takové číslo $\mathcal{I}$ je nejvýše jedno. Značíme

$$(R) \int_a^b f(x) dx.$$

A.L. Cauchy dokázal, že každá spojitá funkce f na uzavřeném omezeném intervalu má Riemannův integrál.

Číslo $\mathcal{I}$ nazveme **Riemannovým integrálem** funkce f přes $[a, b]$, jestliže $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že pro každé δ -jemné dělení D intervalu $[a, b]$ je

$$|\mathcal{I} - R(f, D)| < \varepsilon.$$

Takové číslo $\mathcal{I}$ je nejvýše jedno. Značíme

$$(R) \int_a^b f(x) dx.$$

A.L. Cauchy dokázal, že každá spojitá funkce f na uzavřeném omezeném intervalu má Riemannův integrál.

Až na to, že tehdy to ještě nebyl Riemannův integrál. **B. Riemann** přišel se svou definicí později. Jeho zásluha je hlavně v tom, že nepředpokládal spojitost, ale zavedl třídu **integrovatelných funkcí**, pro které jeho definice dává výsledek.



Augustin Louis Cauchy (1789–1857)



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

V učebnicích se obvykle zavádí horní a dolní Riemannovské součty pro *obyčejná* dělení, horní a dolní Riemannův integrál a Riemannův integrál se definuje pro funkce, na nichž horní a dolní integrál dává stejnou hodnotu. Tento přístup pochází ale od **J.-G. Darboux**. Proč se tomu říká Riemannův integrál?

V učebnicích se obvykle zavádí horní a dolní Riemannovské součty pro *obyčejná* dělení, horní a dolní Riemannův integrál a Riemannův integrál se definuje pro funkce, na nichž horní a dolní integrál dává stejnou hodnotu. Tento přístup pochází ale od **J.-G. Darboux**. Proč se tomu říká Riemannův integrál?

- Riemann byl dřív, a proto se mu připisuje větší zásluha.

V učebnicích se obvykle zavádí horní a dolní Riemannovské součty pro *obyčejná* dělení, horní a dolní Riemannův integrál a Riemannův integrál se definuje pro funkce, na nichž horní a dolní integrál dává stejnou hodnotu. Tento přístup pochází ale od **J.-G. Darboux**. Proč se tomu říká Riemannův integrál?

- Riemann byl dřív, a proto se mu připisuje větší zásluha.
- Oba přístupy dávají stejnou třídu integrovatelných funkcí.

V učebnicích se obvykle zavádí horní a dolní Riemannovské součty pro *obyčejná* dělení, horní a dolní Riemannův integrál a Riemannův integrál se definuje pro funkce, na nichž horní a dolní integrál dává stejnou hodnotu. Tento přístup pochází ale od **J.-G. Darboux**. Proč se tomu říká Riemannův integrál?

- Riemann byl dřív, a proto se mu připisuje větší zásluha.
- Oba přístupy dávají stejnou třídu integrovatelných funkcí.

Darbouxova definice Riemannova integrálu se pokládá za lepší z metodického hlediska.



Jean-Gaston Darboux (1842–1917)

Riemannovská definice integruje i některé nespojité funkce, např. funkce po částech spojitě. Existují ale jednoduché integrály, které Riemannova definice nezvládne, např.

$$\int_1^{\infty} x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 1,$$
$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_0^1 = 2.$$

Riemannovská definice integruje i některé nespojité funkce, např. funkce po částech spojitě. Existují ale jednoduché integrály, které Riemannova definice nezvládne, např.

$$\int_1^{\infty} x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\infty} = 1,$$
$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_0^1 = 2.$$

Tomu se někteří autoři učebnic snaží odpomoci umělými úpravami, například zavádějí “zobecněný” Riemannův integrál jako limitu Riemannových integrálů přes podintervaly.

Riemannovská definice integruje i některé nespojité funkce, např. funkce po částech spojitě. Existují ale jednoduché integrály, které Riemannova definice nezvládne, např.

$$\int_1^{\infty} x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1,$$
$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2.$$

Tomu se někteří autoři učebnic snaží odpomoci umělými úpravami, například zavádějí “zobecněný” Riemannův integrál jako limitu Riemannových integrálů přes podintervaly. Takové definice jsou ale umělé a neodstraní *princip* proč riemannovská definice selhává.

Riemannovská definice integruje i některé nespojité funkce, např. funkce po částech spojitě. Existují ale jednoduché integrály, které Riemannova definice nezvládne, např.

$$\int_1^{\infty} x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1,$$
$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2.$$

Tomu se někteří autoři učebnic snaží odpomoci umělými úpravami, například zavádějí “zobecněný” Riemannův integrál jako limitu Riemannových integrálů přes podintervaly. Takové definice jsou ale umělé a neodstraní *princip* proč riemannovská definice selhává. Funkce $|x|^{-1/2}$ má “zobecněný Riemannův integrál” přes $[-1, 0]$ a přes $[0, 1]$, ale už ne přes $[-1, 1]$.

Ale co hůř. Riemannova definice selhává i na omezených funkcích na omezeném intervalu.

Ale co hůř. Riemannova definice selhává i na omezených funkcích na omezeném intervalu. Uvažujme Dirichletovu funkci

$$\text{dir}(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racionální,} \\ 0, & x \text{ iracionální,} \end{cases}$$

Potom funkce dir není Riemannovsky integrovatelná přes $[0, 1]$.

Ale co hůř. Riemannova definice selhává i na omezených funkcích na omezeném intervalu. Uvažujme Dirichletovu funkci

$$\text{dir}(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racionální,} \\ 0, & x \text{ iracionální,} \end{cases}$$

Potom funkce dir není Riemannovsky integrovatelná přes $[0, 1]$.
Uspořádejme všechna racionální čísla do posloupnosti $\{q_n\}_n$ a položme

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, \dots, q_n\}, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom funkce f_n jsou Riemannovsky integrovatelné a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \text{dir},$$

takže limita Riemannovsky integrovatelných funkcí není Riemannovsky integrovatelná (přes $[0, 1]$), ačkoli má horní i dolní integrál konečný.

Ale co hůř. Existuje derivace, která není Riemannovsky integrovatelná. (takže newtonovsky ano, riemannovsky ne). Víme, že existuje derivace na $[-1, 1]$, která je neomezená u nuly, ta nemůže být Riemannovsky integrovatelná přes $[-1, 1]$.

Ale co hůř. Existuje omezená derivace, která není Riemannovsky integrovatelná. Konstrukce takové funkce je těžká. Ukažme si nejprve stavební kámen. Uvažujeme interval (a, b) a funkci

$$F_{a,b}(x) = (x - a)^2(b - x)^2 \sin \frac{1}{(x - a)(b - x)(b - a)}.$$

Potom $F_{a,b}$ má omezenou derivaci na (a, b) , ale tato derivace nemá jednostranné limity v a_+ ani v b_- . Nyní uvažujeme posloupnost $\{(a_j, b_j)\}_j$ navzájem disjunktních intervalů tak, že jsou husté v $(0, 1)$, ale jejich součet délek je menší než 1. Položme

$$F(x) = \begin{cases} F_{a_j, b_j}(x), & x \in (a_j, b_j), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom F má všude derivaci ale ta není Riemannovsky integrovatelná.

Shrnutí (a další moudra). Riemannova i Newtonova definice se hodí k integrování spojitých funkcí na omezeném uzavřeném intervalu, dále každá k integrování některých nespojitých funkcí.

Shrnutí (a další moudra). Riemannova i Newtonova definice se hodí k integrování spojitých funkcí na omezeném uzavřeném intervalu, dále každá k integrování některých nespojitých funkcí.

Na svou dobu geniální. Ale jejich výkon co se týče integrování nespojitých funkcí je velmi neuspokojivý, např. Dirichletovu funkci neintegruje žádná z nich.

Shrnutí (a další moudra). Riemannova i Newtonova definice se hodí k integrování spojitých funkcí na omezeném uzavřeném intervalu, dále každá k integrování některých nespojitých funkcí.

Na svou dobu geniální. Ale jejich výkon co se týče integrování nespojitých funkcí je velmi neuspokojivý, např. Dirichletovu funkci neintegruje žádná z nich.

Výhodou Riemannova přístupu je, že v přesných termínech popisuje jak intuitivně vnímáme zadání: obsah plochy pod grafem funkce. Je použitelná pro *numerickou* integraci.

Shrnutí (a další moudra). Riemannova i Newtonova definice se hodí k integrování spojitých funkcí na omezeném uzavřeném intervalu, dále každá k integrování některých nespojitých funkcí.

Na svou dobu geniální. Ale jejich výkon co se týče integrování nespojitých funkcí je velmi neuspokojivý, např. Dirichletovu funkci neintegruje žádná z nich.

Výhodou Riemannova přístupu je, že v přesných termínech popisuje jak intuitivně vnímáme zadání: obsah plochy pod grafem funkce. Je použitelná pro *numeric*ou integraci.

Výhodou Newtonova přístupu je, že popisuje, jak se integrál opravdu počítá v kalkulu.

Shrnutí (a další moudra). Riemannova i Newtonova definice se hodí k integrování spojitých funkcí na omezeném uzavřeném intervalu, dále každá k integrování některých nespojitých funkcí.

Na svou dobu geniální. Ale jejich výkon co se týče integrování nespojitých funkcí je velmi neuspokojivý, např. Dirichletovu funkci neintegruje žádná z nich.

Výhodou Riemannova přístupu je, že v přesných termínech popisuje jak intuitivně vnímáme zadání: obsah plochy pod grafem funkce. Je použitelná pro *numerickou* integraci.

Výhodou Newtonova přístupu je, že popisuje, jak se integrál opravdu počítá v kalkulu... tedy pokud umíme najít primitivní funkci.

Shrnutí (a další moudra). Riemannova i Newtonova definice se hodí k integrování spojitých funkcí na omezeném uzavřeném intervalu, dále každá k integrování některých nespojitých funkcí.

Na svou dobu geniální. Ale jejich výkon co se týče integrování nespojitých funkcí je velmi neuspokojivý, např. Dirichletovu funkci neintegruje žádná z nich.

Výhodou Riemannova přístupu je, že v přesných termínech popisuje jak intuitivně vnímáme zadání: obsah plochy pod grafem funkce. Je použitelná pro *numerickou* integraci.

Výhodou Newtonova přístupu je, že popisuje, jak se integrál opravdu počítá v kalkulu... tedy pokud umíme najít primitivní funkci.

Pokud některá funkce má integrál podle obou definic, pak vyjde podle obou stejně. Tzv. **Základní věta kalkulu**: Je-li $F' = f$, f Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$, pak

$$(R) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Riemannova definice integrálu počítá s délkou intervalu. H. Lebesgue vymyslel metodu jak měřit obecné podmnožiny přímky (dokonce i vícerozměrného prostoru). Máme tedy k dispozici systém $\mathfrak{M}$ měřitelných podmnožin $\mathbb{R}$ a na něm Lebesgueovu míru λ .

Riemannova definice integrálu počítá s délkou intervalu. H. Lebesgue vymyslel metodu jak měřit obecné podmnožiny přímky (dokonce i vícerozměrného prostoru). Máme tedy k dispozici systém $\mathfrak{M}$ měřitelných podmnožin $\mathbb{R}$ a na něm Lebesgueovu míru λ . Zmiňme důležité vlastnosti:

- pro všechna $a < b \in \mathbb{R}$, $[a, b] \in \mathfrak{M}$ a $\lambda([a, b]) = b - a$,

Riemannova definice integrálu počítá s délkou intervalu. **H. Lebesgue** vymyslel metodu jak měřit obecné podmnožiny přímky (dokonce i vícerozměrného prostoru). Máme tedy k dispozici systém $\mathfrak{M}$ **měřitelných podmnožin** $\mathbb{R}$ a na něm Lebesgueovu míru λ . Zmiňme důležité vlastnosti:

- pro všechna $a < b \in \mathbb{R}$, $[a, b] \in \mathfrak{M}$ a $\lambda([a, b]) = b - a$,
- $A_j \in \mathfrak{M}$, A_j po dvou disjunktní $\implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$ a

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j).$$

Riemannova definice integrálu počítá s délkou intervalu. **H. Lebesgue** vymyslel metodu jak měřit obecné podmnožiny přímky (dokonce i vícerozměrného prostoru). Máme tedy k dispozici systém $\mathfrak{M}$ **měřitelných podmnožin** $\mathbb{R}$ a na něm Lebesgueovu míru λ . Zmiňme důležité vlastnosti:

- pro všechna $a < b \in \mathbb{R}$, $[a, b] \in \mathfrak{M}$ a $\lambda([a, b]) = b - a$,
- $A_j \in \mathfrak{M}$, A_j po dvou disjunktní $\implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$ a

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j).$$

Nechť $M \in \mathfrak{M}$. Řekneme, že funkce $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ je **měřitelná**, jestliže pro všechna $c \in \mathbb{R}$ je $\{x: f(x) > c\} \in \mathfrak{M}$.

Riemannova definice integrálu počítá s délkou intervalu. **H. Lebesgue** vymyslel metodu jak měřit obecné podmnožiny přímky (dokonce i vícerozměrného prostoru). Máme tedy k dispozici systém $\mathfrak{M}$ **měřitelných podmnožin** $\mathbb{R}$ a na něm Lebesgueovu míru λ . Zmiňme důležité vlastnosti:

- pro všechna $a < b \in \mathbb{R}$, $[a, b] \in \mathfrak{M}$ a $\lambda([a, b]) = b - a$,
- $A_j \in \mathfrak{M}$, A_j po dvou disjunktní $\implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$ a

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j).$$

Nechť $M \in \mathfrak{M}$. Řekneme, že funkce $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ je **měřitelná**, jestliže pro všechna $c \in \mathbb{R}$ je $\{x: f(x) > c\} \in \mathfrak{M}$.

Lebesgueovské dělení D měřitelné množiny M je konečný systém $\{A_j\}_j$ navzájem disjunktních měřitelných podmnožin M . Oproti riemannovskému dělení, A_j nemusí být intervaly.

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je měřitelná množina a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ je *nezáporná* měřitelná funkce. Nechť $D = \{A_1, \dots, A_m\}$ je Lebesgueovské dělení M , přiřaďme **dolní součet**

$$L(f, D) = \sum_{j=1}^m \lambda(A_j) \inf_{A_j} f.$$

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je měřitelná množina a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ je *nezáporná* měřitelná funkce. Nechť $D = \{A_1, \dots, A_m\}$ je Lebesgueovské dělení M , přiřaďme **dolní součet**

$$L(f, D) = \sum_{j=1}^m \lambda(A_j) \inf_{A_j} f.$$

Lebesgueův integrál funkce f definujeme jako supremum všech (lebesgueovských) dolních součtů. Může vyjít i $+\infty$.

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je měřitelná množina a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ je *nezáporná* měřitelná funkce. Nechť $D = \{A_1, \dots, A_m\}$ je Lebesgueovské dělení M , přiřaďme **dolní součet**

$$L(f, D) = \sum_{j=1}^m \lambda(A_j) \inf_{A_j} f.$$

Lebesgueův integrál funkce f definujeme jako supremum všech (lebesgueovských) dolních součtů. Může vyjít i $+\infty$.

Pro funkce střídající znaménko definujeme Lebesgueův integrál tak, aby integrál rozdílu byl rozdíl integrálů, pomocí rozkladu funkce na kladnou a zápornou část. Pokud to vede k neurčitému výrazu $\infty - \infty$, zůstává Lebesgueův integrál nedefinován.



Henri Léon Lebesgue (1875–1941)

Výhody Lebesgueova integrálu:

Výhody Lebesgueova integrálu:

- Široká třída integrovatelných funkcí. Zahrnuje Riemannův integrál. Integruje všechny rozumné nezáporné funkce.

Výhody Lebesgueova integrálu:

- Široká třída integrovatelných funkcí. Zahrnuje Riemannův integrál. Integruje všechny rozumné nezáporné funkce.
- Za přijatelných podmínek je limita posloupnosti integrovatelných funkcí integrovatelná a integrál limity je limita integrálů.

Výhody Lebesgueova integrálu:

- Široká třída integrovatelných funkcí. Zahrnuje Riemannův integrál. Integruje všechny rozumné nezáporné funkce.
- Za přijatelných podmínek je limita posloupnosti integrovatelných funkcí integrovatelná a integrál limity je limita integrálů.
- Myšlenku lze použít na obecnější než jednorozměrné integrace (vícerozměrné, křivkové, plošné, pravděpodobnostní, ...).

Výhody Lebesgueova integrálu:

- Široká třída integrovatelných funkcí. Zahrnuje Riemannův integrál. Integruje všechny rozumné nezáporné funkce.
- Za přijatelných podmínek je limita posloupnosti integrovatelných funkcí integrovatelná a integrál limity je limita integrálů.
- Myšlenku lze použít na obecnější než jednorozměrné integrace (vícerozměrné, křivkové, plošné, pravděpodobnostní, ...).
- Je naprosto profesionální. V odborné matematické literatuře, pokud není výslovně řečeno jinak, integrál=Lebesgueův integrál.

Výhody Lebesgueova integrálu:

- Široká třída integrovatelných funkcí. Zahrnuje Riemannův integrál. Integruje všechny rozumné nezáporné funkce.
- Za přijatelných podmínek je limita posloupnosti integrovatelných funkcí integrovatelná a integrál limity je limita integrálů.
- Myšlenku lze použít na obecnější než jednorozměrné integrace (vícerozměrné, křivkové, plošné, pravděpodobnostní, ...).
- Je naprosto profesionální. V odborné matematické literatuře, pokud není výslovně řečeno jinak, integrál=Lebesgueův integrál.

Nevýhody Lebesgueova integrálu:

Nevýhody Lebesgueova integrálu:

- Pokládá se za nepochopitelný pro studenty. Nedává se do učebních plánů kalkulu. Démonizuje se.

Nevýhody Lebesgueova integrálu:

- Pokládá se za nepochopitelný pro studenty. Nedává se do učebních plánů kalkulu. Démonizuje se.
- Nezahrnuje tzv. neabsolutně konvergentní integrály. Neintegruje všechny derivace.

Nevýhody Lebesgueova integrálu:

- Pokládá se za nepochopitelný pro studenty. Nedává se do učebních plánů kalkulu. Démonizuje se.
- Nezahrnuje tzv. neabsolutně konvergentní integrály. Neintegruje všechny derivace.

Příklady. Integrály

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x^2} dx,$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

mají smysl jako Newtonovy, ale ne jako Lebesgueovy.

Problém. Nedal by se vymyslet integrál, který by zahrnul Lebesgueův i Newtonův? Ve středu zájmu před sto lety.

Problém. Nedal by se vymyslet integrál, který by zahrnul Lebesgueův i Newtonův? Ve středu zájmu před sto lety.

Řešení. A. Denjoy (1884–1974) [2]. Definice velmi složitá.

Jiné (též složité) definice, dávající stejnou třídu integrovatelných funkcí:

N. N. Luzin (1883–1950) [6],

O. Perron (1880–1975) [7] ... viz pojednání v Jarníkově knize.

Problém. Nedal by se vymyslet integrál, který by zahrnul Lebesgueův i Newtonův? Ve středu zájmu před sto lety.

Řešení. A. Denjoy (1884–1974) [2]. Definice velmi složitá.

Jiné (též složité) definice, dávající stejnou třídu integrovatelných funkcí:

N. N. Luzin (1883–1950) [6],

O. Perron (1880–1975) [7] ... viz pojednání v Jarníkově knize.

Ve skutečnosti některé z těchto definic fungují na ještě širší třídu integrovatelných funkcí, než máme na mysli ...



Arnaud Denjoy (1884–1974)

Objev padesátých let: k Denjoy–Perronově integrálu lze dojít malou modifikací původní Riemannovy definice! Nezávisle J. Kurzweil, [4] a R. Henstock, [3].

Objev padesátých let: k Denjoy–Perronově integrálu lze dojít malou modifikací původní Riemannovy definice! Nezávisle J. Kurzweil, [4] a R. Henstock, [3].

Nechť $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ je funkce (tzv. měrka). Řekneme, že Riemannovské dělení $D : a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{m-1} \leq \xi_m \leq x_m = b$ je δ -jemné, jestliže

$$x_i - x_{i-1} \leq \delta(\xi_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Objev padesátých let: k Denjoy–Perronově integrálu lze dojít malou modifikací původní Riemannovy definice! Nezávisle J. Kurzweil, [4] a R. Henstock, [3].

Nechť $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ je funkce (tzv. **měrka**). Řekneme, že Riemannovské dělení $D : a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{m-1} \leq \xi_m \leq x_m = b$ je **δ -jemné**, jestliže

$$x_i - x_{i-1} \leq \delta(\xi_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Číslo $\mathcal{I}$ nazveme (**Henstock-)**Kurzweilovým **integrálem** funkce f přes $[a, b]$, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ existuje **měrka** δ tak, že pro každé δ -jemné dělení D intervalu $[a, b]$ je

$$|\mathcal{I} - R(f, D)| < \varepsilon.$$

Objev padesátých let: k Denjoy–Perronově integrálu lze dojít malou modifikací původní Riemannovy definice! Nezávisle J. Kurzweil, [4] a R. Henstock, [3].

Nechť $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ je funkce (tzv. **měrka**). Řekneme, že Riemannovské dělení $D : a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{m-1} \leq \xi_m \leq x_m = b$ je **δ -jemné**, jestliže

$$x_i - x_{i-1} \leq \delta(\xi_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Číslo $\mathcal{I}$ nazveme (**Henstock-**)**Kurzweilovým integrálem** funkce f přes $[a, b]$, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ existuje **měrka** δ tak, že pro každé δ -jemné dělení D intervalu $[a, b]$ je

$$|\mathcal{I} - R(f, D)| < \varepsilon.$$

Takové číslo $\mathcal{I}$ je nejvýše jedno. Značíme

$$(HK) \int_a^b f(x) dx.$$

Objev padesátých let: k Denjoy–Perronově integrálu lze dojít malou modifikací původní Riemannovy definice! Nezávisle J. Kurzweil, [4] a R. Henstock, [3].

Nechť $\delta : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ je funkce (tzv. **měrka**). Řekneme, že Riemannovské dělení $D : a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{m-1} \leq \xi_m \leq x_m = b$ je **δ -jemné**, jestliže

$$x_i - x_{i-1} \leq \delta(\xi_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

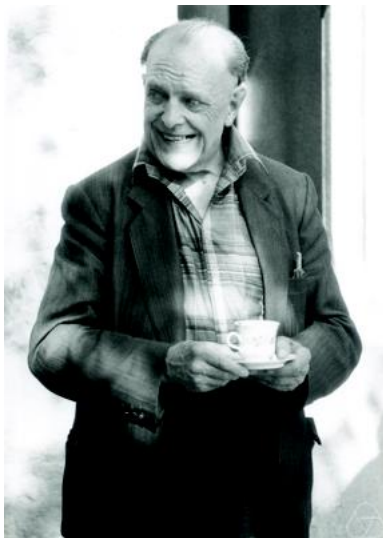
Číslo $\mathcal{I}$ nazveme (**Henstock-)**Kurzweilovým **integrálem** funkce f přes $[a, b]$, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ existuje **měrka** δ tak, že pro každé δ -jemné dělení D intervalu $[a, b]$ je

$$|\mathcal{I} - R(f, D)| < \varepsilon.$$

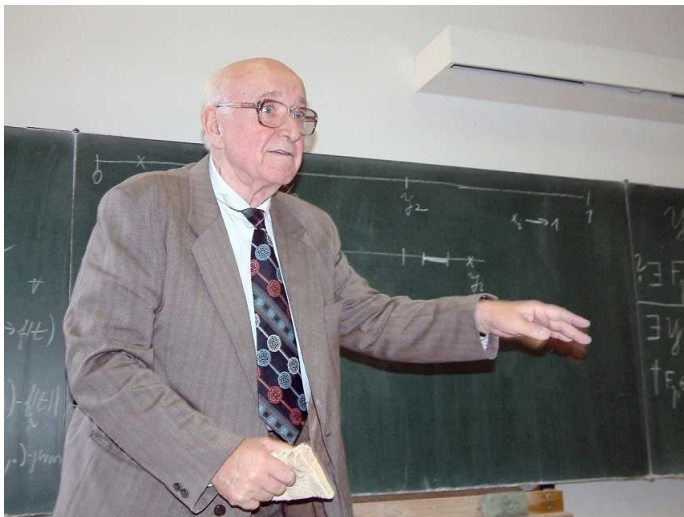
Takové číslo $\mathcal{I}$ je nejvýše jedno. Značíme

$$(HK) \int_a^b f(x) dx.$$

Jediný rozdíl proti Riemannově definici: δ není konstanta.



Ralph Henstock (1923–2007)



Jaroslav Kurzweil (*1926)

Kurzweilův integrál je *neabsolutně konvergentní*, podobně jako řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

Kurzweilův integrál je *neabsolutně konvergentní*, podobně jako řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

Nevýhody neabsolutně konvergentní integrace: potřebuje bohatou strukturu (např. bere v úvahu uspořádání reálných čísel, podobně jako neabsolutně konvergentní řady berou v úvahu uspořádání přirozených čísel).

Kurzweilův integrál je *neabsolutně konvergentní*, podobně jako řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

Nevýhody neabsolutně konvergentní integrace: potřebuje bohatou strukturu (např. bere v úvahu uspořádání reálných čísel, podobně jako neabsolutně konvergentní řady berou v úvahu uspořádání přirozených čísel).

Šlo by nahradit Riemannův integrál Kurzweilovým ve výuce kalkulu?

Kurzweilův integrál je *neabsolutně konvergentní*, podobně jako řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ je neabsolutně konvergentní.

Nevýhody neabsolutně konvergentní integrace: potřebuje bohatou strukturu (např. bere v úvahu uspořádání reálných čísel, podobně jako neabsolutně konvergentní řady berou v úvahu uspořádání přirozených čísel).

Šlo by nahradit Riemannův integrál Kurzweilovým ve výuce kalkulu?

Pokusy byly, např. [5], ale zatím se moc neujalo.

Kurzweilův integrál vznikl drobnou úpravou Riemannovy “konstruktivní” definice. Velmi nový objev: Stejně mocný integrál (co se týče třídy integrovatelných funkcí) lze zavést drobnou úpravou Newtonovy “deskriptivní” definice, [1].

Kurzweilův integrál vznikl drobnou úpravou Riemannovy “konstruktivní” definice. Velmi nový objev: Stejně mocný integrál (co se týče třídy integrovatelných funkcí) lze zavést drobnou úpravou Newtonovy “deskriptivní” definice, [1].

Nechť $F, f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce. Řekneme, že F je neurčitý **integrál Bendové**, či že f je **derivace Bendové** funkce F , jestliže existuje rostoucí funkce $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (tzv. *kontrolní funkce*) tak, že pro všechna $x \in (a, b)$ je

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{F(y) - F(x) - f(x)(y - x)}{\gamma(y) - \gamma(x)} = 0.$$

Kurzweilův integrál vznikl drobnou úpravou Riemannovy “konstruktivní” definice. Velmi nový objev: Stejně mocný integrál (co se týče třídy integrovatelných funkcí) lze zavést drobnou úpravou Newtonovy “deskriptivní” definice, [1].

Nechť $F, f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce. Řekneme, že F je neurčitý **integrál Bendové**, či že f je **derivace Bendové** funkce F , jestliže existuje rostoucí funkce $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (tzv. *kontrolní funkce*) tak, že pro všechna $x \in (a, b)$ je

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{F(y) - F(x) - f(x)(y - x)}{\gamma(y) - \gamma(x)} = 0.$$

Určitý integrál se pak definuje jako přírůstek neurčitého.



Hana Krulišová roz. Bendová (*1988)

Výhody integrálu Bendové:

Výhody integrálu Bendové:

- Naprosto elementární definice

Výhody integrálu Bendové:

- Naprosto elementární definice
- Snadná manipulace při důkazech vzorců, jako per partes a substituce (derivace součinu a složené funkce)

Výhody integrálu Bendové:

- Naprosto elementární definice
- Snadná manipulace při důkazech vzorců, jako per partes a substituce (derivace součinu a složené funkce)
- Snadný důkaz věty o monotonní konvergenci

Výhody integrálu Bendové:

- Naprosto elementární definice
- Snadná manipulace při důkazech vzorců, jako per partes a substituce (derivace součinu a složené funkce)
- Snadný důkaz věty o monotonní konvergenci
- Lze vybudovat míru jako integrál z charakteristické funkce

Výhody integrálu Bendové:

- Naprosto elementární definice
- Snadná manipulace při důkazech vzorců, jako per partes a substituce (derivace součinu a složené funkce)
- Snadný důkaz věty o monotonní konvergenci
- Lze vybudovat míru jako integrál z charakteristické funkce

Zákon zachování obtížnosti:

Výhody integrálu Bendové:

- Naprosto elementární definice
- Snadná manipulace při důkazech vzorců, jako per partes a substituce (derivace součinu a složené funkce)
- Snadný důkaz věty o monotónní konvergenci
- Lze vybudovat míru jako integrál z charakteristické funkce

Zákon zachování obtížnosti:

- Průnik dvou měřitelných množin je měřitelný – důkaz už není tak křišťálově jednoduchý

Výhody integrálu Bendové:

- Naprosto elementární definice
- Snadná manipulace při důkazech vzorců, jako per partes a substituce (derivace součinu a složené funkce)
- Snadný důkaz věty o monotonní konvergenci
- Lze vybudovat míru jako integrál z charakteristické funkce

Zákon zachování obtížnosti:

- Průnik dvou měřitelných množin je měřitelný – důkaz už není tak křišťálově jednoduchý

Nevýhoda:

Výhody integrálu Bendové:

- Naprosto elementární definice
- Snadná manipulace při důkazech vzorců, jako per partes a substituce (derivace součinu a složené funkce)
- Snadný důkaz věty o monotonní konvergenci
- Lze vybudovat míru jako integrál z charakteristické funkce

Zákon zachování obtížnosti:

- Průnik dvou měřitelných množin je měřitelný – důkaz už není tak křišťálově jednoduchý

Nevýhoda:

- Zobecnění do vyšší dimenze ztrácí eleganci a názornost



H. Bendová and J. Malý.

An elementary way to introduce a Perron-like integral.

Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 36(1):153–164, 2011.



A. Denjoy.

Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue.

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 154:859–862, 1912.



R. Henstock.

Definitions of Riemann type of the variational integrals.

Proc. London Math. Soc. (3), 11:402–418, 1961.



J. Kurzweil.

Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter.

Czechoslovak Math. J., 7 (82):418–449, 1957.



P. Y. Lee and R. Výborný.

Integral: an easy approach after Kurzweil and Henstock, volume 14 of *Australian Mathematical Society Lecture Series*.

Cambridge University Press, Cambridge, 2000.



N. Lusin.

Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy.

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 155:1475–1478, 1912.



O. Perron.

Über den Integralbegriff.

Sitzungsber. Heidelberg Akad. Wiss., A16:1–16, 1914.