

Dirichletovy šuplíčky

Luboš Pick (KMA MFF UK Praha)

OSMA, VŠB Ostrava, 12.11.2013

Úloha o ponožkách:

Úloha o ponožkách:

Máme 10 bílých, 10 červených a 10 zelených ponožek, kromě barvy zcela identických. Kolik jich nejméně musíme vytáhnout z šuplíku, abychom si byli jisti, že dostaneme alespoň jeden homogenní pár?

Úloha o ponožkách:

Máme 10 bílých, 10 červených a 10 zelených ponožek, kromě barvy zcela identických. Kolik jich nejméně musíme vytáhnout z šuplíku, abychom si byli jisti, že dostaneme alespoň jeden homogenní pár?

Úloha o vlasech:

Úloha o ponožkách:

Máme 10 bílých, 10 červených a 10 zelených ponožek, kromě barvy zcela identických. Kolik jich nejméně musíme vytáhnout z šuplíku, abychom si byli jisti, že dostaneme alespoň jeden homogenní pár?

Úloha o vlasech:

V České Republice žije několik osob, které mají stejný nenulový počet vlasů na hlavě.

Úloha o ponožkách:

Máme 10 bílých, 10 červených a 10 zelených ponožek, kromě barvy zcela identických. Kolik jich nejméně musíme vytáhnout z šuplíku, abychom si byli jisti, že dostaneme alespoň jeden homogenní pár?

Úloha o vlasech:

V České Republice žije několik osob, které mají stejný nenulový počet vlasů na hlavě.

OTÁZKA: Je to pravda?

Úloha o ponožkách:

Máme 10 bílých, 10 červených a 10 zelených ponožek, kromě barvy zcela identických. Kolik jich nejméně musíme vytáhnout z šuplíku, abychom si byli jisti, že dostaneme alespoň jeden homogenní pár?

Úloha o vlasech:

V České Republice žije několik osob, které mají stejný nenulový počet vlasů na hlavě.

OTÁZKA: Je to pravda? A jak byste toto tvrzení dokazovali nebo vyvraceli?

Úloha o ponožkách:

Máme 10 bílých, 10 červených a 10 zelených ponožek, kromě barvy zcela identických. Kolik jich nejméně musíme vytáhnout z šuplíku, abychom si byli jisti, že dostaneme alespoň jeden homogenní pár?

Úloha o vlasech:

V České Republice žije několik osob, které mají stejný nenulový počet vlasů na hlavě.

OTÁZKA: Je to pravda? A jak byste toto tvrzení dokazovali nebo vyvraceli? A hlavně: co mají tyto úlohy společného?

Úloha o zlomku:

Úloha o zlomku:

Vyjádříme-li zlomek a/b , kde a a b jsou přirozená čísla, v desetinné formě, pak bude vždy desetinný rozvoj výsledného čísla buďto ukončený nebo periodický s periodou kratší než $|b|$.

Úloha o zlomku:

Vyjádříme-li zlomek a/b , kde a a b jsou přirozená čísla, v desetinné formě, pak bude vždy desetinný rozvoj výsledného čísla buďto ukončený nebo periodický s periodou kratší než $|b|$.

Úloha o mřížce:

Úloha o zlomku:

Vyjádříme-li zlomek a/b , kde a a b jsou přirozená čísla, v desetinné formě, pak bude vždy desetinný rozvoj výsledného čísla buďto ukončený nebo periodický s periodou kratší než $|b|$.

Úloha o mřížce:

Máme pět bodů na mřížce, které spojíme úsečkami. Pak alespoň na jedné z nich leží některý další bod z mřížky.

Úloha o zlomku:

Vyjádříme-li zlomek a/b , kde a a b jsou přirozená čísla, v desetinné formě, pak bude vždy desetinný rozvoj výsledného čísla buďto ukončený nebo periodický s periodou kratší než $|b|$.

Úloha o mřížce:

Máme pět bodů na mřížce, které spojíme úsečkami. Pak alespoň na jedné z nich leží některý další bod z mřížky.

OTÁZKA: Co myslíte, je to pravda?

Úloha s trojúhelníkem:

Úloha s trojúhelníkem:

Umístíme libovolně pět bodů do rovnostranného trojúhelníka o straně 1.

Úloha s trojúhelníkem:

*Umístíme libovolně **pět** bodů do **rovnostranného trojúhelníka** o straně 1. Pak se mezi nimi najdou alespoň dva, jejichž vzdálenost nepřesáhne $\frac{1}{2}$.*

Úloha s trojúhelníkem:

Umístíme libovolně pět bodů do rovnostranného trojúhelníka o straně 1. Pak se mezi nimi najdou alespoň dva, jejichž vzdálenost nepřesáhne $\frac{1}{2}$.

A úloha se čtvercem (snad jednodušší):

Úloha s trojúhelníkem:

Umístíme libovolně pět bodů do rovnostranného trojúhelníka o straně 1. Pak se mezi nimi najdou alespoň dva, jejichž vzdálenost nepřesáhne $\frac{1}{2}$.

A úloha se čtvercem (snad jednodušší):

Umístíme libovolně pět bodů do čtverce o straně 1. Pak se mezi nimi najdou alespoň dva, jejichž vzdálenost nepřesáhne $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Co mají úlohy společného?

Co mají úlohy společného?

Společným jmenovatelem všech těchto úloh je princip, známý pod různými názvy:

Co mají úlohy společného?

Společným jmenovatelem všech těchto úloh je princip, známý pod různými názvy:

- **Dirichletův princip**

Co mají úlohy společného?

Společným jmenovatelem všech těchto úloh je princip, známý pod různými názvy:

- Dirichletův princip
- zásuvkový princip

Co mají úlohy společného?

Společným jmenovatelem všech těchto úloh je princip, známý pod různými názvy:

- Dirichletův princip
- zásuvkový princip
- přihrádkový princip

Co mají úlohy společného?

Společným jmenovatelem všech těchto úloh je princip, známý pod různými názvy:

- Dirichletův princip
- zásuvkový princip
- přihrádkový princip
- princip holubníku

Co mají úlohy společného?

Společným jmenovatelem všech těchto úloh je princip, známý pod různými názvy:

- Dirichletův princip
- zásuvkový princip
- přihrádkový princip
- princip holubníku
- Dirichletovy šuplíčky



Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

A jak to přesně zní?

A jak to přesně zní?

Dirichletův princip:

A jak to přesně zní?

Dirichletův princip: Umístíme-li $n + 1$ králíků do n kotců, pak alespoň jeden kotec musí obsahovat alespoň dva králíky.

A jak to přesně zní?

Dirichletův princip: Umístíme-li $n + 1$ králíků do n kotců, pak alespoň jeden kotec musí obsahovat alespoň dva králíky. (Zde jest n přirozené číslo, tedy alespoň 1.)

Motivační citát

Kanadský matematik **Ross Honsberger (*1929)** pravil:

Kanadský matematik **Ross Honsberger (*1929)** pravil: *Je možné, že by něco tak jednoduchého mohlo být k něčemu dobré?*

Kanadský matematik **Ross Honsberger (*1929)** pravil: *Je možné, že by něco tak jednoduchého mohlo být k něčemu dobré?*

No, co myslíte?

První aplikace - mnohostěn

Tak za prvé, co je to *mnohostěn*?

Tak za prvé, co je to *mnohostěn*?

Řečeno slovy básníka, *mnohostěn je když ...*

Tak za prvé, co je to *mnohostěn*?

Řečeno slovy básníka, *mnohostěn je když ...*

Mnohostěn je když to má mnoho stěn, a pak ještě také nějaké hrany a vrcholy.

Tak za prvé, co je to *mnohostěn*?

Řečeno slovy básníka, *mnohostěn je když ...*

Mnohostěn je když to má mnoho stěn, a pak ještě také nějaké hrany a vrcholy.

Tvrzení. *Na každém mnohostěnu se najdou alespoň dvě stěny, které mají stejný počet hran.*

1) Je to pravda?

1) Je to pravda?

ANO.

1) Je to pravda?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

1) Je to pravda?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO.

1) Je to pravda?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO.

3) Jak správně zvolit šuplíčky?

1) Je to pravda?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO.

3) Jak správně zvolit šuplíčky?

To je právě ta nejtěžší a nejzajímavější otázka!

Pokus o řešení první aplikace

Nechť n je *největší počet hran* příslušejících k některé ze stěn našeho mnohostěnu.

Nechť n je *největší počet hran* příslušejících k některé ze stěn našeho mnohostěnu.

Vytvoříme n *Dirichletových šuplíků*.

Nechť n je *největší počet hran* příslušejících k některé ze stěn našeho mnohostěnu.

Vytvoříme n *Dirichletových šuplíků*.

Do šuplíčku s číslem k dáme všechny stěny, kterým přísluší právě k hran.

Nechť n je *největší počet hran* příslušejících k některé ze stěn našeho mnohostěnu.

Vytvoříme n *Dirichletových šuplíků*.

Do šuplíčku s číslem k dáme všechny stěny, kterým přísluší právě k hran.

Stěna, ke které přísluší n hran, má n *různých sousedních stěn*.

Pokus o řešení první aplikace

Nechť n je *největší počet hran* příslušejících k některé ze stěn našeho mnohostěnu.

Vytvoříme *n Dirichletových šuplíků*.

Do šuplíčku s číslem k dáme všechny stěny, kterým přísluší právě k hran.

Stěna, ke které přísluší n hran, má *n různých sousedních stěn*.

Náš mnohostěn má tedy *alespoň $n + 1$ stěn*.

Pokus o řešení první aplikace

Nechť n je *největší počet hran* příslušejících k některé ze stěn našeho mnohostěnu.

Vytvoříme *n Dirichletových šuplíků*.

Do šuplíčku s číslem k dáme všechny stěny, kterým přísluší právě k hran.

Stěna, ke které přísluší n hran, má *n různých sousedních stěn*.

Náš mnohostěn má tedy *alespoň $n + 1$ stěn*.

Dirichlet: *alespoň v jednom šuplíčku jsou alespoň dvě stěny*.

Pokus o řešení první aplikace

Nechť n je *největší počet hran* příslušejících k některé ze stěn našeho mnohostěnu.

Vytvoříme *n Dirichletových šuplíků*.

Do šuplíčku s číslem k dáme všechny stěny, kterým přísluší právě k hran.

Stěna, ke které přísluší n hran, má *n různých sousedních stěn*.

Náš mnohostěn má tedy *alespoň $n + 1$ stěn*.

Dirichlet: *alespoň v jednom šuplíčku jsou alespoň dvě stěny*.

Q.E.D.

Druhá aplikace - deset malých čísloušků

Druhá aplikace - deset malých čísloušků

Následující úlohou můžete pobavit společnost na mejdanu.

Druhá aplikace - deset malých čísloušků

Následující úlohou můžete pobavit společnost na mejdanu.

Číslouškem nazýváme libovolné přirozené číslo menší než 100.

Druhá aplikace - deset malých čísloušků

Následující úlohou můžete pobavit společnost na mejdanu.

Číslouškem nazýváme libovolné přirozené číslo menší než 100.

Výběrem nazýváme každou množinu S deseti čísloušků.

Druhá aplikace - deset malých čísloušků

Následující úlohou můžete pobavit společnost na mejdanu.

Číslouškem nazýváme libovolné přirozené číslo menší než 100.

Výběrem nazýváme každou množinu S deseti čísloušků.

Příklad: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Druhá aplikace - deset malých čísloušků

Následující úlohou můžete pobavit společnost na mejdanu.

Číslouškem nazýváme libovolné přirozené číslo menší než 100.

Výběrem nazýváme každou množinu S deseti čísloušků.

Příklad: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Podvýběrem nazveme jakoukoli jeho neprázdnou podmnožinu.

Druhá aplikace - deset malých čísloušků

Následující úlohou můžete pobavit společnost na mejdanu.

Číslouškem nazýváme libovolné přirozené číslo menší než 100.

Výběrem nazýváme každou množinu S deseti čísloušků.

Příklad: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Podvýběrem nazveme jakoukoli jeho neprázdnou podmnožinu.

Dva podvýběry nazýváme **disjunktní**, jestliže nemají společný průnik.

Druhá aplikace - deset malých čísloušků

Následující úlohou můžete pobavit společnost na mejdanu.

Číslouškem nazýváme libovolné přirozené číslo menší než 100.

Výběrem nazýváme každou množinu S deseti čísloušků.

Příklad: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Podvýběrem nazveme jakoukoli jeho neprázdnou podmnožinu.

Dva podvýběry nazýváme **disjunktní**, jestliže nemají společný prvek.

Příklad: $\{3, 26, 35, 76\}$, $\{9, 14, 59\}$.

Pozorování a tvrzení - součty podvýběrů

Připomeňme si: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Připomeňme si: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Potom podvýběry $\{14, 63\}$ a $\{35, 42\}$ mají společný součet 77.

Připomeňme si: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Potom podvýběry $\{14, 63\}$ a $\{35, 42\}$ mají společný součet 77.

A podobně podvýběry $\{3, 9, 14\}$ a $\{26\}$ mají společný součet 26.

Připomeňme si: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Potom podvýběry $\{14, 63\}$ a $\{35, 42\}$ mají společný součet 77.

A podobně podvýběry $\{3, 9, 14\}$ a $\{26\}$ mají společný součet 26.

Tvrzení.

Připomeňme si: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Potom podvýběry $\{14, 63\}$ a $\{35, 42\}$ mají společný součet 77.

A podobně podvýběry $\{3, 9, 14\}$ a $\{26\}$ mají společný součet 26.

Tvrzení.

- *Každý výběr S obsahuje alespoň dva disjunktní podvýběry se stejným součtem.*

Připomeňme si: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Potom podvýběry $\{14, 63\}$ a $\{35, 42\}$ mají společný součet 77.

A podobně podvýběry $\{3, 9, 14\}$ a $\{26\}$ mají společný součet 26.

Tvrzení.

- Každý výběr S obsahuje alespoň dva disjunktní podvýběry se stejným součtem.
- Každý výběr S obsahuje alespoň **dvě** dvojice disjunktních podvýběrů se stejným součtem.

Připomeňme si: $S = \{3, 9, 14, 21, 26, 35, 42, 59, 63, 76\}$.

Potom podvýběry $\{14, 63\}$ a $\{35, 42\}$ mají společný součet 77.

A podobně podvýběry $\{3, 9, 14\}$ a $\{26\}$ mají společný součet 26.

Tvrzení.

- Každý výběr S obsahuje alespoň dva disjunktní podvýběry se stejným součtem.
- Každý výběr S obsahuje alespoň **dvě** dvojice disjunktních podvýběrů se stejným součtem.
- Každý výběr S obsahuje **strašnou spoustu** dvojic disjunktních podvýběrů se stejným součtem.

Otázky a odpovědi

1) Co z toho je pravda?

1) Co z toho je pravda?

VŠECHNO.

1) Co z toho je pravda?

VŠECHNO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

1) Co z toho je pravda?

VŠECHNO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO.

1) Co z toho je pravda?

VŠECHNO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO.

3) Jak správně zvolit šuplíčky?

Pokus o řešení druhé aplikace

Součet čísel v libovolném podvýběru nemůže nikdy přesáhnout součet v *maximálním* výběru

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Součet čísel v libovolném podvýběru nemůže nikdy přesáhnout součet v *maximálním* výběru

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí

Součet čísel v libovolném podvýběru nemůže nikdy přesáhnout součet v *maximálním* výběru

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí 945.

Součet čísel v libovolném podvýběru nemůže nikdy přesáhnout součet v *maximálním* výběru

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí 945.

Vytvoříme tedy 945 *Dirichletových šuplíků*.

Pokus o řešení druhé aplikace

Součet čísel v libovolném podvýběru nemůže nikdy přesáhnout součet v *maximálním* výběru

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí 945.

Vytvoříme tedy 945 *Dirichletových šuplíků*.

Do šuplíčku s číslem n dáme všechny podvýběry se součtem n .

Pokus o řešení druhé aplikace

Součet čísel v libovolném podvýběru nemůže nikdy přesáhnout součet v *maximálním* výběru

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí 945.

Vytvoříme tedy 945 *Dirichletových šuplíčků*.

Do šuplíčku s číslem n dáme všechny podvýběry se součtem n .

Kolik je podvýběrů?

Pokus o řešení druhé aplikace

Součet čísel v libovolném podvýběru nemůže nikdy přesáhnout součet v *maximálním* výběru

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí 945.

Vytvoříme tedy 945 *Dirichletových šuplíků*.

Do šuplíčku s číslem n dáme všechny podvýběry se součtem n .

Kolik je podvýběrů? Přesně $2^{10} - 1$,

Pokus o řešení druhé aplikace

Součet čísel v libovolném podvýběru nemůže nikdy přesáhnout součet v *maximálním* výběru

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí 945.

Vytvoříme tedy 945 *Dirichletových šuplíků*.

Do šuplíčku s číslem n dáme všechny podvýběry se součtem n .

Kolik je podvýběrů? Přesně $2^{10} - 1$, tedy 1023.

Součet čísel v libovolném podvýběru nemůže nikdy přesáhnout součet v *maximálním* výběru

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí 945.

Vytvoříme tedy 945 *Dirichletových šuplíčků*.

Do šuplíčku s číslem n dáme všechny podvýběry se součtem n .

Kolik je podvýběrů? Přesně $2^{10} - 1$, tedy 1023.

Dirichlet: *alespoň v jednom šuplíčku jsou alespoň dva podvýběry.*

Pokus o řešení druhé aplikace

Součet čísel v libovolném podvýběru nemůže nikdy přesáhnout součet v *maximálním* výběru

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí 945.

Vytvoříme tedy 945 *Dirichletových šuplíčků*.

Do šuplíčku s číslem n dáme všechny podvýběry se součtem n .

Kolik je podvýběrů? Přesně $2^{10} - 1$, tedy 1023.

Dirichlet: *alespoň v jednom šuplíčku jsou alespoň dva podvýběry*.
A protože 1023 je o hodně víc než 945, musí jich být ve skutečnosti **strašná spousta**.

Pokus o řešení druhé aplikace

Součet čísel v libovolném podvýběru nemůže nikdy přesáhnout součet v *maximálním* výběru

$$S_{\max} = \{90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}.$$

Tento součet činí 945.

Vytvoříme tedy 945 *Dirichletových šuplíčků*.

Do šuplíčku s číslem n dáme všechny podvýběry se součtem n .

Kolik je podvýběrů? Přesně $2^{10} - 1$, tedy 1023.

Dirichlet: *alespoň v jednom šuplíčku jsou alespoň dva podvýběry*.
A protože 1023 je o hodně víc než 945, musí jich být ve skutečnosti **strašná spousta**.

Q.E.D.

Třetí aplikace - farmacie

Pan Ondra Hypoch tak dlouho obtěžoval lékaře, až mu lékař napsal prášky.

Pan Ondra Hypoch tak dlouho obtěžoval lékaře, až mu lékař napsal prášky.

V balení je **48** prášků, které má Ondra spotřebovat během **30** dnů.

Pan Ondra Hypoch tak dlouho obtěžoval lékaře, až mu lékař napsal prášky.

V balení je **48** prášků, které má Ondra spotřebovat během **30** dnů.

Může si je rozvrhnout jak chce, ale musí dodržet jedno pravidlo:
každý den musí spolknout alespoň jeden prášek.

V příbalovém letáku si pak doma Ondra přečetl toto:

V příbalovém letáku si pak doma Ondra přečetl toto:

Pokud během nějaké posloupnosti po sobě jdoucích dnů spotřebuje pacient **18** prášků, vypadají mu zuby.

V příbalovém letáku si pak doma Ondra přečetl toto:

Pokud během nějaké posloupnosti po sobě jdoucích dnů spotřebuje pacient **18** prášků, vypadají mu zuby.

A pokud během nějaké posloupnosti po sobě jdoucích dnů spotřebuje pacient **11** prášků, upadnou mu palce u rukou.

V příbalovém letáku si pak doma Ondra přečetl toto:

Pokud během nějaké posloupnosti po sobě jdoucích dnů spotřebuje pacient **18** prášků, vypadají mu zuby.

A pokud během nějaké posloupnosti po sobě jdoucích dnů spotřebuje pacient **11** prášků, upadnou mu palce u rukou.

Otázka: Bude se Ondra na konci terapie schopen kousnout do palce?

V příbalovém letáku si pak doma Ondra přečetl toto:

Pokud během nějaké posloupnosti po sobě jdoucích dnů spotřebuje pacient **18** prášků, vypadají mu zuby.

A pokud během nějaké posloupnosti po sobě jdoucích dnů spotřebuje pacient **11** prášků, upadnou mu palce u rukou.

Otázka: Bude se Ondra na konci terapie schopen kousnout do palce?

Odpověď: Možná, že ano, ale pouze do palce u nohy.

Tvrzení.

Tvrzení.

- (a) Z pravidel Ondrovy terapie vyplývá, že existuje posloupnost po sobě jdoucích dní, během nichž spotřebuje právě 18 prášků.

Tvrzení.

- (a) Z pravidel Ondrovy terapie vyplývá, že existuje posloupnost po sobě jdoucích dní, během nichž spotřebuje právě 18 prášků.
- (b) Z pravidel Ondrovy terapie vyplývá, že existuje posloupnost po sobě jdoucích dní, během nichž spotřebuje právě 11 prášků.

Otázky a odpovědi

1) Je tvrzení (a) pravdivé?

1) Je tvrzení (a) pravdivé?

NE.

1) Je tvrzení (a) pravdivé?

NE.

2) Plyne toto tvrzení z Dirichletova principu?

1) Je tvrzení (a) pravdivé?

NE.

2) Plyne toto tvrzení z Dirichletova principu?

Těžko, vzhledem k tomu, že to není pravda.

1) Je tvrzení (a) pravdivé?

NE.

2) Plyne toto tvrzení z Dirichletova principu?

Těžko, vzhledem k tomu, že to není pravda.

3) Jak jej tedy vyvrátíme??

1) Je tvrzení (a) pravdivé?

NE.

2) Plyne toto tvrzení z Dirichletova principu?

Těžko, vzhledem k tomu, že to není pravda.

3) Jak jej tedy vyvrátíme??

Protipříkladem!

Protipříklad na tvrzení (a)

Protipříklad na tvrzení (a)

$$\underbrace{11\dots 1}_{15} \ 19 \ \underbrace{11\dots 1}_{14}$$

Protipříklad na tvrzení (a)

$$\underbrace{11\dots 1}_{15} \ 19 \ \underbrace{11\dots 1}_{14}$$

Dobrá zpráva: zuby jsou zachráněny.

Protipříklad na tvrzení (a)

$$\underbrace{11 \dots 1}_{15} \ 19 \ \underbrace{11 \dots 1}_{14}$$

Dobrá zpráva: zuby jsou zachráněny.

A co palce?

Otázky a odpovědi

1) Je tvrzení (b) pravdivé?

1) Je tvrzení (b) pravdivé?

ANO.

1) Je tvrzení (b) pravdivé?

ANO.

2) Plyne toto tvrzení z Dirichletova principu?

1) Je tvrzení (b) pravdivé?

ANO.

2) Plyne toto tvrzení z Dirichletova principu?

ANO.

1) Je tvrzení (b) pravdivé?

ANO.

2) Plyne toto tvrzení z Dirichletova principu?

ANO.

3) Jak správně zvolit šuplíčky?

Pokus o řešení třetí aplikace

Pokus o řešení třetí aplikace

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i -tého dne*.

Pokus o řešení třetí aplikace

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i -tého dne*. Potom platí

Pokus o řešení třetí aplikace

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i -tého dne*. Potom platí

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} = 48.$$

Pokus o řešení třetí aplikace

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i -tého dne*. Potom platí

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} = 48.$$

Po přičtení čísla 11 dostaneme

Pokus o řešení třetí aplikace

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i -tého dne*. Potom platí

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} = 48.$$

Po přičtení čísla 11 dostaneme

$$11 < p_1 + 11 < p_2 + 11 < \cdots < p_{30} + 11 = 59.$$

Pokus o řešení třetí aplikace

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i -tého dne*. Potom platí

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} = 48.$$

Po přičtení čísla 11 dostaneme

$$11 < p_1 + 11 < p_2 + 11 < \cdots < p_{30} + 11 = 59.$$

V první posloupnosti je 30 čísel a ve druhé posloupnosti je také 30 čísel, celkem tedy 60.

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i -tého dne*. Potom platí

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} = 48.$$

Po přičtení čísla 11 dostaneme

$$11 < p_1 + 11 < p_2 + 11 < \cdots < p_{30} + 11 = 59.$$

V první posloupnosti je 30 čísel a ve druhé posloupnosti je také 30 čísel, celkem tedy 60.

Obě posloupnosti jsou *rostoucí*, a tedy se v žádné z nich čísla neopakují.

Pokus o řešení třetí aplikace

Označme p_i celkový počet pilulek *spotřebovaný na konci i -tého dne*. Potom platí

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{30} = 48.$$

Po přičtení čísla 11 dostaneme

$$11 < p_1 + 11 < p_2 + 11 < \cdots < p_{30} + 11 = 59.$$

V první posloupnosti je 30 čísel a ve druhé posloupnosti je také 30 čísel, celkem tedy 60.

Obě posloupnosti jsou *rostoucí*, a tedy se v žádné z nich čísla neopakují.

Číslo 60 je vyšší než číslo 59.

Pokus o řešení třetí aplikace - pokračování

Dirichlet: *Musí existovat alespoň jedno číslo, které se vyskytuje v obou posloupnostech.*

Dirichlet: *Musí existovat alespoň jedno číslo, které se vyskytuje v obou posloupnostech.*

Jinými slovy: existují i a j takové, že $p_j = p_i + 11$.

Dirichlet: *Musí existovat alespoň jedno číslo, které se vyskytuje v obou posloupnostech.*

Jinými slovy: existují i a j takové, že $p_j = p_i + 11$.

Samozřejmě, že $i < j$.

Dirichlet: *Musí existovat alespoň jedno číslo, které se vyskytuje v obou posloupnostech.*

Jinými slovy: existují i a j takové, že $p_j = p_i + 11$.

Samozřejmě, že $i < j$.

Tedy

Dirichlet: *Musí existovat alespoň jedno číslo, které se vyskytuje v obou posloupnostech.*

Jinými slovy: existují i a j takové, že $p_j = p_i + 11$.

Samozřejmě, že $i < j$.

Tedy

$$p_j - p_i = 11.$$

Dirichlet: *Musí existovat alespoň jedno číslo, které se vyskytuje v obou posloupnostech.*

Jinými slovy: existují i a j takové, že $p_j = p_i + 11$.

Samozřejmě, že $i < j$.

Tedy

$$p_j - p_i = 11.$$

Tudíž ve dnech $i + 1, i + 2, \dots, j$ spotřebuje pan Ondra přesně 11 pilulek.

Dirichlet: *Musí existovat alespoň jedno číslo, které se vyskytuje v obou posloupnostech.*

Jinými slovy: existují i a j takové, že $p_j = p_i + 11$.

Samozřejmě, že $i < j$.

Tedy

$$p_j - p_i = 11.$$

Tudíž ve dnech $i + 1, i + 2, \dots, j$ spotřebuje pan Ondra přesně 11 pilulek.

A palce jsou v háji.

Dirichlet: *Musí existovat alespoň jedno číslo, které se vyskytuje v obou posloupnostech.*

Jinými slovy: existují i a j takové, že $p_j = p_i + 11$.

Samozřejmě, že $i < j$.

Tedy

$$p_j - p_i = 11.$$

Tudíž ve dnech $i + 1, i + 2, \dots, j$ spotřebuje pan Ondra přesně 11 pilulek.

A palce jsou v háji.

Q.E.D.

Dokažte, že ve skutečnosti platí následující mnohem obecnější tvrzení.

Dokažte, že ve skutečnosti platí následující mnohem obecnější tvrzení.

Věta.

Dokažte, že ve skutečnosti platí následující mnohem obecnější tvrzení.

Věta.

- Pro každé $k \in \{1, \dots, 30, 48\}$ kromě 16, 17 a 18 vyplývá z pravidel Ondrovy terapie, že existuje posloupnost po sobě jdoucích dní, během nichž spotřebuje právě k prášků.

Dokažte, že ve skutečnosti platí následující mnohem obecnější tvrzení.

Věta.

- Pro každé $k \in \{1, \dots, 30, 48\}$ kromě 16, 17 a 18 vyplývá z pravidel Ondrovy terapie, že existuje posloupnost po sobě jdoucích dní, během nichž spotřebuje právě k prášků.
- Pro $k \in \{16, 17, 18, 31, 31, \dots, 47\}$ toto tvrzení neplatí.

Návod a poznámky ke cvičení pro koumáky

Návod a poznámky ke cvičení pro koumáky

Dirichletův princip, který jsme použili k důkazu tvrzení pro $k = 11$, funguje beze změny pro každé $k = 1, 2, \dots, 11$ (ověřte!).

Návod a poznámky ke cvičení pro koumáky

Dirichletův princip, který jsme použili k důkazu tvrzení pro $k = 11$, funguje beze změny pro každé $k = 1, 2, \dots, 11$ (ověřte!).

Protipříklad, který jsme použili k vyvrácení tvrzení pro $k = 18$, funguje s triviálními změnami také pro $k = 16$ a $k = 17$ (ověřte!).

Návod a poznámky ke cvičení pro koutáky

Dirichletův princip, který jsme použili k důkazu tvrzení pro $k = 11$, funguje beze změny pro každé $k = 1, 2, \dots, 11$ (ověřte!).

Protipříklad, který jsme použili k vyvrácení tvrzení pro $k = 18$, funguje s triviálními změnami také pro $k = 16$ a $k = 17$ (ověřte!).

K vyvrácení tvrzení pro $k = 31, 32, \dots, 47$ je potřeba zkonstruovat jiný typ protipříkladu.

Návod a poznámky ke cvičení pro koumáky

Dirichletův princip, který jsme použili k důkazu tvrzení pro $k = 11$, funguje beze změny pro každé $k = 1, 2, \dots, 11$ (ověřte!).

Protipříklad, který jsme použili k vyvrácení tvrzení pro $k = 18$, funguje s triviálními změnami také pro $k = 16$ a $k = 17$ (ověřte!).

K vyvrácení tvrzení pro $k = 31, 32, \dots, 47$ je potřeba zkonstruovat jiný typ protipříkladu. Například pro $k = 37$ stačí:

$$\underbrace{12\ 11\ \dots\ 1}_{18}\ 8\ \underbrace{11\ \dots\ 1}_{10}$$

Návod a poznámky ke cvičení pro koumáky

Dirichletův princip, který jsme použili k důkazu tvrzení pro $k = 11$, funguje beze změny pro každé $k = 1, 2, \dots, 11$ (ověřte!).

Protipříklad, který jsme použili k vyvrácení tvrzení pro $k = 18$, funguje s triviálními změnami také pro $k = 16$ a $k = 17$ (ověřte!).

K vyvrácení tvrzení pro $k = 31, 32, \dots, 47$ je potřeba zkonstruovat jiný typ protipříkladu. Například pro $k = 37$ stačí:

$$\begin{array}{ccc} 12 & 11 \dots 1 & 8 & 11 \dots 1 \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ & 18 & & 10 \end{array}$$

Naleznete obecný vzorec?

Čtvrtá aplikace - Matlafousek a Ňufafula

Žák **Matlafousek** má rád čísla.

Žák **Matlafousek** má rád čísla. Bohužel byl ale ve škole jen jeden den.

Žák **Matlafousek** má rád čísla. Bohužel byl ale ve škole jen jeden den. Stihl se naučit se pouze číslici 1.

Žák **Matlafousek** má rád čísla. Bohužel byl ale ve škole jen jeden den. Stihl se naučit se pouze číslici 1.

Matlafouskovým číslem nazýváme každé číslo, zapsané pomocí jedniček, tedy

Žák **Matlafousek** má rád čísla. Bohužel byl ale ve škole jen jeden den. Stihl se naučit se pouze číslici 1.

Matlafouskovým číslem nazýváme každé číslo, zapsané pomocí jedniček, tedy

1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, atd.

Žák **Ňufafula** má také moc rád čísla.

Žák **Ňufafula** má také moc rád čísla. Ve škole byl dva dny.

Žák **Ňufafula** má také moc rád čísla. Ve škole byl dva dny. Stihl se naučit se pouze číslice 1 a 0.

Žák **Ňufafula** má také moc rád čísla. Ve škole byl dva dny. Stihl se naučit se pouze číslice 1 a 0.

Ňufafulovým číslem nazýváme každé číslo, zapsané pomocí neprázdné posloupnosti jedniček následované neprázdnou posloupností nul, tedy

Žák **Ňufafula** má také moc rád čísla. Ve škole byl dva dny. Stihl se naučit se pouze číslice 1 a 0.

Ňufafulovým číslem nazýváme každé číslo, zapsané pomocí neprázdné posloupnosti jedniček následované neprázdnou posloupností nul, tedy

10, 110000, 1110, 111100, 111110000000, atd.

Žák **Ňufacula** má také moc rád čísla. Ve škole byl dva dny. Stihl se naučit se pouze číslice 1 a 0.

Ňufatulovým číslem nazýváme každé číslo, zapsané pomocí neprázdné posloupnosti jedniček následované neprázdnou posloupností nul, tedy

10, 110000, 1110, 111100, 111110000000, atd.

Množinu Ňufatulových čísel označíme symbolem $\mathbb{N}$.

Žák **Buližník** má rád matematiku a lumpárny.

Žák **Buližník** má rád matematiku a lumpárny. Jednoho dne řekl
Nufafulovi:

Žák **Buližník** má rád matematiku a lumpárny. Jednoho dne řekl Ľufafulovi:

Nic si z toho nedělej, že umíš jenom dvě číslice, a to ještě jenom v tomhle pořadí. Stejně pro každé přirozené číslo je nějaký jeho násobek Ľufafulovým číslem.

Žák **Buližník** má rád matematiku a lumpárny. Jednoho dne řekl Ľufafulovi:

Nic si z toho nedělej, že umíš jenom dvě číslice, a to ještě jenom v tomhle pořadí. Stejně pro každé přirozené číslo je nějaký jeho násobek Ľufafulovým číslem.

OTÁZKA: Má Buližník pravdu?

Tvrzení. Ke každému přirozenému číslu k existuje přirozené číslo m takové, že $km \in \mathbb{N}$.

Tvrzení. Ke každému přirozenému číslu k existuje přirozené číslo m takové, že $km \in \mathbb{N}$.

Místo důkazu zkusme postupné prověřování.

Tvrzení. Ke každému přirozenému číslu k existuje přirozené číslo m takové, že $km \in \mathbb{N}$.

Místo důkazu zkusme postupné prověřování.

$k = 2 :$	$m = 5,$	$km = 10 \in \mathbb{N};$
$k = 3 :$	$m = 370,$	$km = 1110 \in \mathbb{N};$
$k = 4 :$	$m = 25,$	$km = 100 \in \mathbb{N};$
$k = 5 :$	$m = 2,$	$km = 10 \in \mathbb{N};$
$k = 6 :$	$m = 185,$	$km = 1110 \in \mathbb{N};$
$k = 8 :$	$m = 125,$	$km = 1000 \in \mathbb{N}.$

Tvrzení. Ke každému přirozenému číslu k existuje přirozené číslo m takové, že $km \in \mathbb{N}$.

Místo důkazu zkusme postupné prověřování.

$k = 2 :$	$m = 5,$	$km = 10 \in \mathbb{N};$
$k = 3 :$	$m = 370,$	$km = 1110 \in \mathbb{N};$
$k = 4 :$	$m = 25,$	$km = 100 \in \mathbb{N};$
$k = 5 :$	$m = 2,$	$km = 10 \in \mathbb{N};$
$k = 6 :$	$m = 185,$	$km = 1110 \in \mathbb{N};$
$k = 8 :$	$m = 125,$	$km = 1000 \in \mathbb{N}.$

První *zajímavější* číslo je $k = 7$.

1) Má žák Bulžník pravdu?

1) Má žák Bulžník pravdu?

ANO.

1) Má žák Bulžník pravdu?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

1) Má žák Bulžník pravdu?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO, ale budeme navíc potřebovat **modulární aritmetiku**.

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p ,

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p , psáno

$$m \equiv n(\text{mod } p),$$

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p , psáno

$$m \equiv n \pmod{p},$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p .

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p , psáno

$$m \equiv n(\text{mod } p),$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p .

POZOROVÁNÍ: V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit.

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p , psáno

$$m \equiv n(\text{mod } p),$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p .

POZOROVÁNÍ: V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit.
Příklady:

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p , psáno

$$m \equiv n(\text{mod } p),$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p .

POZOROVÁNÍ: V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit.

Příklady: $5 + 3 = 1(\text{mod } 7)$,

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p , psáno

$$m \equiv n(\text{mod } p),$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p .

POZOROVÁNÍ: V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit.
Příklady: $5 + 3 = 1(\text{mod } 7)$, $2 \cdot 7 = 2(\text{mod } 12)$.

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p , psáno

$$m \equiv n(\text{mod } p),$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p .

POZOROVÁNÍ: V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit.
Příklady: $5 + 3 = 1(\text{mod } 7)$, $2 \cdot 7 = 2(\text{mod } 12)$.

POZOROVÁNÍ: Je-li p prvočíslo, můžeme i dělit a hovořit o zlomcích.

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p , psáno

$$m \equiv n \pmod{p},$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p .

POZOROVÁNÍ: V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit.
Příklady: $5 + 3 = 1 \pmod{7}$, $2 \cdot 7 = 2 \pmod{12}$.

POZOROVÁNÍ: Je-li p prvočíslo, můžeme i dělit a hovořit o zlomcích.

$$\frac{2}{3} = 3, \quad \frac{3}{4} = 6, \quad \frac{2}{5} = 6, \quad \frac{3}{5} = 2, \quad \frac{4}{5} = 5, \quad \frac{5}{6} = 2 \pmod{7}.$$

Číslo m je **kongruentní** číslu n modulo číslo p , psáno

$$m \equiv n \pmod{p},$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p .

POZOROVÁNÍ: V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit.
Příklady: $5 + 3 = 1 \pmod{7}$, $2 \cdot 7 = 2 \pmod{12}$.

POZOROVÁNÍ: Je-li p prvočíslo, můžeme i dělit a hovořit o zlomcích.

$$\frac{2}{3} = 3, \quad \frac{3}{4} = 6, \quad \frac{2}{5} = 6, \quad \frac{3}{5} = 2, \quad \frac{4}{5} = 5, \quad \frac{5}{6} = 2 \pmod{7}.$$

Otázka pro koumáky: Co je $\frac{1}{7} \pmod{7}$?

Pokus o řešení čtvrté aplikace

Nechť k je zadané číslo.

Nechť k je zadané číslo.

Vezmeme $k + 1$ libovolných Matlafouskových čísel.

Nechť k je zadané číslo.

Vezmeme $k + 1$ libovolných Matlafouskových čísel.

Dirichlet: alespoň dvě z nich musí kongruentní modulo k .

Nechť k je zadané číslo.

Vezmeme $k + 1$ libovolných Matlafouskových čísel.

Dirichlet: alespoň dvě z nich musí kongruentní modulo k .

Odečteme menší z nich od většího.

Nechť k je zadané číslo.

Vezmeme $k + 1$ libovolných Matlafouskových čísel.

Dirichlet: alespoň dvě z nich musí kongruentní modulo k .

Odečteme menší z nich od většího.

Vznikne číslo, které je zřejmě prvkem $\mathbb{N}$ a navíc je dělitelné číslem k .

Q.E.D.

Ilustrace na příkladu

Ilustrace na příkladu

Nechť $k = 7$.

Ilustrace na příkladu

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

Ilustrace na příkladu

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.

Ilustrace na příkladu

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.

Při dělení sedmičkou dávají po řadě zbytky

Ilustrace na příkladu

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.

Při dělení sedmičkou dávají po řadě zbytky

1, 4, 6, 5, 2, 0, 1, 4.

Ilustrace na příkladu

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.

Při dělení sedmičkou dávají po řadě zbytky

1, 4, 6, 5, 2, 0, 1, 4.

Nejmenší dvojice Matlafouskových čísel kongruentních modulo sedm je tedy 1 a 1111111.

Ilustrace na příkladu

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.

Při dělení sedmičkou dávají po řadě zbytky

1, 4, 6, 5, 2, 0, 1, 4.

Nejmenší dvojice Matlafouskových čísel kongruentních modulo sedm je tedy 1 a 1111111.

Jejich rozdíl splňuje

Ilustrace na příkladu

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.

Při dělení sedmičkou dávají po řadě zbytky

1, 4, 6, 5, 2, 0, 1, 4.

Nejmenší dvojice Matlafouskových čísel kongruentních modulo sedm je tedy 1 a 1111111.

Jejich rozdíl splňuje

$$1111110 = 7 \times 158730.$$

Ilustrace na příkladu

Nechť $k = 7$.

Vezmeme 8 nejmenších Matlafouskových čísel, tedy

1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 1111111, 11111111.

Při dělení sedmičkou dávají po řadě zbytky

1, 4, 6, 5, 2, 0, 1, 4.

Nejmenší dvojice Matlafouskových čísel kongruentních modulo sedm je tedy 1 a 1111111.

Jejich rozdíl splňuje

$$1111110 = 7 \times 158730.$$

Poznámka: Uvedené číslo je skutečně *nejmenší* Nufafulovo číslo, které je dělitelné sedmi.

Pátá aplikace - 101 dyadických zajímavostí

Tvrzení. *Utvořme množinu obsahující 101 přirozených čísel menších než 200. Potom tato množina obsahuje alespoň dvě čísla, z nichž jedno dělí druhé.*

Otázky a odpovědi

1) Je to pravda?

1) Je to pravda?

ANO.

1) Je to pravda?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

1) Je to pravda?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO.

1) Je to pravda?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO.

3) Jak správně zvolit šuplíčky?

Máme-li dáno přirozené číslo n , můžeme jej vyjádřit ve tvaru $n = 2^r q$, kde r je přirozené číslo a q je *liché*.

Máme-li dáno přirozené číslo n , můžeme jej vyjádřit ve tvaru $n = 2^r q$, kde r je přirozené číslo a q je *liché*.

Utvoříme Dirichletovy šuplíčky očíslované lichými čísly menšími než 200, tedy $1, 3, 5, \dots, 195, 197, 199$.

Zlišení a rozlišení

Máme-li dáno přirozené číslo n , můžeme jej vyjádřit ve tvaru $n = 2^r q$, kde r je přirozené číslo a q je *liché*.

Utvoříme Dirichletovy šuplíčky očíslované lichými čísly menšími než 200, tedy $1, 3, 5, \dots, 195, 197, 199$.

Každé číslo n uložíme do šuplíčku s číslem q pokud $n = 2^r q$.

Máme-li dáno přirozené číslo n , můžeme jej vyjádřit ve tvaru $n = 2^r q$, kde r je přirozené číslo a q je *liché*.

Utvoříme Dirichletovy šuplíčky očíslované lichými čísly menšími než 200, tedy $1, 3, 5, \dots, 195, 197, 199$.

Každé číslo n uložíme do šuplíčku s číslem q pokud $n = 2^r q$.

Máme 101 čísel a 100 šuplíčků.

Máme-li dáno přirozené číslo n , můžeme jej vyjádřit ve tvaru $n = 2^r q$, kde r je přirozené číslo a q je *liché*.

Utvoříme Dirichletovy šuplíčky očíslované lichými čísly menšími než 200, tedy $1, 3, 5, \dots, 195, 197, 199$.

Každé číslo n uložíme do šuplíčku s číslem q pokud $n = 2^r q$.

Máme 101 čísel a 100 šuplíčků.

Dirichlet: alespoň pro jedno q existují dvě čísla m, n a dvě čísla r, s taková, že $m = 2^r q$ a $n = 2^s q$.

Zlišení a rozlišení

Máme-li dáno přirozené číslo n , můžeme jej vyjádřit ve tvaru $n = 2^r q$, kde r je přirozené číslo a q je *liché*.

Utvoříme Dirichletovy šuplíčky očíslované lichými čísly menšími než 200, tedy $1, 3, 5, \dots, 195, 197, 199$.

Každé číslo n uložíme do šuplíčku s číslem q pokud $n = 2^r q$.

Máme 101 čísel a 100 šuplíčků.

Dirichlet: alespoň pro jedno q existují dvě čísla m, n a dvě čísla r, s taková, že $m = 2^r q$ a $n = 2^s q$.

BÚNO $r \leq s$.

Zlišení a rozlišení

Máme-li dáno přirozené číslo n , můžeme jej vyjádřit ve tvaru $n = 2^r q$, kde r je přirozené číslo a q je *liché*.

Utvoříme Dirichletovy šuplíčky očíslované lichými čísly menšími než 200, tedy $1, 3, 5, \dots, 195, 197, 199$.

Každé číslo n uložíme do šuplíčku s číslem q pokud $n = 2^r q$.

Máme 101 čísel a 100 šuplíčků.

Dirichlet: alespoň pro jedno q existují dvě čísla m, n a dvě čísla r, s taková, že $m = 2^r q$ a $n = 2^s q$.

BÚNO $r \leq s$. Pak m dělí n .

Zlišení a rozlišení

Máme-li dáno přirozené číslo n , můžeme jej vyjádřit ve tvaru $n = 2^r q$, kde r je přirozené číslo a q je *liché*.

Utvoříme Dirichletovy šuplíčky očíslované lichými čísly menšími než 200, tedy $1, 3, 5, \dots, 195, 197, 199$.

Každé číslo n uložíme do šuplíčku s číslem q pokud $n = 2^r q$.

Máme 101 čísel a 100 šuplíčků.

Dirichlet: alespoň pro jedno q existují dvě čísla m, n a dvě čísla r, s taková, že $m = 2^r q$ a $n = 2^s q$.

BÚNO $r \leq s$. Pak m dělí n .

Q.E.D.

Šestá aplikace - problém přepeřené pizzy

Šestá aplikace - problém přepečené pizzy

Šéfkuchař pravil: dnes se naučíme kořenit pizzu.

Šestá aplikace - problém přepečené pizzy

Šéfkuchař pravil: dnes se naučíme kořenit pizzu.

Běda každému, kdo přepepří pizzu!

Šestá aplikace - problém přepeřené pizzy

Šéfkuchař pravil: dnes se naučíme kořenit pizzu.

Běda každému, kdo přepeří pizzu!

Pizza je kruhového tvaru o poloměru 16.

Šestá aplikace - problém přepeřené pizzy

Šéfkuchař pravil: dnes se naučíme kořenit pizzu.

Běda každému, kdo přepeří pizzu!

Pizza je kruhového tvaru o poloměru 16.

Šéfkuchař má takzvané *testovací mezikruží* o vnitřním poloměru 2 a vnějším poloměru 3.

Šestá aplikace - problém přepeřené pizzy

Šéfkuchař pravil: dnes se naučíme kořenit pizzu.

Běda každému, kdo přepeří pizzu!

Pizza je kruhového tvaru o poloměru 16.

Šéfkuchař má takzvané *testovací mezikruží* o vnitřním poloměru 2 a vnějším poloměru 3. Pizza se nazývá *přepeřená*, jestliže je možno na ni položit testovací mezikruží tak, aby obsahovalo 10 nebo více zrníček pepře.

Šestá aplikace - problém přepepřené pizzy

Šéfkuchař pravil: dnes se naučíme kořenit pizzu.

Běda každému, kdo přepepří pizzu!

Pizza je kruhového tvaru o poloměru 16.

Šéfkuchař má takzvané *testovací mezikruží* o vnitřním poloměru 2 a vnějším poloměru 3. Pizza se nazývá *přepepřená*, jestliže je možno na ni položit testovací mezikruží tak, aby obsahovalo 10 nebo více zrníček pepře.

Nervózní kuchtík upustil pepřenku a vysypal na pizzu celý její obsah, tedy **650** zrníček pepře.

Šestá aplikace - problém přepepřené pizzy

Šéfkuchař pravil: dnes se naučíme kořenit pizzu.

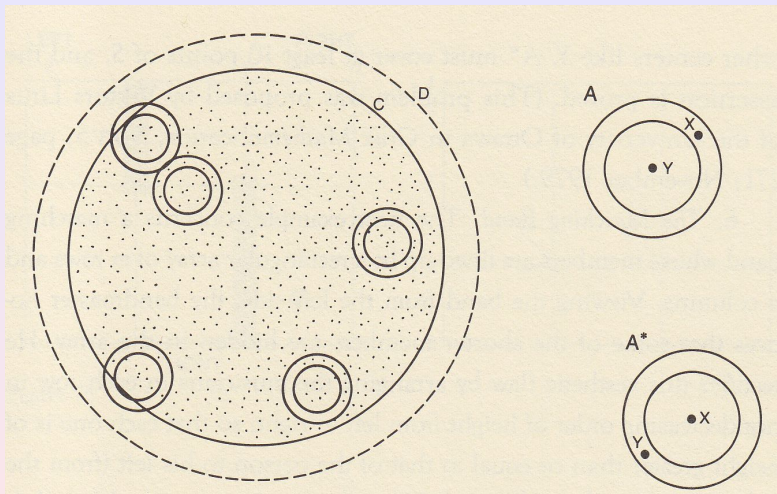
Běda každému, kdo přepepří pizzu!

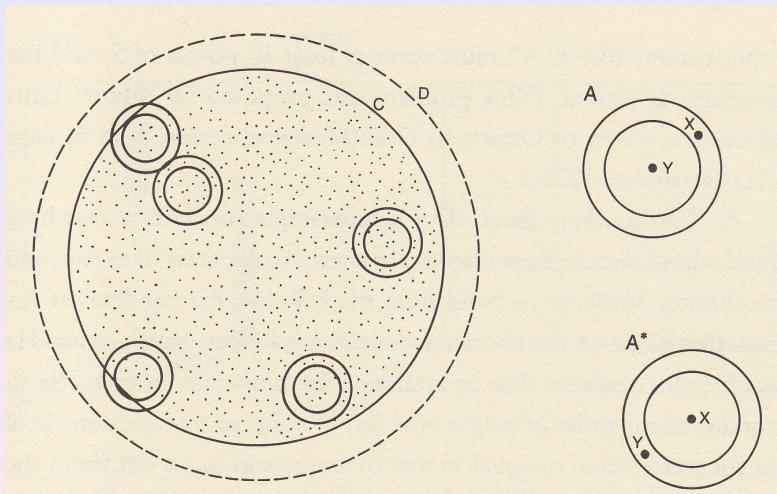
Pizza je kruhového tvaru o poloměru 16.

Šéfkuchař má takzvané *testovací mezikruží* o vnitřním poloměru 2 a vnějším poloměru 3. Pizza se nazývá *přepepřená*, jestliže je možno na ni položit testovací mezikruží tak, aby obsahovalo 10 nebo více zrníček pepře.

Nervózní kuchtík upustil pepřenku a vysypal na pizzu celý její obsah, tedy **650** zrníček pepře.

Otázka: Je pizza přepepřená?





Je pizza přepeřená?

Sedmá aplikace - paradox kapelníka dechovky

Sedmá aplikace - paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na pochod po promenádě.

Sedmá aplikace - paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na pochod po promenádě.

Kapela je seřazena do obdélníkového tvaru o m řadách a n sloupcích.

Sedmá aplikace - paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na pochod po promenádě.

Kapela je seřazena do obdélníkového tvaru o m řadách a n sloupcích.

Na zkoušce si kapelník všimne, že při pohledu zleva (kde je hlavní tribuna) jsou někteří menší hudebníci zakryti svými vyššími kolegy.

Sedmá aplikace - paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na pochod po promenádě.

Kapela je seřazena do obdélníkového tvaru o m řadách a n sloupcích.

Na zkoušce si kapelník všimne, že při pohledu zleva (kde je hlavní tribuna) jsou někteří menší hudebníci zakryti svými vyššími kolegy.

Provede tedy v každé řadě takzvané *nerostoucí přerovnění*.

Sedmá aplikace - paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na pochod po promenádě.

Kapela je seřazena do obdélníkového tvaru o m řadách a n sloupcích.

Na zkoušce si kapelník všimne, že při pohledu zleva (kde je hlavní tribuna) jsou někteří menší hudebníci zakryti svými vyššími kolegy.

Provede tedy v každé řadě takzvané *nerostoucí přerovnění*.

Když se však potom postaví před kapelu, vidí, že z čelního pohledu opět někteří menší hudebníci nejsou vidět.

Sedmá aplikace - paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na pochod po promenádě.

Kapela je seřazena do obdélníkového tvaru o m řadách a n sloupcích.

Na zkoušce si kapelník všimne, že při pohledu zleva (kde je hlavní tribuna) jsou někteří menší hudebníci zakryti svými vyššími kolegy.

Provede tedy v každé řadě takzvané *nerostoucí přerovnění*.

Když se však potom postaví před kapelu, vidí, že z čelního pohledu opět někteří menší hudebníci nejsou vidět.

Provede tedy nerostoucí přerovnění ještě také v každém sloupci.

Sedmá aplikace - paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na pochod po promenádě.

Kapela je seřazena do obdélníkového tvaru o m řadách a n sloupcích.

Na zkoušce si kapelník všimne, že při pohledu zleva (kde je hlavní tribuna) jsou někteří menší hudebníci zakryti svými vyššími kolegy.

Provede tedy v každé řadě takzvané *nerostoucí přerovnění*.

Když se však potom postaví před kapelu, vidí, že z čelního pohledu opět někteří menší hudebníci nejsou vidět.

Provede tedy nerostoucí přerovnění ještě také v každém sloupci.

Kapelník se nyní bojí jít se podívat doleva, jestli nové uspořádání ve sloupcích nezničilo jeho předchozí pečlivé uspořádání v řadách.

Sedmá aplikace - paradox kapelníka dechovky

Kapelník připravuje dechovku na pochod po promenádě.

Kapela je seřazena do obdélníkového tvaru o m řadách a n sloupcích.

Na zkoušce si kapelník všimne, že při pohledu zleva (kde je hlavní tribuna) jsou někteří menší hudebníci zakryti svými vyššími kolegy.

Provede tedy v každé řadě takzvané *nerostoucí přerovnění*.

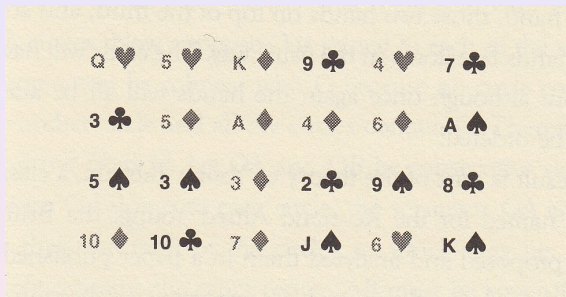
Když se však potom postaví před kapelu, vidí, že z čelního pohledu opět někteří menší hudebníci nejsou vidět.

Provede tedy nerostoucí přerovnění ještě také v každém sloupci.

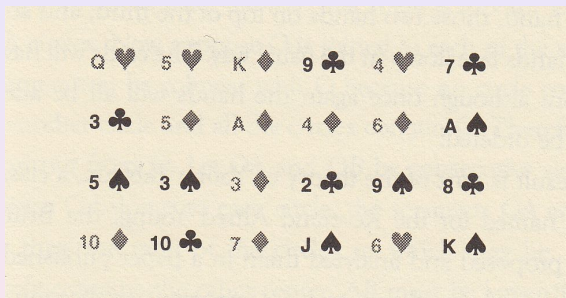
Kapelník se nyní bojí jít se podívat doleva, jestli nové uspořádání ve sloupcích nezničilo jeho předchozí pečlivé uspořádání v řadách.

Otázka: *Bojí se kapelník oprávněně?*

Ilustrace problému na kartičkách

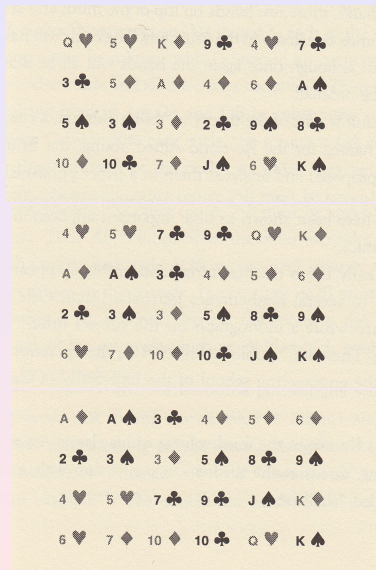


Ilustrace problému na kartičkách



kartičky - rozdání

Po dvojím přerovnání



Otázky a odpovědi

1) Má se kapelník bát?

1) Má se kapelník bát?

NE.

1) Má se kapelník bát?

NE.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

1) Má se kapelník bát?

NE.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO.

1) Má se kapelník bát?

NE.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO.

3) Jak?

1) Má se kapelník bát?

NE.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO.

3) Jak?

SPOREM!

Osmá aplikace - podposloupnosti v permutacích

Tvrzení. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ obsahuje jakákoli permutace čísel $1, 2, 3, \dots, n^2 + 1$ monotónní podposloupnost délky alespoň $n + 1$.*

Tvrzení. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ obsahuje jakákoli permutace čísel $1, 2, 3, \dots, n^2 + 1$ monotónní podposloupnost délky alespoň $n + 1$.*

Příklad:

Tvrzení. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ obsahuje jakákoli permutace čísel $1, 2, 3, \dots, n^2 + 1$ monotónní podposloupnost délky alespoň $n + 1$.*

Příklad: $n = 3$,

Tvrzení. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ obsahuje jakákoli permutace čísel $1, 2, 3, \dots, n^2 + 1$ monotónní podposloupnost délky alespoň $n + 1$.*

Příklad: $n = 3, \quad n^2 + 1 = 10,$

Tvrzení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ obsahuje jakákoli permutace čísel $1, 2, 3, \dots, n^2 + 1$ monotónní podposloupnost délky alespoň $n + 1$.

Příklad: $n = 3$, $n^2 + 1 = 10$, permutace

6, 5, 9, 3, 7, 1, 2, 8, 4, 10,

Tvrzení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ obsahuje jakákoli permutace čísel $1, 2, 3, \dots, n^2 + 1$ monotónní podposloupnost délky alespoň $n + 1$.

Příklad: $n = 3$, $n^2 + 1 = 10$, permutace

6, 5, 9, 3, 7, 1, 2, 8, 4, 10,

obsahuje klesající podposloupnost délky 4:

Tvrzení. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ obsahuje jakákoli permutace čísel $1, 2, 3, \dots, n^2 + 1$ monotónní podposloupnost délky alespoň $n + 1$.*

Příklad: $n = 3$, $n^2 + 1 = 10$, permutace

6, 5, 9, 3, 7, 1, 2, 8, 4, 10,

obsahuje klesající podposloupnost délky 4:

6, 5, 9, 3, 7, 1, 2, 8, 4, 10.

Otázky a odpovědi

1) Je tomu tak vždy?

1) Je tomu tak vždy?

ANO.

1) Je tomu tak vždy?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

1) Je tomu tak vždy?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO.

1) Je tomu tak vždy?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO.

3) Jak správně zvolit šuplíčky?

Devátá aplikace - kruhy v rovině

Tvrzení. *V rovině je dáno šest kruhů. Žádný z nich neobsahuje střed jiného kruhu. Potom mají prázdný průnik.*

Otázky a odpovědi

1) Je to pravda?

1) Je to pravda?

ANO.

1) Je to pravda?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

1) Je to pravda?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO.

1) Je to pravda?

ANO.

2) Plyne to z Dirichletova principu?

ANO.

3) Jak správně zvolit šuplíčky?

Závěrem: problém do šatny - nudná přednáška

Závěrem: problém do šatny - nudná přednáška

Nudný profesor vede nudnou přednášku.

Závěrem: problém do šatny - nudná přednáška

Nudný profesor vede nudnou přednášku.

Studentům se chce neustále spát.

Závěrem: problém do šatny - nudná přednáška

Nudný profesor vede nudnou přednášku.

Studentům se chce neustále spát.

Téměř neustále alespoň některý student spí.

Závěrem: problém do šatny - nudná přednáška

Nudný profesor vede nudnou přednášku.

Studentům se chce neustále spát.

Téměř neustále alespoň některý student spí.

PRAVIDLO: Jestliže usne **více než polovina studentů**, nudný profesor se naštve a příště dá písemku.

V inkriminovaný den přišlo na přednášku **pět** studentů.

V inkriminovaný den přišlo na přednášku **pět** studentů.

Přednáška byla tak nudná, že **každý student usnul právě dvakrát (ve dvou různých intervalech)**.

V inkriminovaný den přišlo na přednášku **pět** studentů.

Přednáška byla tak nudná, že **každý student usnul právě dvakrát (ve dvou různých intervalech)**.

Navíc: **každý spal s každým**.

V inkriminovaný den přišlo na přednášku **pět** studentů.

Přednáška byla tak nudná, že **každý student usnul právě dvakrát (ve dvou různých intervalech)**.

Navíc: **každý spal s každým**.

OTÁZKA: Bude příště písemka?

V inkriminovaný den přišlo na přednášku **pět** studentů.

Přednáška byla tak nudná, že **každý student usnul právě dvakrát (ve dvou různých intervalech)**.

Navíc: **každý spal s každým**.

OTÁZKA: Bude příště písemka?

VÝHRŮŽKA: Jestli mi nepošlete včas řešení, tak vám na příští OSMĚ dám písemku.

Konečně konec

Při přípravě této přednášky nebylo utraceno žádné zvíře

Při přípravě této přednášky nebylo utraceno žádné zvíře
ani žádný politik

Při přípravě této přednášky nebylo utraceno žádné zvíře
ani žádný politik
(bohužel).

Při přípravě této přednášky nebylo utraceno žádné zvíře
ani žádný politik
(bohužel).

Díky za pozornost!