

Hilbertovy patálie a zkročení Hamelova monstra

Pavel Ludvík



Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-TUO Ostrava

16. dubna 2013

Občasný Seminář z Matematické Analýzy

Seminář probíhá za podpory:



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Svět vědy

CZ 1.07/2.3.00/35.0018

Co je to funkcionální rovnice?

Co je to funkcionální rovnice?

Uvažme dvojici úloh:

- 1 Najděte všechny dvojice čísel $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, které splňují rovnost

$$x^2 + y^2 = 2xy.$$

Co je to funkcionální rovnice?

Uvažme dvojici úloh:

- ❶ Najděte všechny dvojice čísel $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, které splňují rovnost

$$x^2 + y^2 = 2xy.$$

Řešení: Dvojice $\{[x, x] : x \in \mathbb{R}\}$, tj. přímka $p : y = x$.

Co je to funkcionální rovnice?

Uvažme dvojici úloh:

- ❶ Najděte všechny dvojice čísel $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, které splňují rovnost

$$x^2 + y^2 = 2xy.$$

Řešení: Dvojice $\{[x, x] : x \in \mathbb{R}\}$, tj. přímka $p : y = x$.

- ❷ Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, které splňují rovnost

$$f(x)^2 + f(y)^2 = 2f(x)f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Co je to funkcionální rovnice?

Uvažme dvojici úloh:

- ❶ Najděte všechny dvojice čísel $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, které splňují rovnost

$$x^2 + y^2 = 2xy.$$

Řešení: Dvojice $\{[x, x] : x \in \mathbb{R}\}$, tj. přímka $p : y = x$.

- ❷ Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, které splňují rovnost

$$f(x)^2 + f(y)^2 = 2f(x)f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Řešení: Rovnici splňují právě konstantní funkce, tj. $f(x) = c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.

Hezké úložky (nejen) do tramvaje

Nechť splňuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnost

$$x + f(x) = f(f(x)).$$

Najděte všechna řešení $x \in \mathbb{R}$ rovnice

$$f(f(x)) = x.$$

Hezké úložky (nejen) do tramvaje

Nechť splňuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnost

$$x + f(x) = f(f(x)).$$

Najděte všechna řešení $x \in \mathbb{R}$ rovnice

$$f(f(x)) = x.$$

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro něž platí rovnost

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 \text{ pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Hezké úložky (nejen) do tramvaje

Nechť splňuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ rovnost

$$x + f(x) = f(f(x)).$$

Najděte všechna řešení $x \in \mathbb{R}$ rovnice

$$f(f(x)) = x.$$

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro něž platí rovnost

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 \text{ pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, pro něž platí rovnost

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n) \text{ pro všechna } m, n \in \mathbb{N}_0.$$



Kontakt

Pokud by Vás zajímala řešení úloh, nebo byste případně měli zájem o další podobné úlohy, napište mi na e-mail:

`pavel.ludvik@vsb.cz`

nebo mě můžete navštívit v kanceláři A832.



Cauchyho funkcionální rovnice

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro něž platí

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Cauchyho funkcionální rovnice

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro něž platí

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Řešením rovnice se jako první zabývali:

Cauchyho funkcionální rovnice

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro něž platí

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Řešením rovnice se jako první zabývali:

- A. M. Legendre, *Eléments de géometrie*, Paříž, 1791.



Cauchyho funkcionální rovnice

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro něž platí

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Řešením rovnice se jako první zabývali:

- A. M. Legendre, *Eléments de géométrie*, Paříž, 1791.



Cauchyho funkcionální rovnice

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro něž platí

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Řešením rovnice se jako první zabývali:

- A. M. Legendre, *Eléments de géometrie*, Paříž, 1791.



- C. F. Gauss, *Theoria motus corporum coelestium*, Hamburk, 1809.



Kontemplace nad řešeními Cauchyho funkcionální rovnice

Cauchyho funkcionální rovnice (CFR).

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Funkcím, které vyhovují Cauchyho funkcionální rovnici (a právě těm), se říká **aditivní funkce**.

Kontemplace nad řešeními Cauchyho funkcionální rovnice

Cauchyho funkcionální rovnice (CFR).

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Funkcím, které vyhovují Cauchyho funkcionální rovnici (a právě těm), se říká **aditivní funkce**.

Snadná pozorování:

- 1 Funkce identita $f(x) = x$ je řešením CFR.

Kontemplace nad řešeními Cauchyho funkcionální rovnice

Cauchyho funkcionální rovnice (CFR).

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Funkcím, které vyhovují Cauchyho funkcionální rovnici (a právě těm), se říká **aditivní funkce**.

Snadná pozorování:

- 1 Funkce identita $f(x) = x$ je řešením CFR.
- 2 Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x) = cx$ řešením CFR. Taková řešení budeme nazývat **triviálními**.

Kontemplace nad řešeními Cauchyho funkcionální rovnice

Cauchyho funkcionální rovnice (CFR).

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Funkcím, které vyhovují Cauchyho funkcionální rovnici (a právě těm), se říká **aditivní funkce**.

Snadná pozorování:

- 1 Funkce identita $f(x) = x$ je řešením CFR.
- 2 Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x) = cx$ řešením CFR. Taková řešení budeme nazývat **triviálními**.

Další snadná pozorování:

Cauchyho funkcionální rovnice (CFR).

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

- 3 Do CFR dosadíme $x = y = 0$:

$$f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0),$$

a tedy $f(0) = 0$.

Cauchyho funkcionální rovnice (CFR).

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

- ③ Do CFR dosadíme $x = y = 0$:

$$f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0),$$

a tedy $f(0) = 0$.

- ④ Dosadíme-li $y = -x$:

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x),$$

a tedy $f(-x) = -f(x)$.

Cauchyho funkcionální rovnice (CFR).

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

- 3 Do CFR dosadíme $x = y = 0$:

$$f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0),$$

a tedy $f(0) = 0$.

- 4 Dosadíme-li $y = -x$:

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x),$$

a tedy $f(-x) = -f(x)$.

- 5 Dosadíme-li $y = x$:

$$f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

Cauchyho funkcionální rovnice (CFR).

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

- 3 Do CFR dosadíme $x = y = 0$:

$$f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0),$$

a tedy $f(0) = 0$.

- 4 Dosadíme-li $y = -x$:

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x),$$

a tedy $f(-x) = -f(x)$.

- 5 Dosadíme-li $y = x$:

$$f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

- 6 Dosadíme-li $y = 2x$:

$$f(3x) = f(2x) + f(x) = 2f(x) + f(x) = 3f(x).$$

Tvrzení: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(nx) = nf(x). \quad (1)$$

Tvrzení: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(nx) = nf(x). \quad (1)$$

Důkaz: Matematickou indukcí podle $n \in \mathbb{N}$.

Tvrzení: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(nx) = nf(x). \quad (1)$$

Důkaz: Matematickou indukcí podle $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1$: Zřejmé.

Tvrzení: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(nx) = nf(x). \quad (1)$$

Důkaz: Matematickou indukcí podle $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1$: Zřejmé.
- Nechť tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$: Dosadíme-li $y = nx$,

$$f(x + nx) = f(x) + f(nx) = f(x) + nf(x) = (n + 1)f(x).$$



Tvrzení: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(nx) = nf(x). \quad (1)$$

- 7 Díky vztahům $f(-x) = -f(x)$ a $f(0) = 0$ platí rovnost (1) pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$.

Tvrzení: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(nx) = nf(x). \quad (1)$$

- 7 Díky vztahům $f(-x) = -f(x)$ a $f(0) = 0$ platí rovnost (1) pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$.
- 8 Mějme libovolné $\lambda = \frac{n}{m}$, kde $n \in \mathbb{Z}$ a $m \in \mathbb{N}$. Pak $nx = m\lambda x$ a platí

$$nf(x) = f(nx) = f(m\lambda x) = mf(\lambda x), \text{ a tedy } f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Tvrzení: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(nx) = nf(x). \quad (1)$$

- 7 Díky vztahům $f(-x) = -f(x)$ a $f(0) = 0$ platí rovnost (1) pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{Z}$.
- 8 Mějme libovolné $\lambda = \frac{n}{m}$, kde $n \in \mathbb{Z}$ a $m \in \mathbb{N}$. Pak $nx = m\lambda x$ a platí

$$nf(x) = f(nx) = f(m\lambda x) = mf(\lambda x), \text{ a tedy } f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Konečně: Pro každé $\lambda \in \mathbb{Q}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Triviální řešení CFR.

A.-L. Cauchy (1821)

Předpokládejme, že f je spojitá funkce na $\mathbb{R}$ a splňuje CFR. Pak $f(x) = cx$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.

Triviální řešení CFR.

A.-L. Cauchy (1821)

Předpokládejme, že f je spojitá funkce na $\mathbb{R}$ a splňuje CFR. Pak $f(x) = cx$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.



Důkaz. Položme $c = f(1)$. Pak z předchozího nutně platí $f(\lambda) = \lambda c$ pro každé $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Závěr je důsledkem spojitosti funkce f a hustoty $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$. ♣

Triviální řešení CFR.

A.-L. Cauchy (1821)

Předpokládejme, že f je spojitá funkce na $\mathbb{R}$ a splňuje CFR. Pak $f(x) = cx$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.



Důkaz. Položme $c = f(1)$. Pak z předchozího nutně platí $f(\lambda) = \lambda c$ pro každé $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Závěr je důsledkem spojitosti funkce f a hustoty $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$. ♣

Poznámka (G. Darboux (1875))

Pro tvrzení předchozí věty stačí spojitost v jediném bodě.

Triviální řešení CFR.

A.-L. Cauchy (1821)

Předpokládejme, že f je spojitá funkce na $\mathbb{R}$ a splňuje CFR. Pak $f(x) = cx$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.



Důkaz. Položme $c = f(1)$. Pak z předchozího nutně platí $f(\lambda) = \lambda c$ pro každé $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Závěr je důsledkem spojitosti funkce f a hustoty $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$. ♣

Poznámka (G. Darboux (1875))

Pro tvrzení předchozí věty stačí spojitost v jediném bodě.

Důkaz. Nechť f je spojitá v x_0 a $x \in \mathbb{R}$ je libovolný bod.

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow x} f(u) &= \lim_{u-x+x_0 \rightarrow x_0} f[(u-x+x_0) + (x-x_0)] = \lim_{t \rightarrow x_0} f[t + (x-x_0)] \\ &= \lim_{t \rightarrow x_0} f(t) + f(x-x_0) = f(x_0) + f(x-x_0) = f(x)\end{aligned}\quad \clubsuit$$

Věta (A ono je to ještě zajímavější!)

Pro řešení f Cauchyho funkcionální rovnice je ekvivalentní

- ① *f je triviální,*
- ② *f je spojitá na $\mathbb{R}$,*
- ③ *f je spojitá v jednom bodě $\mathbb{R}$,*
- ④ *f je omezená na nějakém (neprázdném) intervalu,*
- ⑤ *f je omezená zdola nebo shora na nějakém (neprázdném) intervalu,*
- ⑥ *graf G_f funkce f není hustý v $\mathbb{R}^2$.*

Věta (A ono je to ještě zajímavější!)

Pro řešení f Cauchyho funkcionální rovnice je ekvivalentní

- ① f je triviální,
- ② f je spojitá na $\mathbb{R}$,
- ③ f je spojitá v jednom bodě $\mathbb{R}$,
- ④ f je omezená na nějakém (neprázdném) intervalu,
- ⑤ f je omezená zdola nebo shora na nějakém (neprázdném) intervalu,
- ⑥ graf G_f funkce f není hustý v $\mathbb{R}^2$.

Důkaz. $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3), (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6)$: Triviální.

Věta (A ono je to ještě zajímavější!)

Pro řešení f Cauchyho funkcionální rovnice je ekvivalentní

- ① f je triviální,
- ② f je spojitá na $\mathbb{R}$,
- ③ f je spojitá v jednom bodě $\mathbb{R}$,
- ④ f je omezená na nějakém (neprázdném) intervalu,
- ⑤ f je omezená zdola nebo shora na nějakém (neprázdném) intervalu,
- ⑥ graf G_f funkce f není hustý v $\mathbb{R}^2$.

Důkaz. $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3), (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6)$: Triviální.

$(3) \Rightarrow (1)$: Viz předchozí slide.

Věta (A ono je to ještě zajímavější!)

Pro řešení f Cauchyho funkcionální rovnice je ekvivalentní

- ① f je triviální,
- ② f je spojitá na $\mathbb{R}$,
- ③ f je spojitá v jednom bodě $\mathbb{R}$,
- ④ f je omezená na nějakém (neprázdném) intervalu,
- ⑤ f je omezená zdola nebo shora na nějakém (neprázdném) intervalu,
- ⑥ graf G_f funkce f není hustý v $\mathbb{R}^2$.

Důkaz. $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3), (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6)$: Triviální.

$(3) \Rightarrow (1)$: Viz předchozí slide.

$(3) \Rightarrow (4)$: Spojitost v bodě zaručuje omezenost na nějakém intervalu obsahujícím tento bod.

Věta (A ono je to ještě zajímavější!)

Pro řešení f Cauchyho funkcionální rovnice je ekvivalentní

- ① f je triviální,
- ② f je spojitá na $\mathbb{R}$,
- ③ f je spojitá v jednom bodě $\mathbb{R}$,
- ④ f je omezená na nějakém (neprázdném) intervalu,
- ⑤ f je omezená zdola nebo shora na nějakém (neprázdném) intervalu,
- ⑥ graf G_f funkce f není hustý v $\mathbb{R}^2$.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3), (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6): Triviální.

(3) $\Rightarrow$ (1): Viz předchozí slide.

(3) $\Rightarrow$ (4): Spojitost v bodě zaručuje omezenost na nějakém intervalu obsahujícím tento bod.

(6) $\Rightarrow$ (3): Podle předpokladu existuje dvourozměrný interval $(a, b) \times (c, d)$, který je disjunktní s grafem G_f funkce f .

Z aditivity plyne, že na (a, b) platí buď $f < c$ nebo $f > d$. Dostáváme jednostrannou omezenost f na (a, b) .

Posunutím tohoto intervalu do nuly získáme díky platnosti

$f(-x) = -f(x)$ oboustrannou omezenost na nějakém okolí nuly. Ta již implikuje spojitost v nule, tudíž (3).



Nezodpovězená otázka:

Existují také netriviální řešení Cauchyho funkcionální rovnice?

Axiom výběru - někdy také *Zermelův axiom*

G. Peano, *Demonstration de l'integrabilite des equations differentielles ordinaires* (1890)

(...) Protože však nelze **nekonečně krát** použít **svévolného** pravidla, které třídě A přiřazuje nějaký její prvek, stanovujeme zde pravidlo **určité**. (...)

Axiom výběru - někdy také *Zermelův axiom*

G. Peano, *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires* (1890)

(...) Protože však nelze **nekonečně krát** použít **svévolného** pravidla, které třídě A přiřazuje nějaký její prvek, stanovujeme zde pravidlo **určité**. (...)



Axiom výběru – E. Zermelo (1904)

Pro každý soubor $\mathcal{F}$ neprázdných množin existuje funkce f taková, že $f(S) \in S$ pro každou množinu S ze souboru $\mathcal{F}$.

Axiom výběru - někdy také *Zermelův axiom*

G. Peano, *Demonstration de l'integrabilite des equations differentielles ordinaires* (1890)

(...) Protože však nelze **nekonečně krát** použít **svévolného** pravidla, které třídě A přiřazuje nějaký její prvek, stanovujeme zde pravidlo **určité**. (...)



Axiom výběru – E. Zermelo (1904)

Pro každý soubor $\mathcal{F}$ neprázdných množin existuje funkce f taková, že $f(S) \in S$ pro každou množinu S ze souboru $\mathcal{F}$.

Axiom výběru je **nezávislý** na teorii množin (tj. na Zermelově-Fraenkelově systému axiomů):

- 1 V roce 1940 dokázal K. Gödel bezspornost **Axiomu výběru** s teorií množin.

Axiom výběru - někdy také *Zermelův axiom*

G. Peano, *Demonstration de l'integrabilite des equations differentielles ordinaires* (1890)

(...) Protože však nelze **nekonečně krát** použít **svévolného** pravidla, které třídě A přiřazuje nějaký její prvek, stanovujeme zde pravidlo **určité**. (...)



Axiom výběru – E. Zermelo (1904)

Pro každý soubor $\mathcal{F}$ neprázdných množin existuje funkce f taková, že $f(S) \in S$ pro každou množinu S ze souboru $\mathcal{F}$.

Axiom výběru je **nezávislý** na teorii množin (tj. na Zermelově-Fraenkelově systému axiomů):

- 1 V roce 1940 dokázal K. Gödel bezspornost **Axiomu výběru** s teorií množin.
- 2 V roce 1963 dokázal P. J. Cohen bezspornost **negace Axiomu výběru** s teorií množin.

Ukázka pověstného Zermelova humoru:

The Ten Commands of Baal on Two Clay Tablets

- ① I am Baal, Your God. You shall not have any other god.
- ② You shall make images of Me as many as you can, and no place shall be without a Baal's image, neither on earth nor under the earth.
- ③ You shall name Your God at any time and everywhere, for Baal will not hold guiltless those who hide His name.
- ④ You shall keep the holiday holy and celebrate feasts day for day. Let others have the labour.
- ⑤ You shall unconditionally obey the priests of Baal, even against Your father and Your mother.
- ⑥ You shall kill all those standing in the way of Baal, men, women, and children, so that the infidels shall be wiped out from earth.
- ⑦ You shall not remain unmarried, but bring descendants into the world like sand at the sea.
- ⑧ To honour Baal You shall steal as much as You can from those who do not worship Him.
- ⑨ You shall bear false witness against the infidels and lie and slander Your head off: Always there is something which gets stuck.
- ⑩ You shall covet posts and ranks, those that exist and those that do not, and let no infidel keep his ones.

Svět bez Axiomu výběru

Můžeme bezesporně přijmout následující tvrzení:



Svět bez Axiomu výběru

Můžeme bezesporně přijmout následující tvrzení:

- Reálná čísla $\mathbb{R}$ jsou sjednocením spočetně mnoha spočetných množin.

Svět bez Axiomu výběru

Můžeme bezesporně přijmout následující tvrzení:

- Reálná čísla $\mathbb{R}$ jsou sjednocením spočetně mnoha spočetných množin.
- Existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$, v němž f není spojitá. Přitom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro niž $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Svět bez Axiomu výběru

Můžeme bezesporně přijmout následující tvrzení:

- Reálná čísla $\mathbb{R}$ jsou sjednocením spočetně mnoha spočetných množin.
- Existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$, v němž f není spojitá. Přitom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro niž $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
- Existuje podmnožina reálných čísel, která není separabilní (spočetná hustá).

Svět bez Axiomu výběru

Můžeme bezesporně přijmout následující tvrzení:

- Reálná čísla $\mathbb{R}$ jsou sjednocením spočetně mnoha spočetných množin.
- Existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$, v němž f není spojitá. Přitom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro niž $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
- Existuje podmnožina reálných čísel, která není separabilní (spočetná hustá).
- Existuje nekonečná podmnožina reálných čísel X taková, že neexistuje prosté zobrazení na vlastní podmnožinu X .

Svět bez Axiomu výběru

Můžeme bezesporně přijmout následující tvrzení:

- Reálná čísla $\mathbb{R}$ jsou sjednocením spočetně mnoha spočetných množin.
- Existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$, v němž f není spojitá. Přitom platí $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro niž $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
- Existuje podmnožina reálných čísel, která není separabilní (spočetná hustá).
- Existuje nekonečná podmnožina reálných čísel X taková, že neexistuje prosté zobrazení na vlastní podmnožinu X .
- Existuje vektorový prostor, který nemá bázi.

Hamelova báze

Definice

Podmnožinu X reálných čísel nazveme **nezávislou**, pokud žádná lineární kombinace

$$r_1 a_1 + \dots + r_k a_k,$$

kde $a_1, \dots, a_k \in X$ jsou různá reálná čísla a $r_1, \dots, r_k$ jsou nenulové *racionální koeficienty*, není *nulová*.

Množinu H nazveme **Hamelovou bází**, pokud můžeme každé reálné číslo $x \in \mathbb{R}$ *jednoznačně* zapsat ve tvaru

$$x = r_1 e_1 + \dots + r_k e_k,$$

kde $e_1, \dots, e_k \in H$ a $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{Q}$.

Netriviální řešení CFR – HAMELOVO MONSTRUM

G. Hamel roku 1905 v článku

Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$

dokázal, že **Hamelova báze existuje**. Tvrzení je důsledkem Axiomu výběru. V článku je dále dokázáno:

Netriviální řešení CFR – HAMELOVO MONSTRUM

G. Hamel roku 1905 v článku

Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$

dokázal, že **Hamelova báze existuje**. Tvrzení je důsledkem Axiomu výběru. V článku je dále dokázáno:

G. Hamel (1905)

Existuje netriviální řešení CFR.

Netriviální řešení CFR – HAMELOVO MONSTRUM

Důkaz. Necht' $\{e_i : i \in I\}$ je Hamelova báze. Pak můžeme každé číslo $x \in \mathbb{R}$ jednoznačně vyjádřit jako

$$x = \sum_{i \in I} q_i(x) \cdot e_i,$$

přičemž $q_i(x) \in \mathbb{Q}$ a v sumě je pouze konečně mnoho hodnot nenulových.

Netriviální řešení CFR – HAMELOVO MONSTRUM

Důkaz. Necht $\{e_i : i \in I\}$ je Hamelova báze. Pak můžeme každé číslo $x \in \mathbb{R}$ jednoznačně vyjádřit jako

$$x = \sum_{i \in I} q_i(x) \cdot e_i,$$

přičemž $q_i(x) \in \mathbb{Q}$ a v sumě je pouze konečně mnoho hodnot nenulových. Zvolíme libovolný index $i_0 \in I$ a definujeme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$f(x) = q_{i_0}(x), \text{ kde } x \in \mathbb{R}.$$

Netriviální řešení CFR – HAMELOVO MONSTRUM

Důkaz. Necht' $\{e_i : i \in I\}$ je Hamelova báze. Pak můžeme každé číslo $x \in \mathbb{R}$ jednoznačně vyjádřit jako

$$x = \sum_{i \in I} q_i(x) \cdot e_i,$$

přičemž $q_i(x) \in \mathbb{Q}$ a v sumě je pouze konečně mnoho hodnot nenulových. Zvolíme libovolný index $i_0 \in I$ a definujeme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$f(x) = q_{i_0}(x), \text{ kde } x \in \mathbb{R}.$$

Uvědomíme si následující

Netriviální řešení CFR – HAMELOVO MONSTRUM

Důkaz. Necht $\{e_i : i \in I\}$ je Hamelova báze. Pak můžeme každé číslo $x \in \mathbb{R}$ jednoznačně vyjádřit jako

$$x = \sum_{i \in I} q_i(x) \cdot e_i,$$

přičemž $q_i(x) \in \mathbb{Q}$ a v sumě je pouze konečně mnoho hodnot nenulových. Zvolíme libovolný index $i_0 \in I$ a definujeme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$f(x) = q_{i_0}(x), \text{ kde } x \in \mathbb{R}.$$

Uvědomíme si následující

- 1 Funkce f nabývá pouze racionálních hodnot a

Netriviální řešení CFR – HAMELOVO MONSTRUM

Důkaz. Necht' $\{e_i : i \in I\}$ je Hamelova báze. Pak můžeme každé číslo $x \in \mathbb{R}$ jednoznačně vyjádřit jako

$$x = \sum_{i \in I} q_i(x) \cdot e_i,$$

přičemž $q_i(x) \in \mathbb{Q}$ a v sumě je pouze konečně mnoho hodnot nenulových. Zvolíme libovolný index $i_0 \in I$ a definujeme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$f(x) = q_{i_0}(x), \text{ kde } x \in \mathbb{R}.$$

Uvědomíme si následující

- ① Funkce f nabývá pouze racionálních hodnot a
- ② $f(0) = 0$ a $f(e_{i_0}) = 1$, takže f je **nespojité**.

Netriviální řešení CFR – HAMELOVO MONSTRUM

Důkaz. Necht' $\{e_i : i \in I\}$ je Hamelova báze. Pak můžeme každé číslo $x \in \mathbb{R}$ jednoznačně vyjádřit jako

$$x = \sum_{i \in I} q_i(x) \cdot e_i,$$

přičemž $q_i(x) \in \mathbb{Q}$ a v sumě je pouze konečně mnoho hodnot nenulových. Zvolíme libovolný index $i_0 \in I$ a definujeme funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$f(x) = q_{i_0}(x), \text{ kde } x \in \mathbb{R}.$$

Uvědomíme si následující

- ① Funkce f nabývá pouze racionálních hodnot a
- ② $f(0) = 0$ a $f(e_{i_0}) = 1$, takže f je **nespojité**.
- ③ Funkce f **vyhovuje CFR** (snadný důsledek jednoznačnosti vyjádření v prvcích Hamelovy báze).



Závěrečné slovo nad CFR

Obecné řešení CFR

Nechť je, stejně jako v předchozím důkazu, $\{e_i : i \in I\}$ libovolná Hamelova báze. Pak se dá **každé řešení** CFR zapsat ve tvaru

$$f(x) = \sum_{i \in I} q_i(x) f(e_i),$$

přičemž hodnoty $f(e_i)$ v bodech Hamelovy báze si můžeme zvolit **libovolně**.

Další příklady konstruované pomocí Hamelovy báze

Existuje podmnožina $M \subset \mathbb{R}$ taková, že můžeme $\mathbb{R}$ rozložit na spočetně mnoho disjunktních částí, z nichž každá je posunutím množiny M a je hustá v $\mathbb{R}$.

Další příklady konstruované pomocí Hamelovy báze

Existuje podmnožina $M \subset \mathbb{R}$ taková, že můžeme $\mathbb{R}$ rozložit na spočetně mnoho disjunktních částí, z nichž každá je posunutím množiny M a je hustá v $\mathbb{R}$.

Existuje rozklad intervalu $(0, \infty)$ na dvě neprázdné množiny, z nichž každá je uzavřená na sčítání.

Další příklady konstruované pomocí Hamelovy báze

Existuje podmnožina $M \subset \mathbb{R}$ taková, že můžeme $\mathbb{R}$ rozložit na spočetně mnoho disjunktních částí, z nichž každá je posunutím množiny M a je hustá v $\mathbb{R}$.

Existuje rozklad intervalu $(0, \infty)$ na dvě neprázdné množiny, z nichž každá je uzavřená na sčítání.

Pro lineárně nezávislé $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, které jsou lineárně nezávislé nad $\mathbb{Q}$ existují nekonstantní funkce $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že f je periodická s periodou α , g s periodou β a $f + g$ s periodou γ .

Další příklady konstruované pomocí Hamelovy báze

Existuje podmnožina $M \subset \mathbb{R}$ taková, že můžeme $\mathbb{R}$ rozložit na spočetně mnoho disjunktních částí, z nichž každá je posunutím množiny M a je hustá v $\mathbb{R}$.

Existuje rozklad intervalu $(0, \infty)$ na dvě neprázdné množiny, z nichž každá je uzavřená na sčítání.

Pro lineárně nezávislé $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, které jsou lineárně nezávislé nad $\mathbb{Q}$ existují nekonstantní funkce $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že f je periodická s periodou α , g s periodou β a $f + g$ s periodou γ .

Pro každou funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existuje dvojice funkcí $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s Darbouxovou vlastností takové, že $f = g + h$.



Hilbertovy patálie

2. mezinárodní kongres matematiků v Paříži, rok 1900

David Hilbert ve své přednášce *Problémy matematiky* předložil 23 podle jeho soudu nejvýznamnějších tehdy nevyřešených matematických problémů.



Hilbertovy patálie

2. mezinárodní kongres matematiků v Paříži, rok 1900

David Hilbert ve své přednášce *Problémy matematiky* předložil 23 podle jeho soudu nejvýznamnějších tehdy nevyřešených matematických problémů.

- Většina problémů je dnes vyřešena.



Hilbertovy patálie

2. mezinárodní kongres matematiků v Paříži, rok 1900

David Hilbert ve své přednášce *Problémy matematiky* předložil 23 podle jeho soudu nejvýznamnějších tehdy nevyřešených matematických problémů.

- Většina problémů je dnes vyřešena.
- Řešení velké části problémů významně ovlivnilo vývoj matematiky 20. století.



Hilbertovy patálie

2. mezinárodní kongres matematiků v Paříži, rok 1900

David Hilbert ve své přednášce *Problémy matematiky* předložil 23 podle jeho soudu nejvýznamnějších tehdy nevyřešených matematických problémů.

- Většina problémů je dnes vyřešena.
- Řešení velké části problémů významně ovlivnilo vývoj matematiky 20. století.
- Jako první byl ještě roku 1900 vyřešen 3. Hilbertův problém.



Hilbertovy patálie

2. mezinárodní kongres matematiků v Paříži, rok 1900

David Hilbert ve své přednášce *Problémy matematiky* předložil 23 podle jeho soudu nejvýznamnějších tehdy nevyřešených matematických problémů.

- Většina problémů je dnes vyřešena.
- Řešení velké části problémů významně ovlivnilo vývoj matematiky 20. století.
- Jako první byl ještě roku 1900 vyřešen 3. Hilbertův problém.

AKTUALIZOVÁNO: Millennium Prize Problems, rok 2000

Clay Mathematics Institute předložil 7 zásadních nevyřešených matematických problémů.



Hilbertovy patálie

2. mezinárodní kongres matematiků v Paříži, rok 1900

David Hilbert ve své přednášce *Problémy matematiky* předložil 23 podle jeho soudu nejvýznamnějších tehdy nevyřešených matematických problémů.

- Většina problémů je dnes vyřešena.
- Řešení velké části problémů významně ovlivnilo vývoj matematiky 20. století.
- Jako první byl ještě roku 1900 vyřešen 3. Hilbertův problém.

AKTUALIZOVÁNO: Millennium Prize Problems, rok 2000

Clay Mathematics Institute předložil 7 zásadních nevyřešených matematických problémů.

- Vyřešení každého z nich je honorováno částkou 1 000 000 dolarů.



Hilbertovy patálie

2. mezinárodní kongres matematiků v Paříži, rok 1900

David Hilbert ve své přednášce *Problémy matematiky* předložil 23 podle jeho soudu nejvýznamnějších tehdy nevyřešených matematických problémů.

- Většina problémů je dnes vyřešena.
- Řešení velké části problémů významně ovlivnilo vývoj matematiky 20. století.
- Jako první byl ještě roku 1900 vyřešen 3. Hilbertův problém.

AKTUALIZOVÁNO: Millennium Prize Problems, rok 2000

Clay Mathematics Institute předložil 7 zásadních nevyřešených matematických problémů.

- Vyřešení každého z nich je honorováno částkou 1 000 000 dolarů.
- Z původních Hilbertových problémů zůstává Riemannova hypotéza.



Hilbertovy patálie

2. mezinárodní kongres matematiků v Paříži, rok 1900

David Hilbert ve své přednášce *Problémy matematiky* předložil 23 podle jeho soudu nejvýznamnějších tehdy nevyřešených matematických problémů.

- Většina problémů je dnes vyřešena.
- Řešení velké části problémů významně ovlivnilo vývoj matematiky 20. století.
- Jako první byl ještě roku 1900 vyřešen 3. Hilbertův problém.

AKTUALIZOVÁNO: Millennium Prize Problems, rok 2000

Clay Mathematics Institute předložil 7 zásadních nevyřešených matematických problémů.

- Vyřešení každého z nich je honorováno částkou 1 000 000 dolarů.
- Z původních Hilbertových problémů zůstává Riemannova hypotéza.
- Vyřešen je dosud jediný problém: Poincarého hypotézu dokázal roku G. Perelman.

- Roku 1996 získal cenu Evropské matematické společnosti – **EMS Prize** ([odmítl. . .](#)).

- Roku 1996 získal cenu Evropské matematické společnosti – **EMS Prize** ([odmítl...](#)).
- Roku 2006 získal nejvýznamnější matematické ocenění – **Fieldsovu medaili** ([odmítl...](#)).

- Roku 1996 získal cenu Evropské matematické společnosti – **EMS Prize** ([odmítl...](#)).
- Roku 2006 získal nejvýznamnější matematické ocenění – **Fieldsovu medaili** ([odmítl...](#)).
- Roku 2010 získal 1 000 000 dolarů a **Millenium Prize** ([odmítl...](#))

Grigorij Perelman



- Roku 1996 získal cenu Evropské matematické společnosti – **EMS Prize** ([odmítl...](#)).
- Roku 2006 získal nejvýznamnější matematické ocenění – **Fieldsovu medaili** ([odmítl...](#)).
- Roku 2010 získal 1 000 000 dolarů a **Millenium Prize** ([odmítl...](#))

Motivace 3. Hilbertova problému: Věta Wallace-Bolyai–Gerwien

W. Wallace (1808)

Mějme v rovině dva mnohoúhelníky K_1 , K_2 stejného obsahu. Pak je možné K_1 „rozstříhat“ na konečný počet menších mnohoúhelníků a z těchto kousků poskládat K_2 .

Motivace 3. Hilbertova problému: Věta Wallace-Bolyai–Gerwien

W. Wallace (1808)

Mějme v rovině dva mnohoúhelníky K_1 , K_2 stejného obsahu. Pak je možné K_1 „rozstříhat“ na konečný počet menších mnohoúhelníků a z těchto kousků poskládat K_2 .

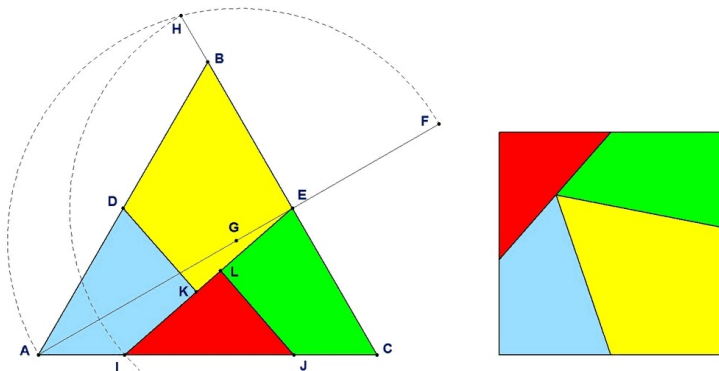
Jak z trojúhelníku vyrobit čtverec?

Motivace 3. Hilbertova problému: Věta Wallace-Bolyai–Gerwien

W. Wallace (1808)

Mějme v rovině dva mnohoúhelníky K_1 , K_2 stejného obsahu. Pak je možné K_1 „rozstříhat“ na konečný počet menších mnohoúhelníků a z těchto kousků poskládat K_2 .

Jak z trojúhelníku vyrobit čtverec?



3. Hilbertův problém

Definice (Mnohostěn)

Mnohostěnem nazveme konvexní množinu v $\mathbb{R}^3$, kterou lze vyjádřit jako sjednocení konečně mnoha uzavřených čtyřstěnů.

Třídu mnohostěnů v $\mathbb{R}^3$ nazveme P_3 .

3. Hilbertův problém

Definice (Mnohostěn)

Mnohostěnem nazveme konvexní množinu v $\mathbb{R}^3$, kterou lze vyjádřit jako sjednocení konečně mnoha uzavřených čtyřstěnů.

Třídu mnohostěnů v $\mathbb{R}^3$ nazveme P_3 .

3. Hilbertův problém

Je možné „rozřezat“ jednotkovou krychli na konečný počet mnohostěnů tak, že ze získaného souboru budeme moct „poskládat“ pravidelný čtyřstěn jednotkového objemu?

3. Hilbertův problém

Definice (Mnohostěn)

Mnohostěnem nazveme konvexní množinu v $\mathbb{R}^3$, kterou lze vyjádřit jako sjednocení konečně mnoha uzavřených čtyřstěnů.

Třídu mnohostěnů v $\mathbb{R}^3$ nazveme P_3 .

3. Hilbertův problém

Je možné „rozřezat“ jednotkovou krychli na konečný počet mnohostěnů tak, že ze získaného souboru budeme moct „poskládat“ pravidelný čtyřstěn jednotkového objemu?

Odpověď na tuto otázku je **ZÁPORNÁ**.

Dehnův funkcionál – definice

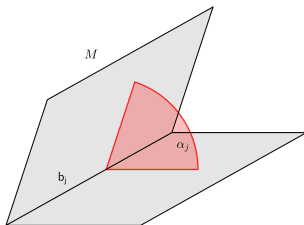
- Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je řešení CFR takové, že $f(\pi) = 0$.

Dehnův funkcionál – definice

- Necht $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je řešení CFR takové, že $f(\pi) = 0$.
- Definujeme lineární zobrazení, zvané **Dehnův funkcionál**

$$D_f : P_3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{předpisem}$$
$$D_f(M) = \sum_{j \in J} f(\alpha_j) \cdot |b_j|, \quad \text{kde } M \in P_3$$

a $\{b_j\}_{j \in J}$ je soubor všech hran mnohostěnu M , $|b_j|$ je délka příslušné hrany a α_j je hodnota vnitřního úhlu příslušícího hraně b_j (tj. úhlu, který svírají dvě stěny mnohoúhelníku protínající se v hraně b_j).



Nástin řešení 3. Hilbertova problému



- Roku 1896 poskytl elegantní důkaz Bricard – bohužel byl chybný.

Nástin řešení 3. Hilbertova problému



- Roku 1896 poskytl elegantní důkaz Bricard – bohužel byl chybný.
- Stejně tak byl chybný elegantní důkaz Meschkowského z roku 1960.

Nástin řešení 3. Hilbertova problému



- Roku 1896 poskytl elegantní důkaz Bricard – bohužel byl chybný.
- Stejně tak byl chybný elegantní důkaz Meschkowského z roku 1960.
- Roku 1900 vyřešil problém ve své dizertační práci Hilbertův student [Max Dehn](#).

Nástin řešení 3. Hilbertova problému



- Roku 1896 poskytl elegantní důkaz Bricard – bohužel byl chybný.
- Stejně tak byl chybný elegantní důkaz Meschkowského z roku 1960.
- Roku 1900 vyřešil problém ve své dizertační práci Hilbertův student **Max Dehn**.

1 Dehnův funkcional D_f je invariantní vůči posunutím a rotacím v $\mathbb{R}^3$.

Nástin řešení 3. Hilbertova problému



- Roku 1896 poskytl elegantní důkaz Bricard – bohužel byl chybný.
- Stejně tak byl chybný elegantní důkaz Meschkowského z roku 1960.
- Roku 1900 vyřešil problém ve své dizertační práci Hilbertův student **Max Dehn**.

- 1 Dehnův funkcional D_f je invariantní vůči posunutím a rotacím v $\mathbb{R}^3$.
- 2 Pokud lze $M \in P_3$ rozřezat na mnohostrany $P_1, \dots, P_n$, pak platí

$$D_f(M) = D_f(P_1) + \dots + D_f(P_n).$$

Nástin řešení 3. Hilbertova problému



- Roku 1896 poskytl elegantní důkaz Bricard – bohužel byl chybný.
- Stejně tak byl chybný elegantní důkaz Meschkowského z roku 1960.
- Roku 1900 vyřešil problém ve své dizertační práci Hilbertův student **Max Dehn**.

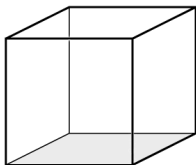
- 1 Dehnův funkcional D_f je invariantní vůči posunutím a rotacím v $\mathbb{R}^3$.
- 2 Pokud lze $M \in P_3$ rozřezat na mnohostěny $P_1, \dots, P_n$, pak platí

$$D_f(M) = D_f(P_1) + \dots + D_f(P_n).$$

- 3 **Důsledek:** Pokud pro dva mnohostěny M a N platí

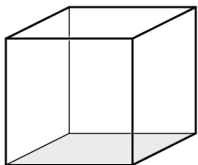
$$D_f(M) \neq D_f(N),$$

pak není možné M rozřezat na konečně mnoho mnohostěňů a poskládat z nich N .



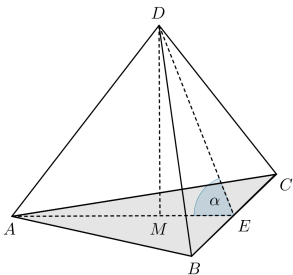
Jednotková krychle M :

$$D_f(M) = 12f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6f(\pi) = 0.$$



Jednotková krychle M :

$$D_f(M) = 12f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6f(\pi) = 0.$$



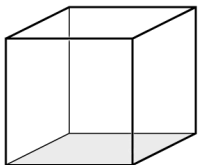
Pravidelný čtyřstěn jednotkového objemu N :

Nechť má hrany délky l . Vnitřní úhly mají všechny velikost α . Z obrázku vidíme:

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \text{ tj. } \alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

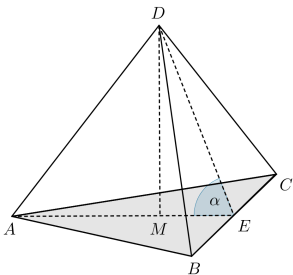
Pak

$$D_f(N) = 6lf(\alpha).$$



Jednotková krychle M :

$$D_f(M) = 12f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6f(\pi) = 0.$$



Pravidelný čtyřstěn jednotkového objemu N :

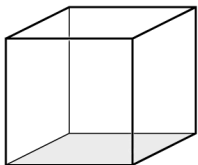
Nechť má hrany délky l . Vnitřní úhly mají všechny velikost α . Z obrázku vidíme:

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \text{ tj. } \alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

Pak

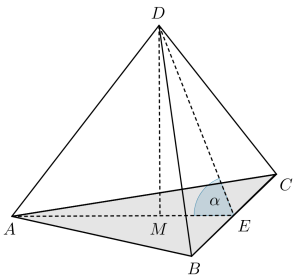
$$D_f(N) = 6lf(\alpha).$$

- Je možné najít funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která řeší CFR a současně $f(\pi) = 0$ a $f(\alpha) = 1$.



Jednotková krychle M :

$$D_f(M) = 12f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6f(\pi) = 0.$$



Pravidelný čtyřstěn jednotkového objemu N :

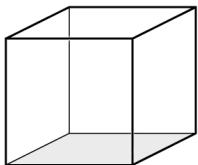
Nechť má hrany délky l . Vnitřní úhly mají všechny velikost α . Z obrázku vidíme:

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \text{ tj. } \alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

Pak

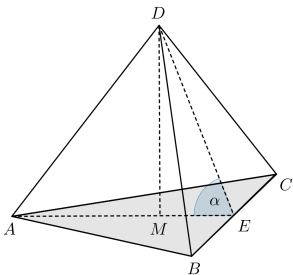
$$D_f(N) = 6lf(\alpha).$$

- Je možné najít funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která řeší CFR a současně $f(\pi) = 0$ a $f(\alpha) = 1$.
- Takže $D_f(M) = 0$ a $D_f(N) = 6l \neq 0$.



Jednotková krychle M :

$$D_f(M) = 12f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6f(\pi) = 0.$$



Pravidelný čtyřstěn jednotkového objemu N :

Nechť má hrany délky l . Vnitřní úhly mají všechny velikost α . Z obrázku vidíme:

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \text{ tj. } \alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

Pak

$$D_f(N) = 6lf(\alpha).$$

- Je možné najít funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která řeší CFR a současně $f(\pi) = 0$ a $f(\alpha) = 1$.
- Takže $D_f(M) = 0$ a $D_f(N) = 6l \neq 0$.



Závěrečné rozuzlení

J.-P. Sydler (1965)

Nechť M , N jsou mnohostěny stejného objemu. Pak je možné mnohostěn M rozřezat na konečně mnoho dílů a poskládat z něj N , právě když pro každý Dehnův funkcional D_f platí

$$D_f(M) = D_f(N).$$

Děkuji za pozornost.

Použitá a další doporučená literatura

-  Aigner, Martin, a Gunter M. Ziegler.
Proofs from THE BOOK. Springer, Berlin (1999).
-  Ebbinghaus, Heinz-Dieter, a Volker Peckhaus.
Ernst Zermelo: An approach to his life and work. Springer, 2007.
-  Jech, Thomas J.
The axiom of choice. Courier Dover Publications, (2008).
-  Kharazishvili, Aleksandre Bezhanovich.
Strange functions in real analysis. Vol. 272. CRC Press, 2006.
-  Kolman, Vojtěch.
Filosofie čísla: základy logiky a aritmetiky v zrcadle analytické filosofie. Filosofia, 2008.
-  Kuczma, Marek, a Attila Gilányi.
An introduction to the theory of functional equations and inequalities: Cauchy's equation and Jensen's inequality. Springer, 2008.
-  Wise, Gary L., a Eric B. Hall.
Counterexamples in probability and real analysis. Oxford: Oxford University Press, 1993.