

Ve stínu Borsukovy-Ulamovy věty

Pavel Ludvík

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TUO



22. dubna 2014

Občasný Seminář z Matematické Analýzy

Seminář se koná za podpory:

Seminář se koná za podpory:



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Svět vědy

CZ 1.07/2.3.00/35.0018

Otázky zvědavého posluchače

A Kdo (nebo snad co) je Borsuk?

Otázky zvědavého posluchače

A Kdo (nebo snad co) je Borsuk?

B A co na to Ulam?

Otázky zvědavého posluchače

- A Kdo (nebo snad co) je Borsuk?
- B A co na to Ulam?
- C Dozvíme se vůbec něco Borsukově-Ulamově větě?

Otázky zvědavého posluchače

- A Kdo (nebo snad co) je Borsuk?
- B A co na to Ulam?
- C Dozvíme se vůbec něco Borsukově-Ulamově větě?
- D Nebo spíše o tom záhadném, co leží v jejím stínu?



Borsuk (polský výraz pro *jezevce*) – rodové jméno sdružující 5 rodů z čeledi lasicovitých šelem. Jediným českým zástupcem je jezevec lesní. Současné molekulární studie naznačují, že tato skupina není jednotná: „smrdutí jezevci“ – rod *Mydaus* – ve skutečnosti nemají se zbytkem této skupiny nic společného a patří spíše k jiným smrdutým šelmám, totiž ke skunkům.
(Zdroj: cs.wikipedia.org)



E Takže nakonec přeci jen seminář o **jezevcích**???

Borsuk (polský výraz pro *jezevce*) – rodové jméno sdružující 5 rodů z čeledi lasicovitých šelem. Jediným českým zástupcem je jezevec lesní. Současné molekulární studie naznačují, že tato skupina není jednotná: „smrdutí jezevci“ – rod *Mydaus* – ve skutečnosti nemají se zbytkem této skupiny nic společného a patří spíše k jiným smrdutým šelmám, totiž ke skunkům.

(Zdroj: cs.wikipedia.org)



Pevný bod

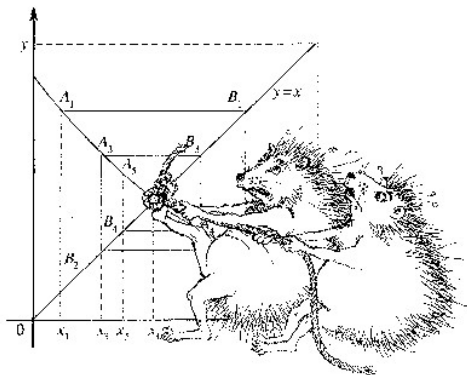
Definice.

Zobrazení $f : X \rightarrow X$ má pevný bod $\mathbf{x} \in X$, pokud platí $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Pevný bod

Definice.

Zobrazení $f : X \rightarrow X$ má pevný bod $\mathbf{x} \in X$, pokud platí $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.



Pevný bod

Definice.

Zobrazení $f : X \rightarrow X$ má pevný bod $\mathbf{x} \in X$, pokud platí $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Poznámky

- X je množina bez dalších požadavků. Obecně nelze o existenci pevného bodu nic říct.

Pevný bod

Definice.

Zobrazení $f : X \rightarrow X$ má pevný bod $\mathbf{x} \in X$, pokud platí $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Poznámky

- X je množina bez dalších požadavků. Obecně nelze o existenci pevného bodu nic říct.
- Existence pevného bodu je v matematice předmětem mnoha tvrzení, která jsou hojně užívaná v aplikacích (hledání řešení diferenciálních a integrálních rovnic; široké využití v matematické ekonomii, teorii her, ...)

Pevný bod

Definice.

Zobrazení $f : X \rightarrow X$ má pevný bod $\mathbf{x} \in X$, pokud platí $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Poznámky

- X je množina bez dalších požadavků. Obecně nelze o existenci pevného bodu nic říct.
- Existence pevného bodu je v matematice předmětem mnoha tvrzení, která jsou hojně užívaná v aplikacích (hledání řešení diferenciálních a integrálních rovnic; široké využití v matematické ekonomii, teorii her, ...)
- I v anglicky mluvících zemích se někdy používá německý termín *Fixpunkt*.

Věty o pevných bodech I

Kontrakce

Nechť (X, ρ) je metrický prostor, pak zobrazení $T : X \rightarrow X$ nazveme *kontrakcí*, existuje-li $\alpha \in (0, 1)$ takové, že

$$\rho(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leq \alpha \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ pro každé } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

Věty o pevných bodech I

Kontrakce

Nechť (X, ρ) je metrický prostor, pak zobrazení $T : X \rightarrow X$ nazveme *kontrakcí*, existuje-li $\alpha \in (0, 1)$ takové, že

$$\rho(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leq \alpha \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ pro každé } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

Banachova věta

Nechť X je *úplný metrický prostor* a $T : X \rightarrow X$ *kontrakce*. Pak má T právě jeden pevný bod, tj. existuje právě jedno $\mathbf{x}_0 \in X$ takové, že $T(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

Věty o pevných bodech I

Kontrakce

Nechť (X, ρ) je metrický prostor, pak zobrazení $T : X \rightarrow X$ nazveme *kontrakcí*, existuje-li $\alpha \in (0, 1)$ takové, že

$$\rho(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leq \alpha \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ pro každé } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

Banachova věta

Nechť X je *úplný metrický prostor* a $T : X \rightarrow X$ *kontrakce*. Pak má T právě jeden pevný bod, tj. existuje právě jedno $\mathbf{x}_0 \in X$ takové, že $T(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

A Úplným metrickým prostorem je například $\mathbb{R}^n$ s metrikou $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ (za normu bereme například standardní Euklidovskou velikost vektoru).

Věty o pevných bodech I

Kontrakce

Nechť (X, ρ) je metrický prostor, pak zobrazení $T : X \rightarrow X$ nazveme *kontrakcí*, existuje-li $\alpha \in (0, 1)$ takové, že

$$\rho(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leq \alpha \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ pro každé } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

Banachova věta

Nechť X je *úplný metrický prostor* a $T : X \rightarrow X$ *kontrakce*. Pak má T právě jeden pevný bod, tj. existuje právě jedno $\mathbf{x}_0 \in X$ takové, že $T(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

A Úplným metrickým prostorem je například $\mathbb{R}^n$ s metrikou $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ (za normu bereme například standardní Euklidovskou velikost vektoru).

B Větu v roce 1922 formuloval a dokázal **Stefan Banach**.

Věty o pevných bodech I

Kontrakce

Nechť (X, ρ) je metrický prostor, pak zobrazení $T : X \rightarrow X$ nazveme *kontrakcí*, existuje-li $\alpha \in (0, 1)$ takové, že

$$\rho(T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})) \leq \alpha \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ pro každé } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

Banachova věta

Nechť X je *úplný metrický prostor* a $T : X \rightarrow X$ *kontrakce*. Pak má T právě jeden pevný bod, tj. existuje právě jedno $\mathbf{x}_0 \in X$ takové, že $T(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.

- A Úplným metrickým prostorem je například $\mathbb{R}^n$ s metrikou $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ (za normu bereme například standardní Euklidovskou velikost vektoru).
- B Větu v roce 1922 formuloval a dokázal **Stefan Banach**.
- C Klasický důkaz je *konstruktivní* a dává nám návod, jak pevný bod nalézt, tzv. *metodu postupných aproximací*.

Příklad

Řešte rovnici

$$x = \frac{1}{4 + x^2}$$

metodou postupných aproximací.

Příklad

Řešte rovnici

$$x = \frac{1}{4 + x^2}$$

metodou postupných aproximací.

1) Dokážeme, že $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ je kontrakce.

Příklad

Řešte rovnici

$$x = \frac{1}{4 + x^2}$$

metodou postupných aproximací.

1) Dokážeme, že $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ je kontrakce.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{4+x^2} - \frac{1}{4+y^2} \right| = \frac{|x^2 - y^2|}{(4+x^2)(4+y^2)} \\ &= \frac{|x+y|}{(4+x^2)(4+y^2)} |x-y|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x| + |y| \leq \frac{4+x^2+4+y^2}{4} \leq 2 + \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^2y^2}{8} \\ &= \frac{1}{8}(4+x^2)(4+y^2), \end{aligned}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{8} |x - y|.$$

Příklad

Řešte rovnici

$$x = \frac{1}{4 + x^2}$$

metodou postupných aproximací.

- 1) Dokážeme, že $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$ je kontrakce.
- 2) Definujeme posloupnost

$$x_0 = 1$$

$$x_{n+1} = f(x_n), \text{ pro } n \in \mathbb{N}_0.$$

Tato posloupnost konverguje k pevnému bodu f a hledané řešení je tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Věty o pevných bodech II

Brouwerova věta o pevném bodu – dimenze 1

Každá spojitá funkce f zobrazující *uzavřený interval* $\langle a, b \rangle$ do sebe má nejméně jeden pevný bod.

Věty o pevných bodech II

Brouwerova věta o pevném bodu – dimenze 1

Každá spojitá funkce f zobrazující *uzavřený interval* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ do sebe má nejméně jeden pevný bod.

Věta o střední hodnotě

Nechť je f spojitá funkce definovaná na uzavřeném intervalu $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ a $f(\mathbf{b}) \leq f(\mathbf{a})$. Pak pro každé $\mathbf{c} \in \langle f(\mathbf{b}), f(\mathbf{a}) \rangle$ existuje bod $\mathbf{x}_0 \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, že $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{c}$.

Věty o pevných bodech II

Brouwerova věta o pevném bodu – dimenze 1

Každá spojitá funkce f zobrazující *uzavřený interval* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ do sebe má nejméně jeden pevný bod.

Důkaz.

Definujme pomocnou funkci $F(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$. Zřejmě $F(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) - \mathbf{a} \geq 0$ a $F(\mathbf{b}) = f(\mathbf{b}) - \mathbf{b} \leq 0$. Proto z Věty o střední hodnotě existuje $\mathbf{x}_0 \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, že $F(\mathbf{x}_0) = 0$, a tudíž $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$. □

Věty o pevných bodech III

Brouwerova věta o pevném bodu

Nechť $B^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ je uzavřená jednotková koule v $\mathbb{R}^n$. Pak má spojitě zobrazení $f : B^n \rightarrow B^n$ pevný bod.

Věty o pevných bodech III

Brouwerova věta o pevném bodu

Nechť $B^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ je uzavřená jednotková koule v $\mathbb{R}^n$. Pak má spojité zobrazení $f: B^n \rightarrow B^n$ pevný bod.

A Tvar B^n není podstatný, uzavřenou kouli můžeme nahradit libovolnou (neprázdnou) kompaktní konvexní množinou v $\mathbb{R}^n$.

Věty o pevných bodech III

Brouwerova věta o pevném bodu

Nechť $B^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ je uzavřená jednotková koule v $\mathbb{R}^n$. Pak má spojité zobrazení $f: B^n \rightarrow B^n$ pevný bod.

- A Tvar B^n není podstatný, uzavřenou kouli můžeme nahradit libovolnou (neprázdnou) kompaktní konvexní množinou v $\mathbb{R}^n$.
- B Větu dokázal v roce 1910 holandský matematik **Luitzen Egbertus Jan Brouwer**.

Věty o pevných bodech III

Brouwerova věta o pevném bodu

Nechť $B^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ je uzavřená jednotková koule v $\mathbb{R}^n$. Pak má spojité zobrazení $f: B^n \rightarrow B^n$ pevný bod.

- A Tvar B^n není podstatný, uzavřenou kouli můžeme nahradit libovolnou (neprázdnou) kompaktní konvexní množinou v $\mathbb{R}^n$.
- B Větu dokázal v roce 1910 holandský matematik **Luitzen Egbertus Jan Brouwer**.
- C Větu lze zobecnit do nekonečné dimenze, pak se nazývá *Schauderovou větou* (v plné obecnosti pro topologické vektorové prostory byla dokázána až roku 2002).

Úkol 1

Mějme spojitě zobrazení f uzavřeného intervalu $\langle a, b \rangle$ na sebe. Dokažte, že zobrazení $g = f^2$ (složení f se sebou samým) má alespoň dva pevné body. Zůstane tvrzení pravdivé, pokud je f zobrazení do $\langle a, b \rangle$, ale nikoli na?

Historická expozice

V dávných dobách, kolem roku 1930, kdy ještě Lvov ležel v Polsku...

Historická expozice

V dávných dobách, kolem roku 1930, kdy ještě Lvov ležel v Polsku...
...se v restauračním zařízení zvaném *Kawiarnia Szkocka* (= Skotská kavárna)...



V dávných dobách, kolem roku 1930, kdy ještě Lvov ležel v Polsku...

...se v restauračním zařízení zvaném *Kawiarnia Szkocka* (= Skotská kavárna)...

...scházeli matematikové působící na Lvovské technické univerzitě a společně řešili obtížné matematické problémy. Z počátku své poznámky zapisovali tužkou na mramorové desky tamějších stolů. Zaslýchnuvši opakujících se a stále naléhavějších stížností personálu, věnovala skupině manželka jednoho z nich, jistá paní Lucja Banachová, velký zápisník. Ten vešel do dějin matematiky jako *Scottish Book* a po dlouhých válečných a jiných peripetiích byl vydán v USA až roku 1957.

V dávných dobách, kolem roku 1930, kdy ještě Lvov ležel v Polsku...

...se v restauračním zařízení zvaném *Kawiarnia Szkocka* (= Skotská kavárna)...

...scházeli matematikové působící na Lvovské technické univerzitě a společně řešili obtížné matematické problémy. Z počátku své poznámky zapisovali tužkou na mramorové desky tamějších stolů. Zaslechnuvši opakujících se a stále naléhavějších stížností personálu, věnovala skupině manželka jednoho z nich, jistá paní Lucja Banachová, velký zápisník. Ten vešel do dějin matematiky jako *Scottish Book* a po dlouhých válečných a jiných peripetiích byl vydán v USA až roku 1957.

Do Lvovské skupiny patřili například: [Hugo Steinhaus](#), [Stefan Banach](#), [Stanisław Mazur](#), [Stanisław Ulam](#), [Juliusz Schauder](#), ...

Historická expozice

V dávných dobách, kolem roku 1930, kdy ještě Lvov ležel v Polsku...

...se v restauračním zařízení zvaném *Kawiarnia Szkocka* (= Skotská kavárna)...

...scházeli matematikové působící na Lvovské technické univerzitě a společně řešili obtížné matematické problémy. Z počátku své poznámky zapisovali tužkou na mramorové desky tamějších stolů. Zaslouchnuvši opakujících se a stále naléhavějších stížností personálu, věnovala skupině manželka jednoho z nich, jistá paní Lucja Banachová, velký zápisník. Ten vešel do dějin matematiky jako *Scottish Book* a po dlouhých válečných a jiných peripetiích byl vydán v USA až roku 1957.

Do Lvovské skupiny patřili například: [Hugo Steinhaus](#), [Stefan Banach](#), [Stanisław Mazur](#), [Stanisław Ulam](#), [Juliusz Schauder](#), ...

Konkurenční skupina polských matematiků se vytvořila ve Varšavě: [Wacław Sierpiński](#), [Kazimierz Kuratowski](#), [Karol Borsuk](#), [Alfred Tarski](#), ...

Matematikové I



Matematikové I

Luitzen Egbertus Jan Brouwer 



Topology — Druid 

Brouwer topological degree,
Brouwer Fix-Point Theorem

Founder of the mathematical
philosophy of intuitionism, inspirer
of Ludwig Wittgenstein

 10/10

Hugo Steinhaus 



Mathematics — Educator 

DISCOVERING OF STEFAN
BANACH

Banach-Steinhaus Theorem

 10/10

Matematikové I

Luitzen Egbertus Jan Brouwer



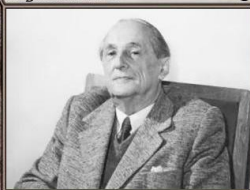
Topology — Druid

Brouwer topological degree,
Brouwer Fix-Point Theorem

Founder of the mathematical
philosophy of intuitionism, inspirer
of Ludwig Wittgenstein

10/10

Hugo Steinhaus



Mathematics — Educator

DISCOVERING OF STEFAN
BANACH

Banach-Steinhaus Theorem

10/10

Stefan Banach



Functional Analysis — Elder

Banach space, Banach algebra, Banach
generalized limit, Banach-Mazur
distance, Banach Fix-Point Theorem,
Hahn-Banach Theorem,
Banach-Steinhaus Theorem, Closed
Graph Theorem, Banach-Tarski
Theorem

10/10

Borsukova-Ulamova věta I

Značme jednotkovou kružnici jako $C := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$. Dvojici bodů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$ nazveme *antipodálními* (správně česky protinožeckými), pokud $\mathbf{x}_1 = -\mathbf{x}_2$.

Borsukova-Ulamova věta I

Značme jednotkovou kružnici jako $C := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$. Dvojici bodů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$ nazveme *antipodálními* (správně česky protinožeckými), pokud $\mathbf{x}_1 = -\mathbf{x}_2$.

Borsukova-Ulamova věta pro kružnici

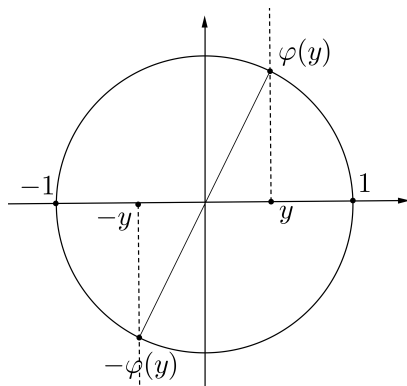
Nechť $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje dvojice antipodálních bodů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$ taková, že $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$.

Důkaz Borsukovy-Ulamovy věty pro kružnici

Důkaz Borsukovy-Ulamovy věty pro kružnici

A Definujeme pomocnou funkci $g : I = \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ následujícím způsobem: Pro dané $y \in I$ najdeme $\varphi(y) \in \mathbb{C}$ jako průsečík horní půlkružnice a kolmice k ose x vedené z bodu y . Pak

$$g(y) := f(\varphi(y)) - f(-\varphi(y)).$$



Důkaz Borsukovy-Ulamovy věty pro kružnici

A Definujeme pomocnou funkci $g : I = \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ následujícím způsobem: Pro dané $y \in I$ najdeme $\varphi(y) \in \mathbb{C}$ jako průsečík horní půlkružnice a kolmice k ose x vedené z bodu y . Pak

$$g(y) := f(\varphi(y)) - f(-\varphi(y)).$$

B Hodnoty funkce g v krajních bodech I jsou $g(1) = f([1, 0]) - f([-1, 0])$ a $g(-1) = f([-1, 0]) - f([1, 0])$. Tedy $g(1) = -g(-1)$.

Důkaz Borsukovy-Ulamovy věty pro kružnici

A Definujeme pomocnou funkci $g : I = \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ následujícím způsobem: Pro dané $y \in I$ najdeme $\varphi(y) \in \mathbb{C}$ jako průsečík horní půlkružnice a kolmice k ose x vedené z bodu y . Pak

$$g(y) := f(\varphi(y)) - f(-\varphi(y)).$$

B Hodnoty funkce g v krajních bodech I jsou $g(1) = f([1, 0]) - f([-1, 0])$ a $g(-1) = f([-1, 0]) - f([1, 0])$. Tedy $g(1) = -g(-1)$.

C Z věty o střední hodnotě dostaneme bod $y \in I$, kde $g(y) = 0$. Pak pro dvojici antipodálních bodů $x = \varphi(y)$ a $x^* = -x$ platí $f(x) = f(x^*)$.

Důsledky Borsukovy-Ulamovy věty pro kružnici

V každém okamžiku existují na zemském rovníku dvě antipodální místa, kde je stejná teplota.

Důsledky Borsukovy-Ulamovy věty pro kružnici

V každém okamžiku existují na zemském rovníku dvě antipodální místa, kde je stejná teplota.

Důkaz.

Body rovníku ztotožníme s body $\mathbb{C}$. Definujeme funkci $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ jako hodnotu teploty v místě $\mathbb{C}$. Podle Borsukovy-Ulamovy věty existují antipodální body $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{C}$ ve kterých $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$, tj. je v nich stejná teplota.



Důsledky Borsukovy-Ulamovy věty pro kružnici

V každém okamžiku existují na zemském rovníku dvě antipodální místa, kde je stejná teplota.

Důkaz.

Body rovníku ztotožníme s body $\mathbb{C}$. Definujeme funkci $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ jako hodnotu teploty v místě $\mathbb{C}$. Podle Borsukovy-Ulamovy věty existují antipodální body $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{C}$ ve kterých $f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2)$, tj. je v nich stejná teplota.

Poznámka: Použití Borsukovy-Ulamovy věty vyžaduje předpokládat, že se teplota mění spojitě vzhledem k poloze na rovníku. $\square$

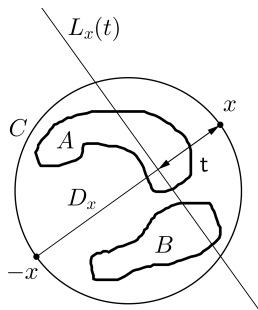
Důsledky Borsukovy-Ulamovy věty pro kružnici

První věta o krájení koláče

Mějme dva (měřitelné) omezené rovinné obrazce A , B . Pak existuje přímka, která každý z obrazců rozdělí na dva kusy stejného obsahu.

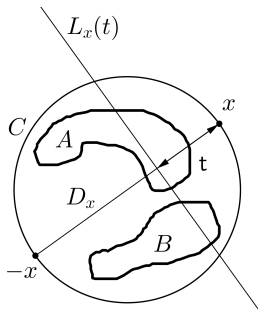
Důkaz první věty o krájení koláče I

- A** Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že oba obrazce leží uvnitř kružnice C . Pro každý bod $\mathbf{x}$ na kružnici C označme jako D_x průměr C procházející bodem $\mathbf{x}$. Dále označme $L_x(t)$ přímkou kolmou na D_x , přičemž jejich průsečík leží ve vzdálenosti t od bodu $\mathbf{x}$ a $t \in \langle 0, 2 \rangle$.



Důkaz první věty o krájení koláče I

- A Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že oba obrazce leží uvnitř kružnice C . Pro každý bod $\mathbf{x}$ na kružnici C označme jako D_x průměr C procházející bodem $\mathbf{x}$. Dále označme $L_x(t)$ přímkou kolmou na D_x , přičemž jejich průsečík leží ve vzdálenosti t od bodu $\mathbf{x}$ a $t \in \langle 0, 2 \rangle$.



- B Obsah té části obrazce A , která leží na stejné straně $L_x(t)$ jako $\mathbf{x}$ označíme $f_1(t)$, obsah zbývajících částí jako $f_2(t)$. Funkce $f_1, f_2 : \langle 0, 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité (plyne z měřitelnosti!), stejně tak funkce $f := f_1 - f_2$ definovaná jako jejich rozdíl.

Důkaz první věty o krájení koláče II

B Obsah té části obrazce A , která leží na stejné straně $L_x(t)$ jako x označíme $f_1(t)$, obsah zbývající části jako $f_2(t)$. Funkce $f_1, f_2 : \langle 0, 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité, stejně tak funkce $f := f_1 - f_2$ definovaná jako jejich rozdíl.

Důkaz první věty o krájení koláče II

- B** Obsah té části obrazce A , která leží na stejné straně $L_x(t)$ jako x označíme $f_1(t)$, obsah zbývajících částí jako $f_2(t)$. Funkce $f_1, f_2 : \langle 0, 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité, stejně tak funkce $f := f_1 - f_2$ definovaná jako jejich rozdíl.
- C** Zřejmě $f(0) = -f(2)$, a proto existuje bod $t_0 \in \langle 0, 2 \rangle$, kde $f(t_0) = 0$, tj. $f_1(t_0) = f_2(t_0)$. To znamená, že přímka $L_x(t_0)$ dělí obrazec A na dvě části stejného obsahu. Každému x je tedy přiřazeno t_0 a toto zobrazení je spojitě. Přímku $L_x(t_0)$ budeme nazývat stručně L_x . Zřejmě platí $L_x = L_{-x}$.

Důkaz první věty o krájení koláče II

- B** Obsah té části obrazce A , která leží na stejné straně $L_x(t)$ jako x označíme $f_1(t)$, obsah zbývající části jako $f_2(t)$. Funkce $f_1, f_2 : \langle 0, 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité, stejně tak funkce $f := f_1 - f_2$ definovaná jako jejich rozdíl.
- C** Zřejmě $f(0) = -f(2)$, a proto existuje bod $t_0 \in \langle 0, 2 \rangle$, kde $f(t_0) = 0$, tj. $f_1(t_0) = f_2(t_0)$. To znamená, že přímka $L_x(t_0)$ dělí obrazec A na dvě části stejného obsahu. Každému x je tedy přiřazeno t_0 a toto zobrazení je spojitě. Přímku $L_x(t_0)$ budeme nazývat stručně L_x . Zřejmě platí $L_x = L_{-x}$.
- D** Tato přímka dělí také B na dvě části. Označíme obsah té části B , která je blíže x , jako $g_1(x)$ a zbývající obsah jako $g_2(x)$. Uvažme funkci $g := g_1 - g_2$. Funkce g je spojitá na C (protože zobrazení, které x přiřadí t_0 , je spojitě!).

Důkaz první věty o krájení koláče II

- B** Obsah té části obrazce A , která leží na stejné straně $L_x(t)$ jako x označíme $f_1(t)$, obsah zbývající části jako $f_2(t)$. Funkce $f_1, f_2 : \langle 0, 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité, stejně tak funkce $f := f_1 - f_2$ definovaná jako jejich rozdíl.
- C** Zřejmě $f(0) = -f(2)$, a proto existuje bod $t_0 \in \langle 0, 2 \rangle$, kde $f(t_0) = 0$, tj. $f_1(t_0) = f_2(t_0)$. To znamená, že přímka $L_x(t_0)$ dělí obrazec A na dvě části stejného obsahu. Každému x je tedy přiřazeno t_0 a toto zobrazení je spojitě. Přímku $L_x(t_0)$ budeme nazývat stručně L_x . Zřejmě platí $L_x = L_{-x}$.
- D** Tato přímka dělí také B na dvě části. Označíme obsah té části B , která je blíže x , jako $g_1(x)$ a zbývající obsah jako $g_2(x)$. Uvažme funkci $g := g_1 - g_2$. Funkce g je spojitá na C (protože zobrazení, které x přiřadí t_0 , je spojitě!).
- E** Zřejmě platí $g(x) = -g(-x)$ pro všechna $x \in C$. Podle Borsukovy-Ulamovy věty existuje bod $x_0 \in C$, kde $g(x_0) = g(-x_0)$. Dohromady tedy $g(x_0) = 0$, což znamená, že přímka L_{x_0} dělí oba obrazce na dva kusy stejného obsahu.

Důsledky Borsukovy-Ulamovy věty pro kružnici

Druhá věta o krájení koláče

Mějme (měřitelný) omezený rovinný obrazec A . Pak existují dvě navzájem kolmé přímky, které rozdělí A na čtyři kusy stejného obsahu.

Úkol 2

Dokažte, že neexistuje zobrazení φ kruhu na přímku nebo její část takové, že φ a φ^{-1} jsou spojité.

Úkol 2

Dokažte, že neexistuje zobrazení φ kruhu na přímku nebo její část takové, že φ a φ^{-1} jsou spojitě.

Úkol 3

Najděte chybu v argumentu: Teplota vzduchu v Ostravě se mění spojitě v závislosti na čase. Sledujme po dobu jedné hodiny pozorně minutovou ručičku hodin. Z Borsukovy-Ulamovy věty plyne, že ve dvou různých momentech, které dělí právě půl hodiny, je teplota vzduchu stejná. Můžeme si však snadno představit, že se minutová ručička pohybuje jinou (libovolnou) rychlostí a začátek a konec jejího pohybu můžeme také zvolit libovolně. Teplota vzduchu je tedy stejná v každé dva momenty a je tedy konstantní.

Borsukova-Ulamova věta II

Označme jako $S^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ jednotkovou sféru a $B^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^n$, kde $n > 0$.

Borsukova-Ulamova věta II

Označme jako $S^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ jednotkovou sféru a $B^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^n$, kde $n > 0$.

Obecná Borsukova-Ulamova věta

Pro každé $n > 0$ a spojitě zobrazení $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existuje bod $\mathbf{x} \in S^n$ takový, že $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$.

Borsukova-Ulamova věta II

Obecná Borsukova-Ulamova věta

Pro každé $n > 0$ a spojitě zobrazení $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existuje bod $\mathbf{x} \in S^n$ takový, že $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$.

Tvrzení s ním ekvivalentní

Borsukova-Ulamova věta II

Obecná Borsukova-Ulamova věta

Pro každé $n > 0$ a spojitě zobrazení $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existuje bod $\mathbf{x} \in S^n$ takový, že $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$.

Tvrzení s ním ekvivalentní

- A** Pro každé **antipodální zobrazení** $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (tj. f je spojitě a $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x} \in S^n$) existuje bod $\mathbf{x} \in S^n$, kde $f(\mathbf{x}) = 0$.

Borsukova-Ulamova věta II

Obecná Borsukova-Ulamova věta

Pro každé $n > 0$ a spojitě zobrazení $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existuje bod $\mathbf{x} \in S^n$ takový, že $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$.

Tvrzení s ním ekvivalentní

- A** Pro každé **antipodální zobrazení** $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (tj. f je spojitě a $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x} \in S^n$) existuje bod $\mathbf{x} \in S^n$, kde $f(\mathbf{x}) = 0$.
- B** Neexistuje antipodální zobrazení $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$.

Borsukova-Ulamova věta II

Obecná Borsukova-Ulamova věta

Pro každé $n > 0$ a spojitě zobrazení $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existuje bod $\mathbf{x} \in S^n$ takový, že $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$.

Tvrzení s ním ekvivalentní

- A** Pro každé **antipodální zobrazení** $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (tj. f je spojitě a $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x} \in S^n$) existuje bod $\mathbf{x} \in S^n$, kde $f(\mathbf{x}) = 0$.
- B** Neexistuje antipodální zobrazení $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$.
- C** Neexistuje spojitě zobrazení $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$, které by bylo antipodální na hranici.

Borsukova-Ulamova věta II

Obecná Borsukova-Ulamova věta

Pro každé $n > 0$ a spojitě zobrazení $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existuje bod $\mathbf{x} \in S^n$ takový, že $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$.

Tvrzení s ním ekvivalentní

- A** Pro každé **antipodální zobrazení** $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (tj. f je spojitě a $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x} \in S^n$) existuje bod $\mathbf{x} \in S^n$, kde $f(\mathbf{x}) = 0$.
- B** Neexistuje antipodální zobrazení $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$.
- C** Neexistuje spojitě zobrazení $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$, které by bylo antipodální na hranici.
- D** Každé pokrytí sféry S^n uzavřenými množinami $F_1, \dots, F_{n+1}$ obsahuje alespoň jednu množinu, v níž najdeme dvojici antipodálních bodů.

Borsukova-Ulamova věta II

Obecná Borsukova-Ulamova věta

Pro každé $n > 0$ a spojitě zobrazení $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existuje bod $\mathbf{x} \in S^n$ takový, že $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$.

Tvrzení s ním ekvivalentní

- A** Pro každé **antipodální zobrazení** $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (tj. f je spojitě a $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x} \in S^n$) existuje bod $\mathbf{x} \in S^n$, kde $f(\mathbf{x}) = 0$.
- B** Neexistuje antipodální zobrazení $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$.
- C** Neexistuje spojitě zobrazení $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$, které by bylo antipodální na hranici.
- D** Každé pokrytí sféry S^n uzavřenými množinami $F_1, \dots, F_{n+1}$ obsahuje alespoň jednu množinu, v níž najdeme dvojici antipodálních bodů.
- E** Každé pokrytí sféry S^n otevřenými množinami $U_1, \dots, U_{n+1}$ obsahuje alespoň jednu množinu, v níž najdeme dvojici antipodálních bodů.

Karol Borsuk



Topology — Wizard



Borsuk-Ulam Theorem, Borsuk's
Conjecture

Matematikové II

Karol Borsuk



Topology — Wizard



Borsuk-Ulam Theorem, Borsuk's Conjecture

TM & © OSMA VŠB

10/10

Stanislaw Ulam



Mathematics — Shaman



Borsuk-Ulam Theorem, Manhattan Project, Monte Carlo method of computation

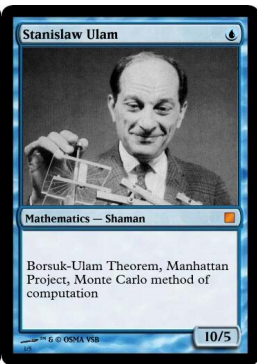
TM & © OSMA VŠB

10/5

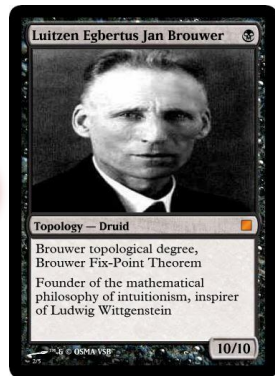
Brouwerova věta o pevném bodu jako důsledek Borsukovy-Ulamovy věty



Brouwerova věta o pevném bodu jako důsledek Borsukovy-Ulamovy věty



VS



Brouwerova věta o pevném bodu jako důsledek Borsukovy-Ulamovy věty

Důkaz.

Předpokládejme, že $f : B^n \rightarrow B^n$ je spojitě zobrazení bez pevného bodu. Pak můžeme nalézt spojitě zobrazení $g : B^n \rightarrow S^{n-1}$, jehož restrikce na S^{n-1} je identické zobrazení (g se pak nazývá *retraktem* B^n na S^{n-1}) takto:

Je-li $\mathbf{x} \in B^n$, definujeme $g(\mathbf{x})$ jako bod, ve kterém paprsek začínající v $f(\mathbf{x})$ a procházející bodem $\mathbf{x}$ (takový paprsek je dobře definovaný díky tomu, že f nemá pevný bod!) protíná hranici koule B^n , kterou je S^{n-1} .



Brouwerova věta o pevném bodu jako důsledek Borsukovy-Ulamovy věty

Důkaz.

Předpokládejme, že $f : B^n \rightarrow B^n$ je spojitě zobrazení bez pevného bodu. Pak můžeme nalézt spojitě zobrazení $g : B^n \rightarrow S^{n-1}$, jehož restrikce na S^{n-1} je identické zobrazení (g se pak nazývá *retraktem* B^n na S^{n-1}) takto:

Je-li $\mathbf{x} \in B^n$, definujeme $g(\mathbf{x})$ jako bod, ve kterém paprsek začínající v $f(\mathbf{x})$ a procházející bodem $\mathbf{x}$ (takový paprsek je dobře definovaný díky tomu, že f nemá pevný bod!) protíná hranici koule B^n , kterou je S^{n-1} .

Existence takového g je však ve sporu s výše uvedeným ekvivalentním vyjádřením Borsukovy-Ulamovy věty:

A Neexistuje spojitě zobrazení $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$, které by bylo antipodální na hranici.



Geometrický důkaz Borsukovy-Ulamovy věty I

Budeme dokazovat výše uvedené tvrzení ekvivalentní
Borsukově-Ulamově větě:

Pro každé **antipodální zobrazení** $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (tj. f je spojitě a $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x} \in S^n$) existuje bod $\mathbf{x} \in S^n$, kde $f(\mathbf{x}) = 0$.

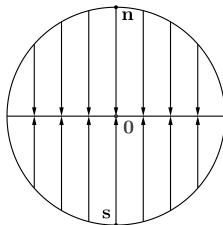
Geometrický důkaz Borsukovy-Ulamovy věty I

A Nechť $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě antipodální zobrazení. Ukážeme, že má nulový bod.

Geometrický důkaz Borsukovy-Ulamovy věty I

- A** Nechť $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě antipodální zobrazení. Ukážeme, že má nulový bod.
- B** Nechť $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ značí „severo-j jižní“ projekci. Je-li $S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$, pak máme

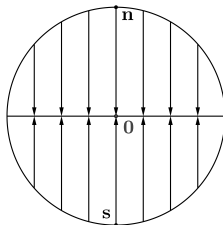
$$g(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$



Geometrický důkaz Borsukovy-Ulamovy věty I

- A** Nechť $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě antipodální zobrazení. Ukážeme, že má nulový bod.
- B** Nechť $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ značí „severo-jihní“ projekci. Je-li $S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$, pak máme

$$g(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$



- C** Zobrazení g má právě dva nulové body: severní a jižní pól, tj. body $\mathbf{n} = (0, 0, \dots, 1)$ a $\mathbf{s} = (0, 0, \dots, -1)$.

Geometrický důkaz Borsukovy-Ulamovy věty II

D Uvažujme $(n + 1)$ -dimenzionální prostor $X := S^n \times \langle 0, 1 \rangle$, připomínající „dutý cylindr“.

Geometrický důkaz Borsukovy-Ulamovy věty II

D Uvažujme $(n + 1)$ -dimenzionální prostor $X := S^n \times \langle 0, 1 \rangle$, připomínající „dutý cylindr“.

E A také zobrazení $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ definované jako:

$$f(\mathbf{x}, t) := (1 - t)g(\mathbf{x}) + tf(\mathbf{x}).$$

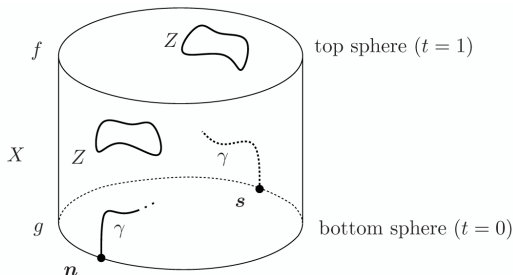
Geometrický důkaz Borsukovy-Ulamovy věty II

D Uvažujme $(n + 1)$ -dimenzionální prostor $X := S^n \times \langle 0, 1 \rangle$, připomínající „dutý cylindr“.

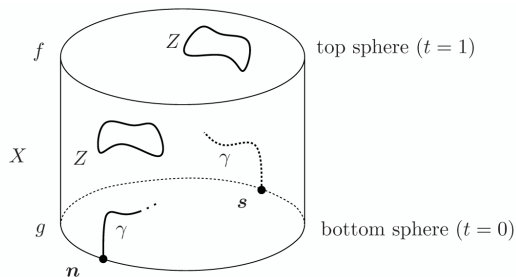
E A také zobrazení $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ definované jako:

$$f(\mathbf{x}, t) := (1 - t)g(\mathbf{x}) + tg(\mathbf{x}).$$

F Geometricky řečeno: Vezmeme dvě kopie sféry S^n (umístěné v prostoru $\mathbb{R}^{n+2}$), jednu uvažujeme se zobrazením g , druhou se zobrazením f . Dále spojíme odpovídající si body obou sfér úsečkami, a zobrazení F je potom definované na každé z těchto úseček lineární interpolací. Pro $n = 1$ dostáváme tento obrázek:

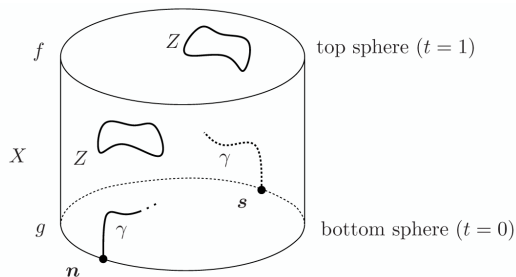


Geometrický důkaz Borsukovy-Ulamovy věty III



G „Antipodální zobrazení“ $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ na S^n rozšíříme přirozeným způsobem na zobrazení $\mathbf{v}$ definované na celém cylindru X :
 $\mathbf{v} : (\mathbf{x}, t) \rightarrow (-\mathbf{x}, t)$. Všimněte si, že $\mathbf{v}$ nemá pevný bod!

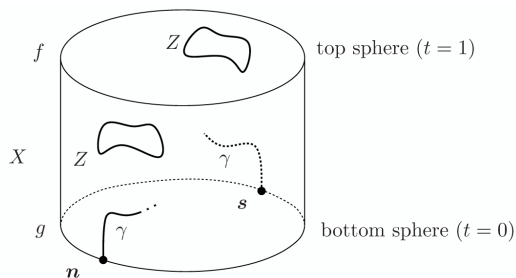
Geometrický důkaz Borsukovy-Ulamovy věty III



G „Antipodální zobrazení“ $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ na S^n rozšíříme přirozeným způsobem na zobrazení $\mathbf{v}$ definované na celém cylindru X :
 $\mathbf{v} : (\mathbf{x}, t) \rightarrow (-\mathbf{x}, t)$. Všimněte si, že $\mathbf{v}$ nemá pevný bod!

H F je antipodální vzhledem k $\mathbf{v}$, tj. $F(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = -F(\mathbf{x}, t)$ (protože zobrazení g, f jsou antipodální).

Geometrický důkaz Borsukovy-Ulamovy věty III



G „Antipodální zobrazení“ $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ na S^n rozšíříme přirozeným způsobem na zobrazení $\mathbf{v}$ definované na celém cylindru X :
 $\mathbf{v} : (\mathbf{x}, t) \rightarrow (-\mathbf{x}, t)$. Všimněte si, že $\mathbf{v}$ nemá pevný bod!

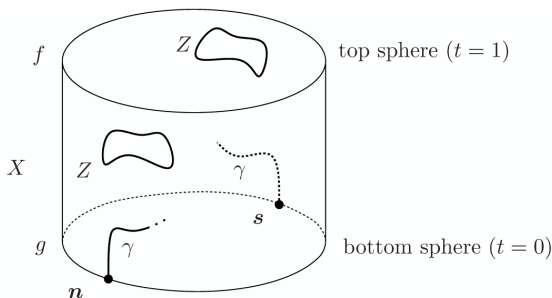
H F je antipodální vzhledem k $\mathbf{v}$, tj. $F(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = -F(\mathbf{x}, t)$ (protože zobrazení g, f jsou antipodální).

I Pro spor budeme předpokládat, že f nemá nulový bod.

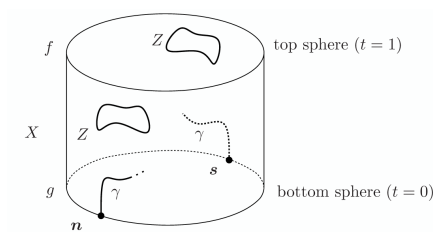
Geometrický důkaz Borsukovy-Ulamovy věty IV

J Zkoumejme nyní $Z := F^{-1}(\mathbf{0})$. Pokud je f **dostatečně kvalitní**, pak je Z jednorozměrným objektem, jehož komponenty jsou cesty a cykly (pro názornost si můžeme představovat jednorozměrné žížalky a gumičky).

Navíc jsou koncové body těchto cest situované na spodní nebo horní kopii sféry S^n (kde $t = 0$ nebo $t = 1$), a proto jsou nulovými body zobrazení f nebo g . Cykly, na druhou stranu, krajních sfér nikdy nedosáhnou a pohybují se uvnitř klobouku.

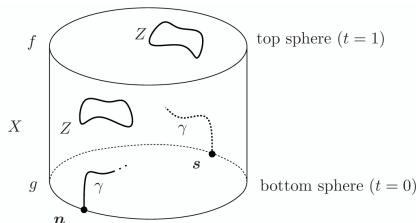


Geometrický důkaz Borsukovy-Ulamovy věty V



K Předpokládáme-li, že f nemá nulové body a víme-li, že g má nulové body pouze dva a to na pólech, odvodíme z toho snadno, že musí existovat cesta γ , která spojuje $\mathbf{n}$ a $\mathbf{s}$ (tj. severní a jižní pól).

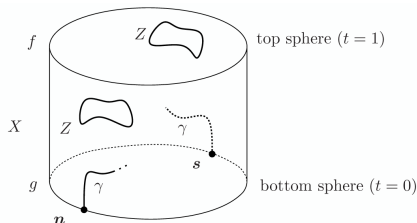
Geometrický důkaz Borsukovy-Ulamovy věty V



K Předpokládáme-li, že f nemá nulové body a víme-li, že g má nulové body pouze dva a to na pólech, odvodíme z toho snadno, že musí existovat cesta γ , která spojuje n a s (tj. severní a jižní pól).

L Sledujeme-li dále cestu γ z bodu n , pak se část začínající v bodu s musí chovat symetricky vzhledem k zobrazení ν (přesněji: je-li délka cesty γ jednotková, pak $\nu(\gamma(z)) = \gamma(1 - z)$ pro $z \in \langle 0, 1 \rangle$).

Geometrický důkaz Borsukovy-Ulamovy věty V



- K** Předpokládáme-li, že f nemá nulové body a víme-li, že g má nulové body pouze dva a to na pólech, odvodíme z toho snadno, že musí existovat cesta γ , která spojuje n a s (tj. severní a jižní pól).
- L** Sledujeme-li dále cestu γ z bodu n , pak se část začínající v bodu s musí chovat symetricky vzhledem k zobrazení ν (přesněji: je-li délka cesty γ jednotková, pak $\nu(\gamma(z)) = \gamma(1 - z)$ pro $z \in \langle 0, 1 \rangle$).
- M** Tyto dva konce cesty se ovšem nikdy nemůžou sejít: Symetrické cesty z n do s totiž v X neexistují (přesněji: znamenalo by to, že $\nu(\gamma(\frac{1}{2})) = \gamma(\frac{1}{2})$ a to nelze, neboť ν nemá pevný bod).

Na památku Stana Ulama: Hranice významu (Gian-Carlo Rota, *profesor na MIT*)



Na památku Stana Ulama: Hranice významu

(Gian-Carlo Rota, *profesor na MIT*)

Trvalo mnoho let, než jsem si uvědomil, jaká byla skutečná profese Stana Ulama. Mnoho z nás, kteří s ním v Laboratoři pracovali, velice dobře vědělo o jeho hluboké nechuti k samotě. Nebylo nijak neobvyklé, že vám volal v prazvláštních hodinách, abyste jej osvobodili z osamělosti jeho hotelového pokoje nebo prázdnoty jeho kanceláře - poté, co již vyčerpал svou pravidelnou denní dávku transatlantických telefonních hovorů.

Když jsem se ho jednoho dne konečně odvážil zeptat, proč s takovou urputností neustále vyhledává společnost, bez váhání odpověděl: „Protože když jsem sám, nemohu si pomoci, ale jsem proti své vůli nucen vymýšlet nové a nové věci, a vidím toho tolik, o čem bych raději vůbec nepřemýšlel!“ V tu chvíli jsem spatřil pravou podobu tohoto muže. Muž, který byl nejspíše držitelem rekordu ve správných matematických odhadech, matematik, který dovedl porazit inženýry v jejich hře, který uměl posoudit charakter člověka nebo události jediným pohledem, byl zřejmě jedním z posledních členů prastarého cechu věštců. (...)

Na památku Stana Ulama: Hranice významu

(Gian-Carlo Rota, *profesor na MIT*)

Trvalo mnoho let, než jsem si uvědomil, jaká byla skutečná profese Stana Ulama. Mnoho z nás, kteří s ním v Laboratoři pracovali, velice dobře vědělo o jeho hluboké nechuti k samotě. Nebylo nijak neobvyklé, že vám volal v prazvláštních hodinách, abyste jej osvobodili z osamělosti jeho hotelového pokoje nebo prázdnoty jeho kanceláře - poté, co již vyčerpал svou pravidelnou denní dávku transatlantických telefonních hovorů.

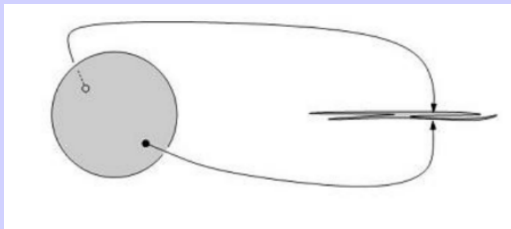
Když jsem se ho jednoho dne konečně odvážil zeptat, proč s takovou urputností neustále vyhledává společnost, bez váhání odpověděl:

„Protože když jsem sám, nemohu si pomoci, ale jsem proti své vůli nucen vymýšlet nové a nové věci, a vidím toho tolik, o čem bych raději vůbec nepřemýšlel!“ V tu chvíli jsem spatřil pravou podobu tohoto muže. Muž, který byl nejspíše držitelem rekordu ve správných matematických odhadech, matematik, který dovedl porazit inženýry v jejich hře, který uměl posoudit charakter člověka nebo události jediným pohledem, byl zřejmě jedním z posledních členů prastarého cechu věštců. (...)

Důsledky Borsukovy-Ulamovy věty

Příklad

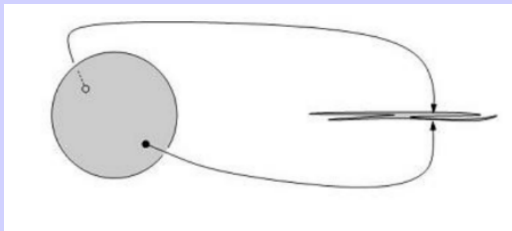
Vezmeme-li balón a „rozpláceme“ ho na podlahu, pak alespoň jedna dvojice antipodálních bodů bude rozplácnuta na sebe.



Důsledky Borsukovy-Ulamovy věty

Příklad

Vezmeme-li balón a „rozpláceme“ ho na podlahu, pak alespoň jedna dvojice antipodálních bodů bude rozplácnuta na sebe.



Příklad

Předpokládejme, že se tlak a teplota vzduchu na Zemi mění spojitě vzhledem k poloze. Pak můžeme v každém okamžiku najít dvojici antipodálních bodů, v nichž je stejný tlak i teplota.

Věta o šunkovém sendviči

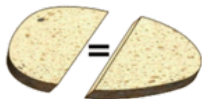
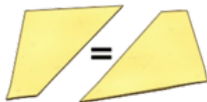
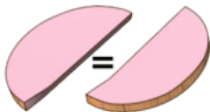
Věta

Nechť $M_1, M_2, \dots, M_n$ jsou (měřitelné) omezené podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Pak existuje $n - 1$ -rozměrná nadrovina, která každou z množin dělí na dvě stejně velké části.

Věta o šunkovém sendviči

Věta

Nechť $M_1, M_2, \dots, M_n$ jsou (měřitelné) omezené podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Pak existuje $n - 1$ -rozměrná nadrovina, která každou z množin dělí na dvě stejně velké části.



Věta o šunkovém sendviči

Věta

Nechť $M_1, M_2, \dots, M_n$ jsou (měřitelné) omezené podmnožiny $\mathbb{R}^n$. Pak existuje $n - 1$ -rozměrná nadrovina, která každou z množin dělí na dvě stejně velké části.

Věta

Nechť $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ jsou takové konečné borelovské míry na $\mathbb{R}^n$ takové, že každou nadrovinu v $\mathbb{R}^n$ měří nulou. Pak existuje nadrovina h , pro niž

$$\mu_i(h^+) = \frac{1}{2} \mu_i(\mathbb{R}^n), \text{ pro } i = 1, 2, \dots, n,$$

kde h^+ značí jeden z poloprostorů určených h .

Věta o zlodějích náhrdelníků

Dva zloději zcizili vzácný náhrdelník složený z drahých kamenů, které jsou vsazeny do platiny. Zloději se chtějí mezi sebou spravedlivě rozdělit, neznají však hodnoty jednotlivých drahých kamenů a řezáním náramku by také rádi přišli o co nejméně vzácné platiny. Jaký nejmenší počet řezů je nutný, aby mezi sebou náhrdelník spravedlivě rozdělili?

Věta o zlodějích náhrdelníků

Dva zloději zcizili vzácný náhrdelník složený z drahých kamenů, které jsou vsazeny do platiny. Zloději se chtějí mezi sebou spravedlivě rozdělit, neznají však hodnoty jednotlivých drahých kamenů a řezáním náramku by také rádi přišli o co nejméně vzácné platiny. Jaký nejmenší počet řezů je nutný, aby mezi sebou náhrdelník spravedlivě rozdělili?



Věta o zlodějích náhrdelníků

Dva zloději zcizili vzácný náhrdelník složený z drahých kamenů, které jsou vsazeny do platiny. Zloději se chtějí mezi sebou spravedlivě rozdělit, neznají však hodnoty jednotlivých drahých kamenů a řezáním náramku by také rádi přišli o co nejméně vzácné platiny. Jaký nejmenší počet řezů je nutný, aby mezi sebou náhrdelník spravedlivě rozdělili?

Věta

Mějme (otevřený) náhrdelník složený z n druhů kamenů, přičemž počet kamenů každého druhu je sudý. Pak lze náhrdelník spravedlivě rozdělit mezi dva zloděje tak, že počet řezů bude menší než n .

Věta o neučesaném ježkovi

Věta (pomocná)

Pro spojitě zobrazení sféry $f : S^2 \rightarrow S^2$ (ne nutně na) existuje bod $\mathbf{x}$, že $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ (tj. pevný bod) nebo bod $\mathbf{x}$, že $f(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ (tj. posílá bod na jeho antipod).

Věta o neučesaném ježkovi

Věta (pomocná)

Pro spojitě zobrazení sféry $f : S^2 \rightarrow S^2$ (ne nutně na) existuje bod $\mathbf{x}$, že $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ (tj. pevný bod) nebo bod $\mathbf{x}$, že $f(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ (tj. posílá bod na jeho antipod).

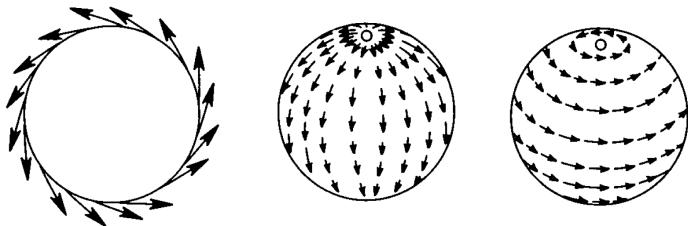
Věta (o česání ježka)

Spojitě zobrazení g , které každému bodu sféry $\mathbf{x} \in S^2$ přiřadí vektor $g(\mathbf{x})$ tečný k sféře v bodě $\mathbf{x}$ musí mít alespoň jeden nulový bod.

Věta o neučesaném ježkovi

Věta (o česání ježka)

Spojitě zobrazení g , které každému bodu sféry $\mathbf{x} \in S^2$ přiřadí vektor $g(\mathbf{x})$ tečný k sféře v bodě $\mathbf{x}$ musí mít alespoň jeden nulový bod.



Obrázek : Ilustrace vektorových polí

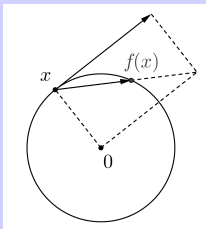
Věta o neučesaném ježkovi

Věta (o česání ježka)

Spojité zobrazení g , které každému bodu sféry $\mathbf{x} \in S^2$ přiřadí vektor $g(\mathbf{x})$ tečný k sféře v bodě $\mathbf{x}$ musí mít alespoň jeden nulový bod.

Důkaz.

Předpokládejme existenci takového zobrazení g , které je všude nenulové. Zobrazení g přirozeným způsobem definuje $f : S^2 \rightarrow S^2$, jak vidno na obrázku:



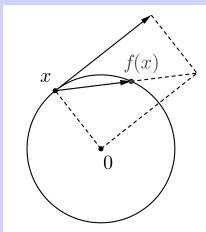
Věta o neučesaném ježkovi

Věta (o česání ježka)

Spojitě zobrazení g , které každému bodu sféry $\mathbf{x} \in S^2$ přiřadí vektor $g(\mathbf{x})$ tečný k sféře v bodě $\mathbf{x}$ musí mít alespoň jeden nulový bod.

Důkaz.

Předpokládejme existenci takového zobrazení g , které je všude nenulové. Zobrazení g přirozeným způsobem definuje $f : S^2 \rightarrow S^2$, jak vidno na obrázku:



Takové zobrazení však zřejmě nemá pevný bod a ani nemůže zobrazit bod na jeho antipod. Dostáváme tedy spor s pomocnou větou. □

Věta o neučesaném ježkovi

Věta (o česání ježka)

Zobrazení $\mathbf{g}$, které každému bodu sféry $\mathbf{x} \in S^2$ přiřadí vektor $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ tečný k sféře v bodě $\mathbf{x}$ musí mít alespoň jeden nulový bod.

Věta o neučesaném ježkovi

Věta (o česání ježka)

Zobrazení $\mathbf{g}$, které každému bodu sféry $\mathbf{x} \in S^2$ přiřadí vektor $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ tečný k sféře v bodě $\mathbf{x}$ musí mít alespoň jeden nulový bod.

Populární důsledky.

- A Ježek srolovaný do klubíčka má alespoň jeden nebezpečný ostn, který z něj trčí kolmo.

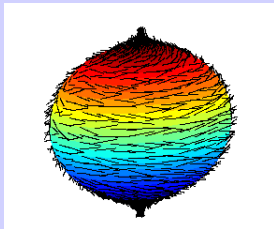
Věta o neučesaném ježkovi

Věta (o česání ježka)

Zobrazení $\mathbf{g}$, které každému bodu sféry $\mathbf{x} \in S^2$ přiřadí vektor $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ tečný k sféře v bodě $\mathbf{x}$ musí mít alespoň jeden nulový bod.

Populární důsledky.

- A Ježek srolovaný do klubíčka má alespoň jeden nebezpečný ostn, který z něj trčí kolmo.
- B Kouli nelze učesat, aniž by někde neměla kohouta.



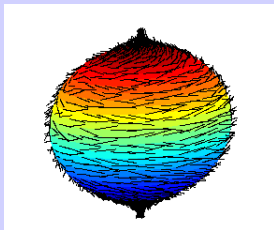
Věta o neučesaném ježkovi

Věta (o česání ježka)

Zobrazení $\mathbf{g}$, které každému bodu sféry $\mathbf{x} \in S^2$ přiřadí vektor $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ tečný k sféře v bodě $\mathbf{x}$ musí mít alespoň jeden nulový bod.

Populární důsledky.

- A Ježek srolovaný do klubíčka má alespoň jeden nebezpečný ostn, který z něj trčí kolmo.
- B Kouli nelze učesat, aniž by někde neměla kohouta.

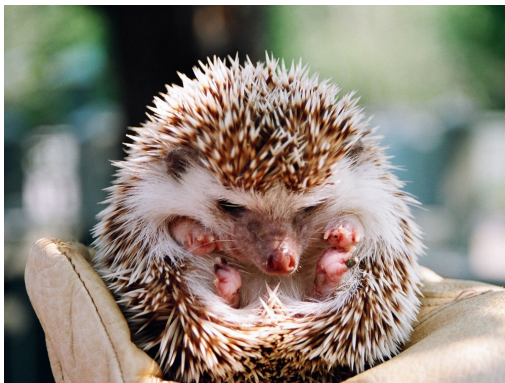


- C Pokud na Zemi proudí alespoň nějaký vítr, pak je na ní v každém okamžiku alespoň jeden bod, kde se nachází cyklon.

Věta o neučesaném ježkovi

Věta (o česání ježka)

Zobrazení g , které každému bodu sféry $\mathbf{x} \in S^2$ přiřadí vektor $g(\mathbf{x})$ tečný k sféře v bodě $\mathbf{x}$ musí mít alespoň jeden nulový bod.



- A Anglický překlad opatřený Ulamovým komentářem vydala roku 1957 Los Alamos National Laboratory.

Scottish Book podruhé

- A Anglický překlad opatřený Ulamovým komentářem vydala roku 1957 Los Alamos National Laboratory.
- B Roku 1981 vydal R. Daniel Mauldin Scottish Book znovu společně s dosud známými řešeními uvedených problémů.

Scottish Book podruhé

- A Anglický překlad opatřený Ulamovým komentářem vydala roku 1957 Los Alamos National Laboratory.
- B Roku 1981 vydal R. Daniel Mauldin Scottish Book znovu společně s dosud známými řešeními uvedených problémů.
- C Řada problémů zůstává nevyřešena!

D Roku 1973 vyřešil švédský matematik *Per Enflo* slavný Mazurův „problém za husu“, když našel kompaktní operátor $T : X \rightarrow Y$ mezi Banachovými prostory X, Y , který není limitou konečně dimenzionálních operátorů. Tím také ukázal, že separabilní Banachův prostor nemusí mít Schauderovu bázi a vysloužil si husu:



- A Per Enflo vyřešil také tzv. *problém invariantních podprostorů* (více než 40 let otevřený).

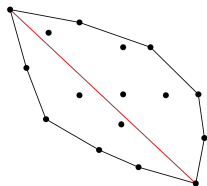
- A Per Enflo vyřešil také tzv. *problém invariantních podprostorů* (více než 40 let otevřený).
- B Per Enflo je také aktivním koncertním pianistou.



Obrázek : Per Enflo v Carnegie Hall, New York, rok 2013

Borsukova domněnka

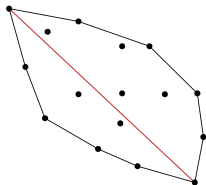
Průměr množiny $M \subset \mathbb{R}^n$ značíme $\text{diam}(M)$ a definujeme jej jako „největší vzdálenost mezi dvěma body M “, přesněji



$$\text{diam}(M) := \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\}.$$

Borsukova domněnka

Průměr množiny $M \subset \mathbb{R}^n$ značíme $\text{diam}(M)$ a definujeme jej jako „největší vzdálenost mezi dvěma body M “, přesněji



$$\text{diam}(M) := \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\}.$$

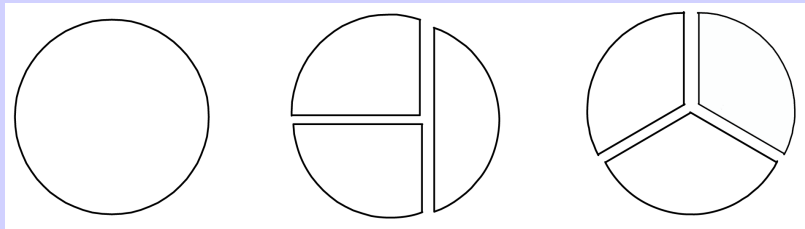


Domněnka

Můžeme každou množinu $M \subset \mathbb{R}^n$ s konečným průměrem $\text{diam}(M) > 0$ rozdělit na nejvýše $n + 1$ množin menšího průměru?

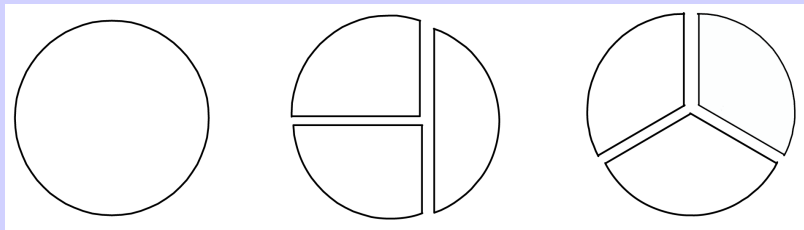
Příklady

A Dělení kruhu:

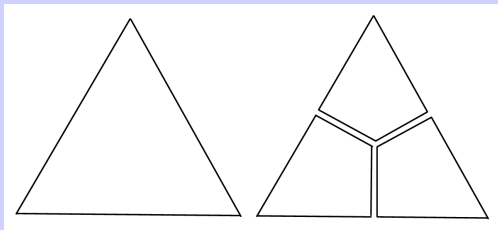


Příklady

A Dělení kruhu:



B Dělení trojúhelníku:



Borsukova věta

Pro každé $n > 0$ existuje dělení jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$, tj. množiny S^{n-1} , na nejvýše $n + 1$ částí ostře menšího průměru.

Borsukova domněnka

Borsukova věta

Pro každé $n > 0$ existuje dělení jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$, tj. množiny S^{n-1} , na nejvýše $n + 1$ částí ostře menšího průměru.

Pozorování

- A** V obecném případě si v $\mathbb{R}^n$ nevystačíme s méně než $n + 1$ částmi.
Viz úsečka, trojúhelník, ...

Borsukova domněnka

Borsukova věta

Pro každé $n > 0$ existuje dělení jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$, tj. množiny S^{n-1} , na nejvýše $n + 1$ částí ostře menšího průměru.

Pozorování

- A** V obecném případě si v $\mathbb{R}^n$ nevystačíme s méně než $n + 1$ částmi. Viz úsečka, trojúhelník, ...
- B** Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat množiny s průměrem 1.

Borsukova domněnka platí pro $n = 1$

Důkaz.

- A Každá podmnožina $\mathbb{R}$ s průměrem 1 můžeme být vepsána do intervalu s průměrem 1:



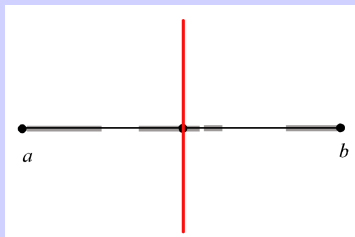
Borsukova domněnka platí pro $n = 1$

Důkaz.

- A Každá podmnožina $\mathbb{R}$ s průměrem 1 můžeme být vepsána do intervalu s průměrem 1:



- B Interval rozdělíme na dvě části, přičemž každá má menší průměr, než původní množina:



Borsukova domněnka platí pro $n = 2$

Důkaz.

A Máme omezenou množinu v $\mathbb{R}^2$:



Borsukova domněnka platí pro $n = 2$

Důkaz.

A Máme omezenou množinu v $\mathbb{R}^2$:



B Každá podmnožina $\mathbb{R}^2$ s průměrem 1 může být vepsána do rovnostranného trojúhelníka s průměrem $\leq \sqrt{3}$:



Borsukova domněnka platí pro $n = 2$

Důkaz.

A Máme omezenou množinu v $\mathbb{R}^2$:



B Každá podmnožina $\mathbb{R}^2$ s průměrem 1 může být vepsána do rovnostranného trojúhelníka s průměrem $\leq \sqrt{3}$:

Jungova věta

Pro kompaktní (tj. omezenou a uzavřenou) množinu $K \subset \mathbb{R}^n$ s poloměrem d existuje uzavřená koule s poloměrem

$$r \leq d \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}},$$

která K obsahuje.

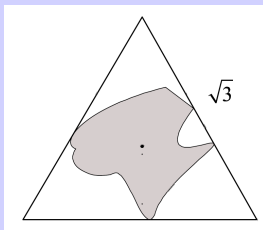
Borsukova domněnka platí pro $n = 2$

Důkaz.

A Máme omezenou množinu v $\mathbb{R}^2$:



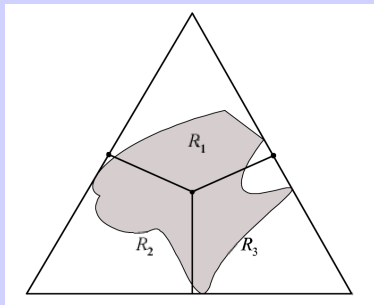
B Každá podmnožina $\mathbb{R}^2$ s průměrem 1 může být vepsána do rovnostranného trojúhelníka s průměrem $\leq \sqrt{3}$:



Borsukova domněnka platí pro $n = 2$

Důkaz.

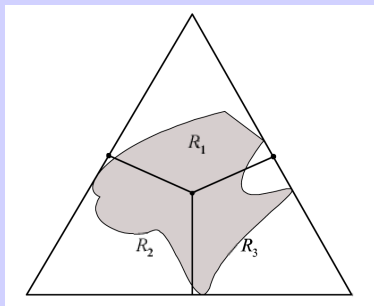
C Trojúhelník rozdělíme na tři kusy s menším průměrem:



Borsukova domněnka platí pro $n = 2$

Důkaz.

C Trojúhelník rozdělíme na tři kusy s menším průměrem:



D Každý kus R_i má průměr D_i , $i = 1, 2, 3$, kde

$$D_i \leq \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$$



Přehled výsledků

Poznámka

Hadwiger dokázal, že Borsukova domněnka platí pro *hladká* konvexní tělesa v $\mathbb{R}^n$.

Přehled výsledků

Poznámka

Hadwiger dokázal, že Borsukova domněnka platí pro *hladká* konvexní tělesa v $\mathbb{R}^n$.

- A Roku 1993 J. Kahn, G. Kalai našli protipříklad pro $n = 1325$. Dále dokázali, že Borsukova domněnka neplatí pro žádné $n > 2014$.

Přehled výsledků

Poznámka

Hadwiger dokázal, že Borsukova domněnka platí pro *hladká* konvexní tělesa v $\mathbb{R}^n$.

- A Roku 1993 J. Kahn, G. Kalai našli protipříklad pro $n = 1325$. Dále dokázali, že Borsukova domněnka neplatí pro žádné $n > 2014$.
- B A. Nilli našla protipříklad pro $n = 946$.

Přehled výsledků

Poznámka

Hadwiger dokázal, že Borsukova domněnka platí pro *hladká* konvexní tělesa v $\mathbb{R}^n$.

- A Roku 1993 J. Kahn, G. Kalai našli protipříklad pro $n = 1325$. Dále dokázali, že Borsukova domněnka neplatí pro žádné $n > 2014$.
- B A. Nilli našla protipříklad pro $n = 946$.
- C A. M. Raigorodskii pro $n = 561$.

Přehled výsledků

Poznámka

Hadwiger dokázal, že Borsukova domněnka platí pro *hladká* konvexní tělesa v $\mathbb{R}^n$.

- A** Roku 1993 J. Kahn, G. Kalai našli protipříklad pro $n = 1325$. Dále dokázali, že Borsukova domněnka neplatí pro žádné $n > 2014$.
- B** A. Nilli našla protipříklad pro $n = 946$.
- C** A. M. Raigorodskii pro $n = 561$.
- D** B. Weißbach pro $n = 560$.

Přehled výsledků

Poznámka

Hadwiger dokázal, že Borsukova domněnka platí pro *hladká* konvexní tělesa v $\mathbb{R}^n$.

- A** Roku 1993 J. Kahn, G. Kalai našli protipříklad pro $n = 1325$. Dále dokázali, že Borsukova domněnka neplatí pro žádné $n > 2014$.
- B** A. Nilli našla protipříklad pro $n = 946$.
- C** A. M. Raigorodskii pro $n = 561$.
- D** B. Weißbach pro $n = 560$.
- E** A. Hinrichs pro $n = 323$.

Přehled výsledků

Poznámka

Hadwiger dokázal, že Borsukova domněnka platí pro *hladká* konvexní tělesa v $\mathbb{R}^n$.

- A Roku 1993 J. Kahn, G. Kalai našli protipříklad pro $n = 1325$. Dále dokázali, že Borsukova domněnka neplatí pro žádné $n > 2014$.
- B A. Nilli našla protipříklad pro $n = 946$.
- C A. M. Raigorodskii pro $n = 561$.
- D B. Weißbach pro $n = 560$.
- E A. Hinrichs pro $n = 323$.
- F I. Pichurko pro $n = 320$.

Přehled výsledků

Poznámka

Hadwiger dokázal, že Borsukova domněnka platí pro *hladká* konvexní tělesa v $\mathbb{R}^n$.

- A Roku 1993 J. Kahn, G. Kalai našli protipříklad pro $n = 1325$. Dále dokázali, že Borsukova domněnka neplatí pro žádné $n > 2014$.
- B A. Nilli našla protipříklad pro $n = 946$.
- C A. M. Raigorodskii pro $n = 561$.
- D B. Weißbach pro $n = 560$.
- E A. Hinrichs pro $n = 323$.
- F I. Pichurko pro $n = 320$.
- G A. Hinrichs a C. Richter pro $n = 298$.

Přehled výsledků

Poznámka

Hadwiger dokázal, že Borsukova domněnka platí pro *hladká* konvexní tělesa v $\mathbb{R}^n$.

- A** Roku 1993 J. Kahn, G. Kalai našli protipříklad pro $n = 1325$. Dále dokázali, že Borsukova domněnka neplatí pro žádné $n > 2014$.
- B** A. Nilli našla protipříklad pro $n = 946$.
- C** A. M. Raigorodskii pro $n = 561$.
- D** B. Weißbach pro $n = 560$.
- E** A. Hinrichs pro $n = 323$.
- F** I. Pichurko pro $n = 320$.
- G** A. Hinrichs a C. Richter pro $n = 298$.
- H** Roku 2013 A. Bondarenko ukázal, že Borsukova domněnka je chybná pro $n > 65$.



Aigner, M., Ziegler, G. M.

Proofs from The Book. Including illustrations by Karl H. Hofmann. Springer, 2001.



Matoušek, J.

Using the Borsuk-Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Springer, 2003.



Shashkin, Y. A.

Fixed points.. No. 2. American Mathematical Soc., 1991.



Watson, S.

The Borsuk conjecture. Prezentace.