

Jednoduché ekonomické a biologické modely v řeči diferenčních rovnic

Pavel Drábek

Department of Mathematics and NTIS
Faculty of Applied Sciences, University of West Bohemia in Pilsen
Czech Republic

VŠB – TU Ostrava

17. 12. 2014



EUROPEAN UNION
EUROPEAN REGIONAL DEVELOPMENT FUND
INVESTING IN YOUR FUTURE



G. FULFORD, P. FORRESTER, A. JONES :

MODELLING WITH DIFFERENTIAL
AND DIFFERENCE EQUATIONS

Cambridge University Press 1997

Chapter 7 : Difference Equations

Leonardo di Pisa (Fibonacci):

Liber abaci 1202

Kolik párů králíků se narodí během jednoho roku pokud

1. Na počátku máme jeden pár.
2. Každý pár vyprodukuje za měsíc jeden nový pár.
3. Nový pár je produktivní dva měsíce po narození.

Dílčí problém: Kolik párů máme na konci prvního, druhého, třetího a čtvrtého měsíce?

$y_k = \{ \text{počet párů na konci } k\text{-tého měsíce} \}, k \geq 1$

z obrázku $\Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 3, y_4 = 5$

Kdybychom malovali dále $\Rightarrow$

$y_5 = 8, y_6 = 13, y_7 = 21, \dots, y_{12} =$

106

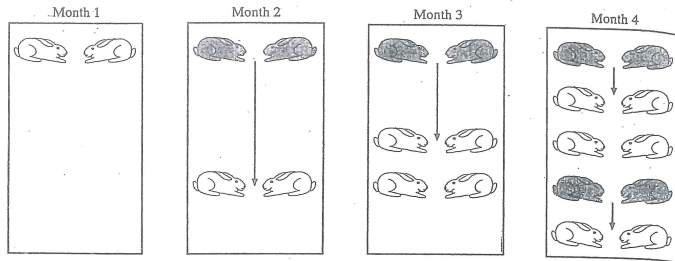
Difference equations

Fig. 7.1.1. A mature pair of rabbits (shaded grey) each month produce a new pair of rabbits (shaded white). The new rabbits mature after two months.

Dílčí problém: Najít vztah mezi počtem párů na konci daného měsíce v závislosti na jejich počtu na konci předcházejícího měsíce.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{počet tento} \\ \text{měsíc} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{počet minulý} \\ \text{měsíc} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{počet narozených} \\ \text{tento měsíc} \end{array} \right\}$$

||

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{počet před} \\ \text{dvěma měsíci} \end{array} \right\}$$

$$k \geq 3 : \quad y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$$

(Fibonacciova rovnice, poprvé explicitně sformulovaná Keplerem!)

Postupným dosazováním (iterováním) získáme řešení původního problému

$$y_{12} = 233.$$

Diferenční rovnice vznikají formulací podobných problémů, jejich řešením je posloupnost

$$y_1, y_2, y_3, \dots$$

Diferenční rovnice vyjadřuje zákonitost na základě které je člen y_k vyjádřen pomocí $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots$ a případně i sebe sama (y_k).

108

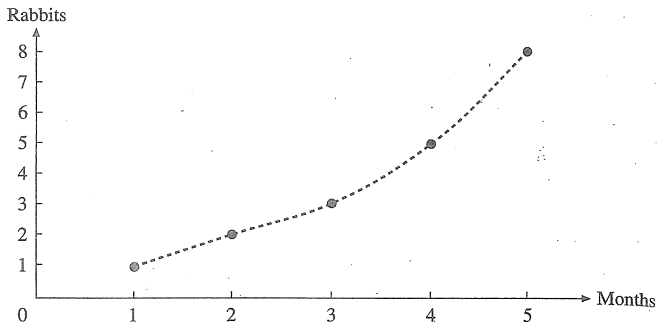
Difference equations

Fig. 7.1.2. Graph shows the total number of pairs of rabbits present each month. Because the time is *discrete* the graph consists of discrete points.

Pokud se v rekurzivitě vyskytují pouze y_k a y_{k-1} , jde o rovnici prvního řádu:

Př. $y_k = k(y_{k-1})^2, k = 2, 3, \dots, \underline{y_1 = 1}$
 počáteční podmínka

$$\Rightarrow y_2 = 2y_1^2 = 2, y_3 = 3y_2^2 = 12,$$

....

Pokud se v zákonitosti vyskytují pouze
 y_k, y_{k-1} a y_{k-2} jedná se o rovnici
 druhého řádu:

Pr. $y_k = y_{k-1} + y_{k-2}$, $y_1 = 1, y_2 = 1$
počáteční podmínky

$$\Rightarrow \gamma_3 = 2, \gamma_4 = 3, \gamma_5 = p, \dots$$

řešením je Fibonacciova posloupnost

Iterační metoda : vypočítáme y_k na základě
 $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_1$

Nevýhody : pro výpočet y_k musíme nejprve znát
 všechny předcházející členy posloupnosti

U některých typů rovnic to není třeba. Lze
 nalézt tzv. „uzavřenou formuli“ (y_k jako
 funkci k).

Pr. $y_k = 1 + y_{k-1} + 2\sqrt{1 + y_{k-1}}$, $k = 2, 3, \dots$; $y_1 = 0$

$$y_1 = 0, y_2 = 3, y_3 = 8, y_4 = 15$$

$$\begin{matrix} 1^2-1 & 2^2-1 & 3^2-1 & 4^2-1 \end{matrix} \Rightarrow y_k = k^2 - 1$$

Že $y_k = k^2 - 1$, $k = 1, 2, \dots$ je řešením dokažeme
tím, že ověříme

1. počáteční podmínku : $k=1 \Rightarrow y_1 = 0$

2. rovnici :

$$\begin{aligned} P &= 1 + y_{k-1} + 2\sqrt{1 + y_{k-1}} = (k-1)^2 + 2\sqrt{(k-1)^2} \\ &= (k-1)^2 + 2(k-1) = k^2 - 1 = y_k = L \end{aligned}$$

Ekonomické modely

jsou většinou formulovány ve tvaru
lineární rovnice :

$$y_{k+1} = a y_k + b \quad , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



dáno

lineární rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty

řešení je možné vždy nalézt v uzavřeném tvaru

homogenní rovnice : $x_{k+1} = a x_k$

Pr. $y_{k+1} = 2y_k + 3, y_0 = 2$

1. krok: $x_{k+1} = 2x_k$

iterace $\Rightarrow x_k = 2^k x_0$, x_0 je libovolné
ověříme, že jde o řešení

2. krok: nalezneme jedno (partikulární) řešení
nehomogenní rovnice

konstantní řešení: $y_{k+1} = y_k$

$$y_k = 2y_k + 3$$

$$y_k = -3$$

3. krok: Součet konstantního řešení
 $y_k = -3$ a řešení homogenní rovnice
 $x_k = 2^k x_0$ je řešením nehomogenní
 rovnice.

(Ověříme princip superpozice.)

$$y_k = -3 + 2^k x_0, \quad x_0 \text{ libovolné}$$

4. krok: Určíme x_0 s pomocí počáteční
 podmínky:

$$2 = y_0 = -3 + 2^0 x_0 \Rightarrow x_0 = 5 \Rightarrow y_k = -3 + 5 \cdot 2^k$$

$k = 1, 2, \dots$
 řešení počáteční úlohy

Obecně : $y_{k+1} = ay_k + b, k=0,1,\dots$

1. $a = 1 \Rightarrow y_k = y_0 + kb, k = 1, 2, \dots$

2. $a \neq 1 \Rightarrow$

$$y_k = a^k \underbrace{\left(y_0 - \frac{b}{1-a} \right)}_{x_0} + \underbrace{\frac{b}{1-a}}_{\text{konstantní partikulární řešení}}$$

Jednoduché úrokování: jde o lineární rovnici prvního řádu: $a=1$

$$\{\text{úrok}\} = \frac{P}{100} \times \{\text{základ}\}$$

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \text{úspora po} \\ k+1 \text{ letech} \end{array} \right\}}_{S_{k+1}} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \text{úspora po} \\ k \text{ letech} \end{array} \right\}}_{S_k} + \frac{P}{100} \times \underbrace{\{\text{základ}\}}_{S_0}$$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{P}{100} S_0 \quad \left(a=1, b=\frac{P}{100} S_0 \right)$$

Řešení: $S_k = \left(1 + \frac{kP}{100} \right) S_0$

formule jednoduchého úrokování

Složené úrokování: jde o lineární rovnici prvního řádu s $a \neq 1$ a která je homogenní

α zlomková část roku ($\alpha = \frac{1}{12}$ měsíc, $\alpha = \frac{1}{2}$ půlrok...)

$$\{\text{Úrok}\} = \frac{\alpha p}{100} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{úspora na začátku} \\ \text{úrokovacího období} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{úspora po} \\ k+1 \text{ obdobích} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{úspora po} \\ k \text{ obdobích} \end{array} \right\} + \frac{\alpha p}{100} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{úspora po} \\ k \text{ obdobích} \end{array} \right\}$$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{\alpha p}{100} S_k = \left(1 + \frac{\alpha p}{100}\right) S_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Řešení:
$$S_k = \left(1 + \frac{\alpha p}{100}\right)^k S_0$$

formule složeného úrokování

Modely růstu populace :

α koeficient "porodnosti"

β koeficient "úmrtosti"

$$r = \alpha - \beta$$

$$N_{k+1} = N_k + \alpha N_k - \beta N_k$$

$$N_{k+1} = (1 + r) N_k$$

$$N_k = (1 + r)^k N_0, \quad k = 1, 2, \dots$$

9.1 Linear models for population growth

151

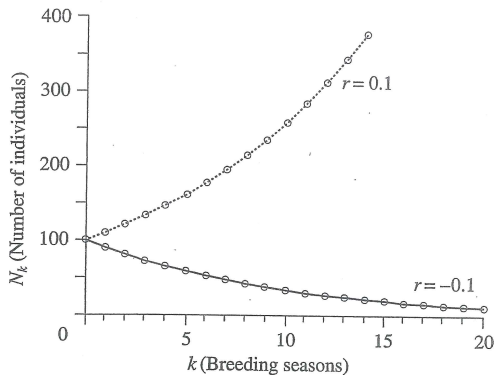


Fig. 9.1.1. Population growth as given by a linear difference equation with growth rate r .

Realističtější model : *nelineární logistická rovnice*

Experimentální (laboratorní) pozorování :

- vliv "přepleněnosti" prostředí
- vliv boje o potravu

(když populace roste $\Rightarrow \alpha \downarrow$ a $\beta \uparrow$)

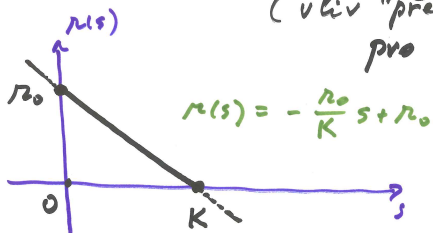
Místo : $N_{k+1} = N_k + r N_k$ máme

$$N_{k+1} = N_k + \underbrace{r(N_k) \cdot N_k}_{\text{nelinearita}}$$

$n = n(s)$ je závislé na "množství" s :

- $n \downarrow$ když $s \uparrow$
- $\exists K > 0 : n(K) = 0$ (stav "nasycenosti")
- $\lim_{s \rightarrow 0+} n(s) = n_0 > 0$ ($n(0) = n_0 > 0$)

(vliv "přeplněnosti" vyumírá
pro $s \ll 1$)



$$N_{k+1} = N_k + \underbrace{\left(-\frac{r_0}{K} N_k - r_0\right)}_{r(N_k)} N_k$$

Diskrétní logistická rovnice:

$$N_{k+1} = N_k + r_0 N_k \left(1 - \frac{N_k}{K}\right)$$

Zajímavost: řešení v uzavřeném tvaru
není známo (možná existuje)

Didaktická výhoda: možnost jednoduchých
numerických iterací pro různé
volby parametrů r_0, K, N_0

Ustálený stav (ekvilíbrio) :

$$N_{k+1} = N_k = S :$$

$$S = S + r_0 S \left(1 - \frac{S}{K}\right)$$

$$S \left(1 - \frac{S}{K}\right) = 0$$

$$S = 0$$

$$S = K$$

kritická kapacita
prostředí

Polud $N_0 = K \Rightarrow N_k = K \quad \forall k = 1, 2, \dots$

Růst versus Pokles :

$$N_{k+1} - N_k = r_0 N_k \left(1 - \frac{N_k}{K}\right)$$

1. $N_k < K \Rightarrow N_{k+1} - N_k > 0$ *růst*

2. $N_k > K \Rightarrow \quad \quad \quad < 0$ *pokles*

vždy $N_{k+1} - N_k$ je *proportionální* r_0

V závislosti na r_0 lze provést diskuzi chování iterací:

$$1. \quad r_0 < 1, N_0 < K \Rightarrow N_k \nearrow K$$

$$2. \quad r_0 \text{ větší}, r_0 < 3 \Rightarrow N_k \text{ "osciluje" okolo } K$$

$$3. \quad r_0 > 3 \Rightarrow \exists k : N_k < 0 \quad \textcircled{\text{!}}$$

model nefunguje!

Diskuze pro $r_0 \in (0, 3)$, $N_0 = 100$, $K = 1000$
 (Robert May 1975, 1976)

Stabilní růst : $0 < r_0 \leq 2$

$$0 < r_0 < 1$$

monotonní přiblížování
k hodnotě $K = 1000$

$$1 < r_0 \leq 2$$

překmitnutí, ale posléze
stabilizace a přiblížení
k hodnotě $K = 1000$

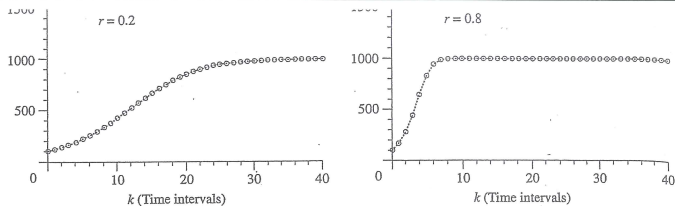


Fig. 9.3.1. Discrete logistic equation for $r = 0.2$ and $r = 0.8$. The population increases then levels out to an equilibrium value.

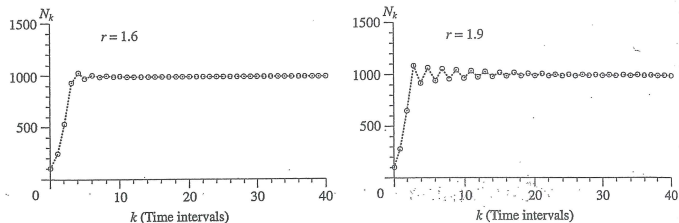


Fig. 9.3.2. Discrete logistic equation with $r = 1.6$ and $r = 1.9$. Damped oscillations.

"Periodický" růst : $2 < r_0 < 2,57$

$2 < r_0 < 2,5$ dvojcykly
amplituda roste

$r_0 > 2,5$ čtyřcykly, osmicykly, ...
(zdvoujení periody)

Chaotický růst : $2,57 < r_0 \leq 3$

9.3 A computer experiment

159

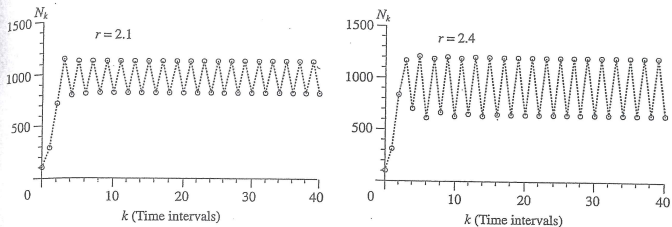


Fig. 9.3.3. Discrete logistic equation with $r = 2.1$ and $r = 2.4$. Each case demonstrates a 2-cycle.

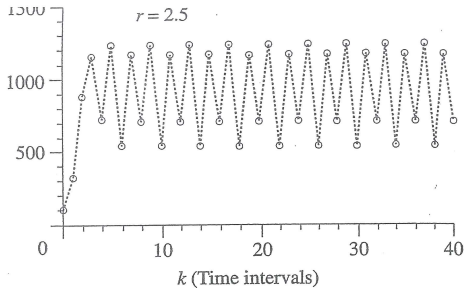
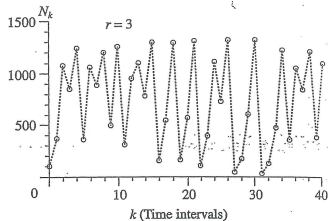
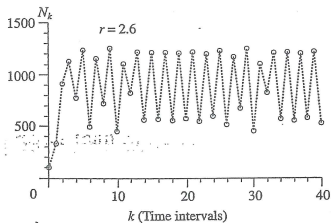


Fig. 9.3.4. Discrete logistic equation with $r = 2.5$: a 4-cycle.



Chaotic growth with $r = 2.6$ and $r = 3$.

Děkuji za pozornost!

Děkuji za pozornost!

